

(Локально) кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли $SO(2, 1)$

В. Н. Берестовский

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Омский филиал

Телецкое озеро

25-30 Июля 2014, Артыбаш, Россия

Предварительные сведения

Псевдоевклидово пространство $E^{n,1}$, где $n + 1 \geq 2$, или пространство-время Минковского $Mink^{n+1}$, есть векторное пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ с псевдоскалярным произведением $\{(t, x), (s, y)\} := -ts + (x, y)$. Здесь $(x, y) = xy^T$ — стандартное скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$. Группа Лоренца $SO(n, 1)$ — компонента связности единицы группы $P(n, 1)$ всех линейных псевдоизометрических (т.е. сохраняющих псевдоскалярное произведение $\{\cdot, \cdot\}$) преобразований пространства $Mink^{n+1}$.

Очевидно

$$\{(t, x), (s, y)\} = ((-t, x), (s, y)) = ((t, x)I, (s, y)) = (t, x)I(s, y)^T, \quad (0.1)$$

где I — матрица линейного отображения $(t, x) \rightarrow (-t, x)$, т.е. оператора обращения времени. Из формулы (0.1) следует, что $A \in P(n, 1) \Leftrightarrow$ для любых $(t, x), (s, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$(t, x)I(s, y)^T = (t, x)AI((s, y)A)^T = (t, x)AIA^T(s, y)^T \Leftrightarrow AIA^T = I \Leftrightarrow AIA^T I = E_{n+1}, \quad (0.2)$$

где $E_{n+1} = e$ — единичная $(n+1) \times (n+1)$ -матрица (было учтено тождество $I^2 = E_{n+1}$).

Пусть $A = A(s)$, $-\varepsilon < s < \varepsilon$, — непрерывно дифференцируемая кривая в $SO(n, 1)$ с условиями $A(0) = e$, $A'(0) = a$. Тогда дифференцирование тождества (0.2) при $s = 0$ дает равенство

$$a + Ia^T I = 0 \Leftrightarrow Ia + a^T I = 0 \Leftrightarrow Ia + (Ia)^T = 0.$$

Обратно, нетрудно доказать, что если матрица удовлетворяет этому условию, то для всех $s \in \mathbb{R}$, матричная экспонента $\exp(sa) \in SO(n, 1)$. Так как $I^2 = E_{n+1}$, то алгебра Ли $\mathfrak{so}(n, 1)$ групп Ли $P(n, 1)$ и $SO(n, 1)$ определяется равенством

$$\mathfrak{so}(n, 1) = I \cdot \mathfrak{so}(n). \quad (0.3)$$

Как следствие,

$$(\mathfrak{so}(n, 1))^T = \mathfrak{so}(n, 1). \quad (0.4)$$

Нас будет интересовать случай $n = 2$. Вследствие (0.3), матрицы

$$a = e_{12} + e_{21}, \quad b = e_{13} + e_{31}, \quad c = e_{32} - e_{23}, \quad (0.5)$$

образуют базис алгебры Ли $\mathfrak{so}(2, 1)$. При этом, учитывая, что $[a, b] = ab - ba$ и т.д., легко находим, что

$$[a, b] = -c, \quad [b, c] = a, \quad [c, a] = b. \quad (0.6)$$

Для поиска геодезических применяется

Теорема 1

Пусть G — связная подгруппа Ли группы Ли $Gl(n)$ с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, D — вполне неголономное левоинвариантное распределение на G , скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $D(e)$ пропорционально ограничению скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ (на $D(e)$). Тогда параметризованная длиной дуги нормальная геодезическая (т.е. локально кратчайшая) $\gamma = \gamma(t)$, $t \in (-a, a) \subset \mathbb{R}$, $\gamma(0) = e$, на (G, d) с левоинвариантной субримановой метрикой d , определяемой распределением D и скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $D(e)$, удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\gamma}(t) = \gamma(t)u(t), \quad u(t) \in D(e) \subset \mathfrak{g}, \quad \langle u(t), u(t) \rangle \equiv 1, \quad (0.7)$$

$$pr_{\mathfrak{g}}([u(t)^T, u(t)] + [u(t)^T, v(t)]) = \dot{u}(t) + \dot{v}(t), \quad (0.8)$$

где $u = u(t)$, $v = v(t) \in \mathfrak{g}$, $(v(t), D(e)) \equiv 0$, $t \in (-a, a) \subset \mathbb{R}$, — некоторые вещественно-аналитические вектор-функции.

Поиск геодезических на $(SO(2, 1), d)$

Теорема 2

Пусть задан базис (0.5) алгебры Ли $\mathfrak{so}(2, 1)$, $D(e) = \text{Lin}(a, b)$ и на $D(e)$ задано скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ с ортонормированным базисом a, b . Тогда левоинвариантное распределение D на группе Ли $SO(2, 1)$ с данным $D(e)$ вполне неголономно и пара $(D(e), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ определяет левоинвариантную субриманову метрику d на $SO(2, 1)$. При этом каждая параметризованная длиной дуги геодезическая $\gamma = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в $SO(2, 1)$ с условием $\gamma(0) = e$ есть произведение двух 1-параметрических подгрупп:

$$\gamma(t) = \exp(t(\cos \phi_0 a + \sin \phi_0 b - \beta c)) \exp(t\beta c), \quad (0.9)$$

где ϕ_0, β — некоторые произвольные постоянные.

