Субриманово расстояние до единицы в группах Ли SO(3) и SU(2)

И.А. Зубарева

Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН

25-30 июля 2014

Необходимые сведения

$SO(3)$ — компактная группа Ли, состоящая из всех ортогональных 3×3–матриц с определителем 1:

$$SO(3) = \{C \in Gl(3) \mid CC^T = e, \ \mathrm{det}(C) = 1\}.$$

Ее алгебра Ли $\mathfrak{so}(3)$ состоит из всех кососимметричных 3×3–матриц.

Зададим базис $\mathfrak{so}(3)$:

$$a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим $D(e) = \mathrm{Lin}(a, b)$ и зададим на $D(e)$ скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ с ортонормированным базисом a, b. Левоинвариантное распределение D на группе Ли $SO(3)$ с данным $D(e)$ вполне неголономно, пара $(D(e), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ определяет левоинвариантную субриманову метрику d на $SO(3)$.

Необходимые сведения

Результат (В.Н. Берестовский, И.А. Зубарева)

Каждая параметризованная длиной дуги геодезическая $\gamma = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в $SO(3)$ с условием $\gamma(0) = e$ есть произведение двух 1–параметрических подгрупп:

$$\gamma(t) = \exp(t(\cos\phi_0 a + \sin\phi_0 b + \beta c))\exp(-t\beta c),$$

где ϕ_0, β — некоторые произвольные постоянные.
Обозначим

$$m = \frac{\sin\left(t\sqrt{1+\beta^2}\right)}{\sqrt{1+\beta^2}},\ n = \frac{1-\cos\left(t\sqrt{1+\beta^2}\right)}{1+\beta^2}.$$

Необходимые сведения

Первый столбец элементов геодезической $\gamma(t)$ равен

$$\begin{pmatrix} 1-n \\ m\cos\phi_0 - \beta n \sin\phi_0 \\ m\sin\phi_0 + \beta n\cos\phi_0 \end{pmatrix}.$$

Второй столбец элементов геодезической $\gamma(t)$ равен

$$\begin{pmatrix} -m\cos(\beta t+\phi_0) - \beta n\sin(\beta t+\phi_0) \\ (1-\beta^2 n)\cos\beta t + \beta m\sin\beta t - n\cos(\beta t+\phi_0)\cos\phi_0 \\ \beta m\cos\beta t - (1-\beta^2 n)\sin\beta t - n\cos(\beta t+\phi_0)\sin\phi_0 \end{pmatrix}.$$

Третий столбец элементов геодезической $\gamma(t)$ равен

$$\begin{pmatrix} -m\sin(\beta t+\phi_0) + \beta n\cos(\beta t+\phi_0) \\ (1-\beta^2 n)\sin\beta t - \beta m\cos\beta t - n\sin(\beta t+\phi_0)\cos\phi_0 \\ (1-\beta^2 n)\cos\beta t + \beta m\sin\beta t - n\sin(\beta t+\phi_0)\sin\phi_0 \end{pmatrix}.$$

Основной результат

Теорема 1.

Пусть $C = (c_{ij}) \in SO(3)$, $C \neq e$, e — единица группы $SO(3)$. Тогда
1. Если $c_{11} = -1$, то $d(C, e) = \pi$.
2. Если $c_{11} = 1$, то $d(C, e) = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\beta^2}}$, где β — единственное решение системы уравнений

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} = c_{22}, \\ \sin \frac{\pi\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} = c_{23}. \end{cases}$$

3. Если $-1 < c_{11} < 1$ и $\cos\left(\pi\sqrt{\frac{1+c_{11}}{2}}\right) = -\frac{c_{22}+c_{33}}{1+c_{11}}$, то

$$d(C, e) = \pi\sqrt{\frac{1}{2}(1 - c_{11})}.$$

Основной результат

4. Если $-1 < c_{11} < 1$ и $\cos\left(\pi\sqrt{\frac{1+c_{11}}{2}}\right) > -\frac{c_{22}+c_{33}}{1+c_{11}}$, то

$$d(C,e) = \frac{2}{\sqrt{1+\beta^2}} \arcsin\sqrt{\frac{(1-c_{11})(1+\beta^2)}{2}}, \tag{1}$$