Первое утверждение вытекает из формулы (0.6). Ясно, что на $D(e)$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \frac{1}{2}(\cdot, \cdot). \quad (0.10)$$

Вследствие теоремы 3 в [1] каждая геодезическая на 3-мерной группе Ли с левоинвариантной субримановой метрикой нормальна. Тогда из теоремы 1 следует, что для поиска геодезических $\gamma = \gamma(t), t \in \mathbb{R}$, в $(SO(3), d)$ можно применить ОДУ (0.7), (0.8). Ясно, что

$$u(t) = \cos \phi(t)a + \sin \phi(t)b, \quad v(t) = \beta(t)c, \quad (0.11)$$

и тождество (0.8) записывается в виде

$$[\cos \phi(t)a + \sin \phi(t)b, \beta(t)c] = \dot{\phi}(t)(-\sin \phi(t)a + \cos \phi(t)b) + \dot{\beta}(t)c.$$

Вследствие (0.6), выражение в левой части равенства равно

$$-\beta(t)(\cos \phi(t)b - \sin \phi(t)a).$$

Получаем тождества $\dot{\beta}(t) = 0$, $\dot{\phi}(t) = -\beta(t)$. Следовательно,

$$\beta = \beta(t) = \text{const}, \quad \phi(t) = \phi_0 - \beta t. \quad (0.12)$$

Вследствие (0.7), (0.11) и (0.12), должно быть

$$\dot{\gamma}(t) = \gamma(t)(\cos(\phi_0 - \beta t)a + \sin(\phi_0 - \beta t)b). \quad (0.13)$$

Докажем, что (0.9) является решением ОДУ (0.13). Из формул (0.6), (0.5) легко вывести равенства

$$(\text{ad}(c)) = Ia, \quad (\text{ad}(b)) = b, \quad (\text{ad}(a)) = -(e_{23} + e_{32}), \quad (0.14)$$

где (f) — матрица линейного отображения $f : \mathfrak{so}(2, 1) \rightarrow \mathfrak{so}(2, 1)$ в базисе a, b, c ; (f) отождествляется с f . (0.14), (0.12), (0.11) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= \exp(t(\cos \phi_0 a + \sin \phi_0 b - \beta c))(\cos \phi_0 a + \sin \phi_0 b - \beta c) \exp(t\beta c) + \\ &\gamma(t)(\beta c) = \gamma(t) \exp(-t\beta c)(\cos \phi_0 a + \sin \phi_0 b - \beta c) \exp(t\beta c) + \gamma(t)(\beta c) = \\ &\gamma(t) \exp(-t\beta c)(\cos \phi_0 a + \sin \phi_0 b) \exp(t\beta c) + \gamma(t)(-\beta c) + \gamma(t)(\beta c) = \\ &\gamma(t) \cdot [\text{Ad}(\exp(-t\beta c))(\cos \phi_0 a + \sin \phi_0 b)] = \\ &\gamma(t) \cdot [\exp(\text{ad}(-t\beta c))(\cos \phi_0 a + \sin \phi_0 b)] = \\ &\gamma(t) \cdot [\exp(-t\beta(\text{ad}(c)))(\cos \phi_0 a + \sin \phi_0 b)] = \\ &\gamma(t) \cdot [\exp(-t\beta(Ia))(\cos \phi_0 a + \sin \phi_0 b)] = \\ &\gamma(t) \cdot (\cos(\phi_0 - \beta t)a + \sin(\phi_0 - \beta t)b) \Rightarrow \gamma(t)u(t). \end{aligned}$$

Замечание 1

Изменение знака у β в (0.9) равносильно изменению знака у t и замене угла ϕ_0 углом $\phi_0 \pm \pi$.

Замечание 2

Для каждой матрицы $B \in SO(2) = \exp(\mathbb{R}c)$, отображение $l_B \circ r_{B^{-1}}$, где l_B — умножение слева на B , $r_{B^{-1}}$ — умножение справа на B^{-1} , является одновременно изоморфизмом $\text{Ad } B$ алгебры Ли $(\mathfrak{so}(2, 1), [\cdot, \cdot])$, сохраняющим $\langle \cdot, \cdot \rangle$, и изоморфизмом группы Ли $SO(2, 1)$, сохраняющим распределение D и метрику d . В частности,

$$\text{Ad } B(a - \beta c) = \exp(\phi_0(Ia))(a - \beta c) = \cos \phi_0 a + \sin \phi_0 b - \beta c,$$

если

$$B = \exp(\phi_0 c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_0 & -\sin \phi_0 \\ 0 & \sin \phi_0 & \cos \phi_0 \end{pmatrix}. \quad (0.15)$$

Предложение 1

Пусть $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — геодезическая в $(SO(2, 1), d)$, определяемая формулой (0.9). Тогда для каждого $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\gamma(t_0)^{-1}\gamma(t) = \exp((t-t_0)(\cos(\beta t_0 + \phi_0)a + \sin(\beta t_0 + \phi_0)b - \beta c)) \exp((t-t_0)\beta c). \quad (0.16)$$

Доказывается аналогично случаю группы $SO(3)$.

Лемма 1

Пусть $x = (x_{ij}) \in \mathfrak{so}(2, 1)$,

$$q := x_{21}^2 + x_{31}^2 - x_{32}^2, \quad \alpha := \sqrt{|q|}. \quad (0.17)$$

Тогда

$$\exp(x) = e + x + \frac{x^2}{2}, \quad \text{если } q = 0, \quad (0.18)$$

$$\exp(x) = e + \frac{\sin \alpha}{\alpha} x + \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2} x^2, \quad \text{если } q < 0, \quad (0.19)$$

$$\exp(x) = e + \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\alpha} x + \frac{\operatorname{ch} \alpha - 1}{\alpha^2} x^2, \quad \text{если } q > 0, \quad (0.20)$$

где e — единичная матрица третьего порядка.

Proof. Характеристический многочлен матрицы x равен

$$P(\lambda) = |x - \lambda e| = \begin{vmatrix} -\lambda & x_{21} & x_{31} \\ x_{21} & -\lambda & -x_{32} \\ x_{31} & x_{32} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda q,$$

где q определено по формуле (0.17). По теореме Гамильтона–Кэли (см. с. 93 в [2]), матрица x является корнем многочлена $P(\lambda)$, т.е. $x^3 = qx$. Отсюда сразу следует (0.18) и

$$\begin{aligned} x^{2n+1} &= (-1)^n \alpha^{2n} x, & x^{2n} &= (-1)^{n+1} \alpha^{2n-2} x^2, & \text{если } q < 0, & n \geq 1, \\ x^{2n+1} &= \alpha^{2n} x, & x^{2n} &= \alpha^{2n-2} x^2, & \text{если } q > 0, & n \geq 1. \end{aligned}$$

Поэтому при $q < 0$

$$\exp(x) = e + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e + \frac{x}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{x^2}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{(2n)!},$$

и (0.19) выполнено. Аналогично при $q > 0$

$$\exp(x) = e + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e + \frac{x}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{x^2}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow (0.20).$$

Теорема 3

Пусть

$$m = t, \quad n = \frac{t^2}{2} \quad \text{если} \quad \beta^2 = 1, \quad (0.21)$$

$$m = \frac{\sin(t\sqrt{\beta^2 - 1})}{\sqrt{\beta^2 - 1}}, \quad n = \frac{1 - \cos(t\sqrt{\beta^2 - 1})}{\beta^2 - 1} \quad \text{если} \quad \beta^2 > 1, \quad (0.22)$$

$$m = \frac{\operatorname{sh}(t\sqrt{1 - \beta^2})}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad n = \frac{\operatorname{ch}(t\sqrt{1 - \beta^2}) - 1}{1 - \beta^2} \quad \text{если} \quad \beta^2 < 1, \quad (0.23)$$

Тогда геодезическая $\gamma(t)$ из теоремы 2 равна

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 + n \\ m \cos \phi_0 + \beta n \sin \phi_0 \\ m \sin \phi_0 - \beta n \cos \phi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \cos(\beta t - \phi_0) + \beta n \sin(\beta t - \phi_0) \\ n \cos(\beta t - \phi_0) \cos \phi_0 + \beta m \sin \beta t + (1 - \beta^2 n) \cos \beta t \\ n \cos(\beta t - \phi_0) \sin \phi_0 - \beta m \cos \beta t + (1 - \beta^2 n) \sin \beta t \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} \beta n \cos(\beta t - \phi_0) - m \sin(\beta t - \phi_0) \\ -n \sin(\beta t - \phi_0) \cos \phi_0 + \beta m \cos \beta t - (1 - \beta^2 n) \sin \beta t \\ -n \sin(\beta t - \phi_0) \sin \phi_0 + \beta m \sin \beta t + (1 - \beta^2 n) \cos \beta t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пусть $\phi_0 = 0$. Тогда (0.9) примет вид

$$\gamma(t) |_{\phi_0=0} = \exp(t(a - \beta c)) \exp(t\beta c).$$

Используя лемму 1, получим

$$\begin{aligned} \exp(t(a - \beta c)) &= \exp \left(t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \\ &m \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}^2 = \\ &\begin{pmatrix} 1+n & m & n\beta \\ m & 1+n(1-\beta^2) & m\beta \\ -n\beta & -m\beta & 1-n\beta^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В силу (0.15) матрицы $B = \exp(\phi_0)$ и $\exp(t\beta c)$ коммутируют. Отсюда, из (0.9) и замечания 2 следует, что