где β — единственное решение системы уравнений

$$\begin{cases} \cos\left(\arcsin\left(\beta\sqrt{\frac{1-c_{11}}{1+c_{11}}}\right) - \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \arcsin\sqrt{\frac{1}{2}(1-c_{11})(1+\beta^2)}\right) = \\ \sqrt{\frac{1+c_{11}+c_{22}+c_{33}}{2(1+c_{11})}}, \\ \sin\left(\arcsin\left(\beta\sqrt{\frac{1-c_{11}}{1+c_{11}}}\right) - \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \arcsin\sqrt{\frac{1}{2}(1-c_{11})(1+\beta^2)}\right) = \\ \operatorname{sgn}(c_{32}-c_{23})\sqrt{\frac{1+c_{11}-c_{22}-c_{33}}{2(1+c_{11})}}. \end{cases} \tag{2}$$

Основной результат

5. Если $-1 < c_{11} < 1$ и $\cos\left(\pi\sqrt{\frac{1+c_{11}}{2}}\right) < -\frac{c_{22}+c_{33}}{1+c_{11}}$, то

$$d(C,e) = \frac{2}{\sqrt{1+\beta^2}}\left(\pi - \arcsin\sqrt{\frac{(1-c_{11})(1+\beta^2)}{2}}\right),$$

где β — единственное решение системы уравнений

$$\begin{cases} \cos\left(\arcsin\left(\beta\sqrt{\frac{1-c_{11}}{1+c_{11}}}\right) + \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\left(\pi - \arcsin\sqrt{\frac{1}{2}(1-c_{11})(1+\beta^2)}\right)\right) = \\ -\sqrt{\frac{1+c_{11}+c_{22}+c_{33}}{2(1+c_{11})}}, \\ \sin\left(\arcsin\left(\beta\sqrt{\frac{1-c_{11}}{1+c_{11}}}\right) + \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\left(\pi - \arcsin\sqrt{\frac{1}{2}(1-c_{11})(1+\beta^2)}\right)\right) = \\ \mathrm{sgn}(c_{32}-c_{23})\sqrt{\frac{1+c_{11}-c_{22}-c_{33}}{2(1+c_{11})}}. \end{cases}$$

Необходимые сведения

$SU(2)$ есть компактная односвязная группа Ли всех унитарных унимодулярных 2×2–матриц

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} \mid A, B \in \mathbb{C}, \mid A \mid^2 + \mid B \mid^2 = 1 \right\}.$$

Через (A, B) будем обозначать матрицу $\begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} \in SU(2)$.

Алгебра Ли $\mathfrak{su}(2)$ есть алгебра всех косоэрмитовых 2×2–матриц с нулевым следом

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} iA & B \\ -\overline{B} & -iA \end{pmatrix} \mid A \in \mathbb{R}, \ B \in \mathbb{C} \right\}.$$

Зададим базис $\mathfrak{su}(2)$ следующим образом:

$$p_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ p_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Положим $\Delta(e) = \mathrm{Lin}(p_1, p_2)$ и зададим на $\Delta(e)$ скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ с ортонормированным базисом p_1, p_2.

Необходимые сведения

Пара $(\Delta(e), (\cdot,\cdot))$ определяет левоинвариантную субриманову метрику ρ на $SU(2)$.

Результат (Ugo Boscain, Fransesco Rossi)

Каждая параметризованная длиной дуги геодезическая $\gamma = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в $SU(2)$ с условием $\gamma(0) = e$ есть произведение двух 1-параметрических подгрупп

$$\gamma(t) = \exp\left(t(\cos\phi_0 p_1 + \sin\phi_0 p_2 + \beta k)\right)\exp\left(-t\beta k\right),$$

где ϕ_0, β — произвольные постоянные. Если $\gamma(t) = (A, B)$, то

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(A) = \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\sin\frac{t\sqrt{1+\beta^2}}{2}\sin\frac{\beta t}{2} + \cos\frac{t\sqrt{1+\beta^2}}{2}\cos\frac{\beta t}{2}, \\ \mathrm{Im}(A) = \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\sin\frac{t\sqrt{1+\beta^2}}{2}\cos\frac{\beta t}{2} - \cos\frac{t\sqrt{1+\beta^2}}{2}\sin\frac{\beta t}{2}, \end{cases}$$

$$B = \frac{\sin\frac{t\sqrt{1+\beta^2}}{2}}{\sqrt{1+\beta^2}}\left(\cos\left(\frac{\beta t}{2} + \phi_0\right) + i\sin\left(\frac{\beta t}{2} + \phi_0\right)\right).$$