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= B \cdot \gamma(t) |_{\phi_0=0} \cdot B^{-1} = B \exp(t(a - \beta c)) B^{-1} \exp(t\beta c) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_0 & -\sin \phi_0 \\ 0 & \sin \phi_0 & \cos \phi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+n & m & n\beta \\ m & 1+n(1-\beta^2) & m\beta \\ -n\beta & -m\beta & 1-n\beta^2 \end{pmatrix} \times \\ &\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta t - \phi_0) & -\sin(\beta t - \phi_0) \\ 0 & \sin(\beta t - \phi_0) & \cos(\beta t - \phi_0) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1+n & m & \beta n \\ m \cos \phi_0 + \beta n \sin \phi_0 & (1+(1-\beta^2)n) \cos \phi_0 + \beta m \sin \phi_0 & \beta m \cos \phi_0 - (1-\beta^2 n) \sin \phi_0 \\ m \sin \phi_0 - \beta n \cos \phi_0 & (1+(1-\beta^2)n) \sin \phi_0 - \beta m \cos \phi_0 & \beta m \sin \phi_0 + (1-\beta^2 n) \cos \phi_0 \end{pmatrix} \times \\ &\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta t - \phi_0) & -\sin(\beta t - \phi_0) \\ 0 & \sin(\beta t - \phi_0) & \cos(\beta t - \phi_0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Вычисление произведения последних двух матриц завершает доказательство теоремы 3.

Группа $SO(n, 1)$ — связная группа изометрий пространства L^n

Ранее группа $SO(n, 1)$ действовала псевдоизометриями слева на векторах-строках в пространстве-времени Минковского $Mink^{n+1}$. Вследствие формулы (0.4) можно, и будем считать, что группа $SO(n, 1)$ действует псевдоизометриями слева на векторах-столбцах в пространстве-времени Минковского $Mink^{n+1}$. Орбита $SO(n, 1) \cdot (w_0 = (1, 0, \dots, 0)^T)$ события $(1, 0, \dots, 0)^T \in Mink^{n+1}$ — верхняя (точнее, при "обычном" расположении осей координат, "правая") полость двуполостного гиперboloида

$$-t^2 + \sum_{k=1}^n x_k^2 = \{(t, x)^T, (t, x)^T\} = -1, \quad t > 0. \quad (0.24)$$

Ограничение псевдоскалярного произведения $\{\cdot, \cdot\}$ на касательное расслоение этой орбиты является скалярным произведением и орбита с этим скалярным произведением изометрична n -мерному пространству Лобачевского L^n постоянной секционной кривизны -1 . Поэтому далее L^n будет обозначать эту орбиту.

Тогда автоматически $SO(n, 1)$ — наибольшая связная транзитивная группа изометрий пространства L^n . При этом подгруппа

$$SO(n) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & SO(n) \end{pmatrix} \subset SO(n, 1)$$

является стабилизатором группы $SO(n, 1)$ в точке w_0 . Поэтому L^n естественно отождествляется с однородным пространством $SO(n, 1)/SO(n)$, а действие группы $SO(n, 1)$ на L^n — с ее стандартным левым действием на $SO(n, 1)/SO(n)$. Каноническая проекция $p : SO(n, 1) \rightarrow L^n = SO(n, 1)/SO(n)$ определяется формулой $p(g) = gSO(n)$.

Группа Лоренца $SO(n, 1)$ диффеоморфна пространству L_1^n всех единичных касательных векторов к L^n . Именно, каждому элементу $g \in SO(n, 1)$ сопоставляется единичный касательный вектор $f(g) := g(v_0)$ к L^n в точке $g(w_0)$ где $v_0 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T$ — единичный касательный вектор к L^n в точке w_0 .

При отождествлении $SO(2, 1)$ с L_1^2 посредством f для каждого геодезического пути $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, в $(SO(2, 1), d)$ с произвольным началом $g \in SO(2, 1)$, $f(\gamma(t))$, $0 \leq t \leq t_1$, есть параллельное в смысле [3] векторное поле (в плоскости Лобачевского!) с начальным единичным касательным вектором $f(\gamma(0)) = g(v_0) \in L_1^2$ вдоль проекции $p(\gamma(t))$, $0 \leq t \leq t_1$, [4].

- 1) В частности, если $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — геодезическая в $(SO(2, 1), d)$ вида (0.9) с $\phi_0 = 0$, то $\gamma'(0) = v_0$ и $f(\gamma(t))$, $0 \leq t \leq t_1$, есть параллельное векторное поле в L^2 вдоль $p(\gamma(t))$, $t \in \mathbb{R}$, с начальным единичным касательным вектором $\gamma'(0)$.
- 2) Каноническая проекция $p : (SO(2, 1), d) \rightarrow L^2$ — субметрия [5], [4].
- 3) Если $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, — произвольная (параметризованная длиной дуги) геодезическая в $(SO(2, 1), d)$ то ее проекция $p(\gamma(t))$, $0 \leq t \leq t_1$, в L^2 параметризована длиной дуги.
- 4) На основании предложения 1, замечания 2 и левой инвариантности метрики d , для поиска всех кратчайших в $(SO(2, 1), d)$ достаточно найти все непродолжаемые кратчайшие вида $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, (0.9), с $\phi_0 = 0$.

Кратчайшие на группе Ли $(SO(2, 1), d)$

Для поиска кратчайших в $(SO(2, 1), d)$ используем утверждения 1) — 4). В частности, достаточно исследовать отрезки геодезических вида

$$\gamma(t) = \exp(t(a - \beta c)) \exp(t\beta c), \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad (0.25)$$

и их проекции

$$x(t) := p(\gamma(t)) = \gamma(t) \cdot w_0 = \gamma(t) \cdot (1, 0, 0)^T = (1+n, m, -\beta n)^T, \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad (0.26)$$

на плоскость L^2 , где m, n определены формулами (0.21), (0.22), (0.23) (мы использовали теорему 3).

Формула для вычисления геодезической кривизны κ кривой в полугеодезической системе координат дана на с. 164 в [3]. Далее строится полугеодезическая система координат (u, v) в L^2 .

Каноническая параметризованная длиной дуги геодезическая в L^2 имеет вид $\tilde{\gamma}(s) = (\operatorname{ch} s, \operatorname{sh} s, 0)$. Отсюда и из инвариантности расстояния в L^2 относительно действия группы $SO(2, 1)$ следует, что расстояние между точками $(t, x, y)^T$ и $(t_1, x_1, y_1)^T$ в L^2 равно

$$\rho((t, x, y)^T, (t_1, x_1, y_1)^T) = \operatorname{Arcch}(-\{(t, x, y)^T, (t_1, x_1, y_1)^T\}). \quad (0.27)$$

Пусть $(t, x, y)^T$ — точка в L^2 . Тогда $(1/\sqrt{t^2 - y^2})(t, 0, y)^T \in L^2$ и вследствие (0.27) расстояние от этой точки до точек $(t, x, y)^T$ и $w_0 = (1, 0, 0)^T$ равно соответственно $\operatorname{Arcch}(\sqrt{t^2 - y^2})$ и $\operatorname{Arcch}(t/\sqrt{t^2 - y^2})$. Определим координаты u, v точки $(t, x, y)^T$ так:

$$u = \operatorname{sgn}(x)\operatorname{Arcch}(\sqrt{t^2 - y^2}), \quad v = \operatorname{sgn}(y)\operatorname{Arcch}\left(\frac{t}{\sqrt{t^2 - y^2}}\right). \quad (0.28)$$

Нетрудно убедиться в том, что все точки линии $u = u_0$ отстоят от линии $u = 0$ на расстоянии $|u_0|$, причем линия $v = v_0$ дает кратчайшее соединение точки (u_0, v_0) с линией $u = 0$, а линия $u = 0$ — геодезическая, для которой v — параметризация длиной дуги. Отсюда следует, что элемент длины в этих координатах определяется формулой

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{ch}^2(u)dv^2, \quad (0.29)$$

т.е. (u, v) — полугеодезическая система координат в L^2 . Кроме того, *первые частные производные компонент метрического тензора и символы Кристоффеля в этой системе координат равны нулю на линии $u = 0$* . Отсюда, из предложения 1, формулы (0.13) и формулы для κ на с. 164 в [3] легко выводится

Предложение 2

Проекция (0.26) имеет постоянную геодезическую кривизну κ , и для ее координатного представления $(u(t), v(t)) = (u(x(t)), v(x(t)))$,

$$u(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \quad v'(0) = 0, \quad \kappa = -v''(0).$$



Предложение 3

Геометрическая кривизна проекции (0.26) равна $\kappa = \beta$.

Proof. Вследствие формул (0.26), (0.21), (0.22), (0.23) и (0.28)

$$n(0) = m(0) = 0, \quad n' = m, \quad n'(0) = 0, \quad n''(0) = 1$$

и при малых положительных t

$$v(t) = \operatorname{sgn}(-\beta) \operatorname{Arcch} \left(\frac{1+n}{\sqrt{1+2n+(1-\beta^2)n^2}} \right), \quad v'(t) = \frac{\operatorname{sgn}(-\beta)}{\operatorname{sh}(\operatorname{Arcch}((1+n)/\sqrt{1+2n+(1-\beta^2)n^2}))} \cdot \left(\frac{1+n}{\sqrt{1+2n+(1-\beta^2)n^2}} \right)' = \frac{\sqrt{1+2n+(1-\beta^2)n^2}}{|\beta|n} \cdot \frac{\operatorname{sgn}(-\beta)\beta^2 n n'}{(1+2n+(1-\beta^2)n^2)^{3/2}} = \frac{\operatorname{sgn}(-\beta)|\beta|n'}{1+2n+(1-\beta^2)n^2}.$$

На основании предложения 2

$$\kappa = -v''(0) = \operatorname{sgn}(\beta)|\beta|n''(0) = \beta.$$

Согласно теореме 3 далее рассмотрим 4 случая: I) $\beta = 0$, II) $0 < \beta^2 < 1$, III) $\beta^2 = 1$, IV) $1 < \beta^2$. Из предложения 3 и известных фактов гиперболической геометрии непосредственно вытекает

Следствие 1

Проекция (0.26)— I) геодезическая, II) эквидистанта, III) орицикл, IV) окружность.