Теорема (Ugo Boscain, Fransesco Rossi)

Пусть $g = (A, B) \in SU(2)$, Id — единица группы $SU(2)$. Тогда

$$d(g, \mathrm{Id}) = \begin{cases} 2\sqrt{\arg(A)\,(2\pi - \arg(A))}, & \text{если } B = 0, \\ \Psi(A), & \text{если } B \neq 0, \end{cases}$$

где $\arg(A) \in [0, 2\pi]$ и $\Psi(A) = t$ — единственное решение системы

$$\begin{cases} -\frac{\beta t}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \operatorname{tg} \frac{t\sqrt{1+\beta^2}}{2}\right) = \arg(A), \\ \frac{\sin\left(t\sqrt{1+\beta^2}/2\right)}{\sqrt{1+\beta^2}} = \sqrt{1 - \mid A \mid^2}, \\ t \in \left(0, \frac{2\pi}{\sqrt{1+\beta^2}}\right). \end{cases}$$

[1] *Boscain U., Rossi F.*, Invariant Carnot-Carathéodory metrics on S^3, $SO(3)$, $SL(2)$, and lens spaces // SIAM J. Control Optim. 2008 – Vol. 47, N 4. P. 1851-1878.

Основной результат

Теорема 2.

Пусть $g = (A, B) \in SU(2)$, $\mathrm{Id} = (1, 0)$ — единица группы $SU(2)$.
Тогда
1. Если $A = 0$, то $d(g, \mathrm{Id}) = \pi$.
2. Если $\mid A \mid = 1$, то

$$d(g, \mathrm{Id}) = \sqrt{\mid \arg(A) \mid (2\pi - \mid \arg(A) \mid)}, \quad \arg(A) \in [-\pi, \pi].$$

3. Если $0 < \mid A \mid < 1$ и $\mathrm{Re}(A) = \mid A \mid \sin\left(\frac{\pi}{2} \mid A \mid\right)$, то

$$d(g, \mathrm{Id}) = \pi\sqrt{1 - \mid A \mid^2}.$$

Основной результат

4. Если $0 <| A |< 1$ и $\mathrm{Re}(A) >| A | \sin\left(\frac{\pi}{2} \mid A \mid\right)$, то

$$d(g, \mathrm{Id}) = \frac{2}{\sqrt{1+\beta^2}} \arcsin \sqrt{(1- \mid A \mid^2)(1+\beta^2)},$$

где β — единственное решение системы уравнений

$$\begin{cases} \cos\left(\arcsin \frac{\beta\sqrt{1-|A|^2}}{|A|} - \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \arcsin \sqrt{(1- \mid A \mid^2)(1+\beta^2)}\right) = \frac{\mathrm{Re}(A)}{|A|}, \\ \sin\left(\arcsin \frac{\beta\sqrt{1-|A|^2}}{|A|} - \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \arcsin \sqrt{(1- \mid A \mid^2)(1+\beta^2)}\right) = \frac{\mathrm{Im}(A)}{|A|}. \end{cases}$$

Основной результат

5. Если $0 <\mid A \mid< 1$ и $\mathrm{Re}(A) <\mid A \mid \sin\left(\frac{\pi}{2} \mid A \mid\right)$, то

$$d(g, \mathrm{Id}) = \frac{2}{\sqrt{1+\beta^2}}\left(\pi - \arcsin\sqrt{(1- \mid A \mid^2)(1+\beta^2)}\right),$$

где β — единственное решение системы уравнений

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\left(\pi - \arcsin\sqrt{(1- \mid A \mid^2)(1+\beta^2)}\right) + \arcsin\frac{\beta\sqrt{1-|A|^2}}{|A|}\right) = -\frac{\mathrm{Re}(A)}{|A|}, \\ \sin\left(\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\left(\pi - \arcsin\sqrt{(1- \mid A \mid^2)(1+\beta^2)}\right) + \arcsin\frac{\beta\sqrt{1-|A|^2}}{|A|}\right) = \frac{\mathrm{Im}(A)}{|A|}. \end{cases}$$