Лемма 2

В случае I) каждый отрезок $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, — кратчайшая.

Доказывается аналогично случаю группы Ли $(SO(3), d)$.

Предложение 4

Пусть проекция (0.26) геодезического отрезка (0.25), где $\beta \neq 0$, не имеет самопересечений (в случаях II и III это выполнено всегда, а в случае IV когда $0 \leq t_1 < 2\pi/\sqrt{\beta^2 - 1}$), $S(t_1) = S(t_1, \beta)$ — площадь криволинейного двуугольника P в L^2 , ограниченного отрезком (0.26) и кратчайшим отрезком $[x(0)x(t_1)]$ длины $r = r(t_1)$ в L^2 , $\psi = \psi(t_1, \beta)$ — угол двуугольника P . Тогда

$$S(t_1) = |\beta|t_1 - 2\psi, \quad r = \text{Arcch}((1+n)(t_1)), \quad r'(t_1) = \cos \psi = \frac{m}{\sqrt{n(n+2)}}. \quad (0.30)$$

При этом $S'(t_1) > 0$, $t_1 > 0$; $0 < \psi < \pi/2$ в случаях II и III, а в случае IV когда $0 \leq t_1 < \pi/\sqrt{\beta^2 - 1}$.

Вследствие замечания 1 можно считать, что $\beta > 0$. Отрезок $[x(0)x(t_1)]$ имеет геодезическую кривизну 0. Тогда первое равенство в (0.30) — прямое следствие предложения 3 и теоремы Гаусса-Бонне при $K = -1$, второе — формул (0.26) и (0.27), следующее — хорошо известное утверждение римановой геометрии (о существовании сильного угла), последнее — результат дифференцирования второго равенства в (0.30). Неравенства $0 < \psi(t_1) < \pi/2$ справедливы в указанных случаях вследствие последнего равенства в (0.30), первых формул в (0.21), (0.22), (0.23) и того, что $\lim_{t_1 \rightarrow +0} \psi(t_1) = 0$.

Докажем оставшееся утверждение. Известно, что в L^2

$$l(r, \alpha) = \alpha \operatorname{sh} r, \quad (0.31)$$

$$S(r, \alpha) = \int_0^r \alpha \operatorname{sh} s ds = \alpha \operatorname{ch} s|_0^r = \alpha(\operatorname{ch} r - 1), \quad (0.32)$$

где $l(r, \alpha)$ — длина дуги окружности радиуса r с центральным углом $\alpha \leq 2\pi$, а $S(r, \alpha)$ — площадь соответствующего сектора. Отсюда, из (0.30) и вторых формул в (0.21), (0.22), (0.23) следуют соотношения

$$S'(t_1) = (\operatorname{ch} r - 1)\psi'(t_1) = |\beta| - 2\psi'(t_1),$$

$$\psi'(t_1) = \frac{|\beta|}{\operatorname{ch} r + 1} = \frac{|\beta|}{n + 2}, \quad (0.33)$$

$$S'(t_1) = \frac{|\beta|n}{n + 2}(t_1) > 0, \quad t_1 > 0. \quad (0.34)$$

Предложение 5

- 1) Если $\beta \neq 0$, то геодезический отрезок (0.25) — непродолжаемая кратчайшая, если его проекция (0.26) — а) однократно проходимая окружность C , ограничивающая круг с площадью $S(t_1) \leq \pi$ или б) кривая без самопересечений, ограничивающая вместе с кратчайшим отрезком $[x(0)x(t_1)]$ в L^2 двугульник P в L^2 с площадью $S(t_1) = \pi$.
- 2) Для каждого $\beta \neq 0$ существует единственное $t_1 > 0$ такое, что выполняется одно из условий а) или б); а) имеет место, только если $|\beta| \geq 3/\sqrt{5}$.

1) а) Ясно, что $\gamma(t_1) \in SO(2)$. Тогда вследствие замечания 2 для того же β и произвольного ϕ_0 отрезок геодезической (0.9) при $t \in [0, t_1]$ соединяет те же точки, что и (0.25). Следовательно каждое продолжение отрезка (0.25) не будет кратчайшей.

Предположим, что есть кратчайшая $\gamma_2(t)$, $0 \leq t \leq t_2 < t_1$, в $(SO(2, 1), d)$, соединяющая точки $\gamma(0) = e$ и $\gamma(t_1)$. Тогда проекция $x_2(t) = p(\gamma_2(t))$, $0 \leq t \leq t_2$, является однократно проходимой окружностью C_2 в L^2 длины $t_2 < t_1$ и поэтому ограничивающей круг с площадью $S(t_2) < S(t_1) \leq \pi$. Следовательно, на основании теоремы Гаусса – Бонне результаты параллельных переносов в L^2 для всех ненулевых касательных векторов вдоль C и C_2 будут разными. Вследствие геометрической интерпретации геодезических в $(SO(2, 1), d)$, $\gamma_2(t_2) \neq \gamma(t_1)$, противоречие.

б) Пусть P' — симметричный двуугольнику P относительно отрезка $x(0)x(t_1)$ двуугольник. Так как $S(t_1) = \pi$, то вследствие теоремы Гаусса – Бонне результаты параллельных переносов в L^2 касательных векторов вдоль ограничивающих P и P' замкнутых контуров при прохождении этих контуров в противоположных направлениях будут одинаковы. Поэтому на основании замечаний 1 и 2 и геометрической интерпретации геодезических в $(SO(2, 1), d)$ кривая в L^2 , симметричная проекции (0.26) отрезка (0.25) относительно отрезка $x(0)x(t_1)$, представляется в виде $p(\gamma_1(t))$, $0 \leq t \leq t_1$, где γ_1 — некоторая геодезическая в $(SO(2, 1), d)$ такая, что $\gamma_1(0) = \gamma(0)$, $\gamma_1(t_1) = \gamma(t_1)$. Следовательно каждое продолжение отрезка (0.25) не будет кратчайшей.

Предположим, что есть кратчайшая $\gamma_2(t)$, $0 \leq t \leq t_2 < t_1$, в $(SO(2, 1), d)$, соединяющая точки $\gamma(0) = e$ и $\gamma(t_1)$. Тогда вследствие замечаний 1 и 2 можно считать, что кривые (0.26) и $x_2(t) = p(\gamma_2(t))$, $0 \leq t \leq t_2$, лежат по одну сторону от кратчайшей $x(0)x(t_1)$ и соединяют концы этой кратчайшей. Следовательно на основании следствия 1 двуугольник P и двуугольник P_2 , ограниченный кратчайшей $x(0)x(t_1)$ и кривой $x_2(t)$, $0 \leq t \leq t_2$, выпуклые, причем пересечение их границ — кратчайшая $x(0)x(t_1)$ так как $t_2 < t_1$. Поэтому вследствие последнего неравенства кривая $x_2(t)$, $0 < t < t_2$, лежит внутри P и $S(t_2) < S(t_1) = \pi$, где $S(t_2)$ — площадь двуугольника P_2 . Следовательно, на основании теоремы Гаусса – Бонне результаты параллельных переносов в L^2 для всех ненулевых касательных векторов вдоль границ P и P_2 будут разными. Вследствие геометрической интерпретации геодезических в $(SO(2, 1), d)$ $\gamma_2(t_2) \neq \gamma(t_1)$, противоречие.

2) На основании следствия 1 и первого равенства в (0.30) условие а) выполняется только если

$$\beta^2 > 1, \quad S\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2 - 1}}\right) = |\beta| \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2 - 1}} - 2\pi \leq \pi \Leftrightarrow |\beta| \geq \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Если же $0 < |\beta| < \frac{3}{\sqrt{5}}$, то вследствие предложения 4 существует единственное $t_1 > 0$, для которого выполняется условие б).

Далее для каждого числа $\beta \neq 0$ найдем число $t_1 = t_1(\beta)$, удовлетворяющее условиям предложения 5.

II) На основании первой формулы в (0.30) должно быть

$$\pi = |\beta|t_1 - 2\psi, \quad \frac{|\beta|t_1}{2} = \frac{\pi}{2} + \psi, \quad \frac{\pi}{2} < \frac{|\beta|t_1}{2} < \pi. \quad (0.35)$$

Из формул (0.35), (0.23) и последнего равенства в (0.30) находим

$$\sin\left(\frac{|\beta|t_1}{2}\right) = \cos\psi = \frac{\sqrt{1-\beta^2} \operatorname{ch}(t_1 \sqrt{1-\beta^2}/2)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(t_1 \sqrt{1-\beta^2}/2) - \beta^2}}, \quad (0.36)$$

$$-\cos\left(\frac{|\beta|t_1}{2}\right) = \sin\psi = \frac{|\beta| \operatorname{sh}(t_1 \sqrt{1-\beta^2}/2)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(t_1 \sqrt{1-\beta^2}/2) - \beta^2}}, \quad (0.37)$$

III) На основании (0.21), первой и последней формул в (0.30) должны быть те же формулы (0.35) при $|\beta| = 1$ и

$$\sin\left(\frac{t_1}{2}\right) = \cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1 + (t_1/2)^2}}. \quad (0.38)$$

$$-\cos\left(\frac{t_1}{2}\right) = \sin\psi = \frac{t_1/2}{\sqrt{1 + (t_1/2)^2}}, \quad \frac{\pi}{2} < \frac{t_1}{2} < \pi. \quad (0.39)$$

IV) Наименьшее положительное t_0 , при котором $x(t_0) = w_0$, равно $2\pi/\sqrt{\beta^2 - 1}$. При этом $\lim_{t \rightarrow t_0-0} \psi(t) = \pi$ и вследствие (0.30), $S(t_0) = (2\pi|\beta|/\sqrt{\beta^2 - 1}) - 2\pi$. $S(t_0) = 2\pi$ (соответственно $S(t_0) = \pi$) когда $|\beta| = 2/\sqrt{3}$ (соответственно $|\beta| = 3/\sqrt{5}$). Рассмотрим три случая:

- а) $|\beta| \geq 3/\sqrt{5}$, б) $1 < |\beta| \leq 2/\sqrt{3}$, , в) $2/\sqrt{3} < |\beta| < 3/\sqrt{5}$.
 а) В этом случае вследствие предложения 5

$$t_1 = 2\pi/\sqrt{\beta^2 - 1}. \quad (0.40)$$

б) В этом случае найдется единственное t_1 такое, что $0 < t_1 \leq \pi/\sqrt{\beta^2 - 1}$ и $S(t_1) = \pi$. Тогда вследствие (0.22) и предложения 4

$$\pi = |\beta|t_1 - 2\psi, \quad 0 < \psi \leq \pi/2, \quad \frac{\pi}{2} < \frac{|\beta|t_1}{2} = \frac{\pi}{2} + \psi \leq \pi. \quad (0.41)$$

$$\sin\left(\frac{|\beta|t_1}{2}\right) = \cos\psi = \frac{\sqrt{\beta^2 - 1} \cos(t_1 \sqrt{\beta^2 - 1}/2)}{\sqrt{\beta^2 - \cos^2(t_1 \sqrt{\beta^2 - 1}/2)}}, \quad (0.42)$$

$$-\cos\left(\frac{|\beta|t_1}{2}\right) = \sin\psi = \frac{|\beta| \sin(t_1 \sqrt{\beta^2 - 1}/2)}{\sqrt{\beta^2 - \cos^2(t_1 \sqrt{\beta^2 - 1}/2)}}. \quad (0.43)$$

с) Получаем те же формулы (0.42), (0.43), но на этот раз

$$\pi/\sqrt{\beta^2 - 1} < t_1 < 2\pi/\sqrt{\beta^2 - 1}, \quad \pi/2 < \psi < \pi, \quad \pi < \frac{|\beta|t_1}{2} = \frac{\pi}{2} + \psi < \frac{3\pi}{2}. \quad (0.44)$$

Теорема 6

Пусть (0.25), где $t_1 = t_1(|\beta|)$, — непродолжаемая кратчайшая в $(SO(2, 1), d)$. Тогда $t_1(|\beta|)$ — строго убывающая функция от $|\beta| > 0$.

Proof. Вследствие п. а) предложения 5 и формулы (0.40) это утверждение верно при $|\beta| \geq 3/\sqrt{5}$. Если $0 < |\beta| < 3/\sqrt{5}$, то верна вторая формула в (0.35). Вследствие нее и (0.33)

$$t_1 + |\beta| \frac{dt_1}{d|\beta|} = 2\psi'(t_1) \cdot \frac{dt_1}{d|\beta|} = \frac{2|\beta|}{n+2} \cdot \frac{dt_1}{d|\beta|}, \quad t_1 = \frac{-|\beta|n}{n+2} \cdot \frac{dt_1}{d|\beta|}.$$

Отсюда и из вторых формул в (0.21), (0.22), (0.23) вытекает, что $dt_1/d|\beta| < 0$, так как $0 < t_1 < 2\pi/\sqrt{\beta^2 - 1}$, если $1 < |\beta| < 3/\sqrt{5}$ и, следовательно, теорема. .

Теорема 7

Для любого элемента $g \in (SO(2, 1), d)$, $C(g) = gC(e)$ и $S(g) = gS(e)$. Кроме того, $S(g) \subset C(g)$,

$$C(e) = \{\gamma_\beta(t_1(\beta)) : \beta \in \mathbb{R}\}, \quad (0.45)$$

$$S(e) = \{\gamma_\beta(t_1(\beta)) : \beta^2 \geq 1/3\} = SO(2) \setminus \{e\}; \quad (0.46)$$

$$\overline{S(e)} = S(e) \cup \{e\} = SO(2), \quad (0.47)$$

$\overline{S(e)}$ диффеоморфно окружности S^1 ;

$$\overline{C(e) \setminus S(e)} = (C(e) \setminus S(e)) \cup \left\{ \gamma_\beta(t_1(\beta)) = \gamma_{-\beta}(t_1(-\beta)) : \beta = \frac{3}{\sqrt{5}} \right\}, \quad (0.48)$$

$\overline{C(e) \setminus S(e)}$ диффеоморфно вещественной проективной плоскости с удаленной точкой $RP^2 \setminus \{\infty\}$; $C(e)$ гомеоморфно $(RP^2 \setminus \{\infty\}) \cup \mathbb{R}$, где $(RP^2 \setminus \{\infty\}) \cap \mathbb{R}$ одноточечно; $\overline{C(e)}$ гомеоморфно $(RP^2 \setminus \{\infty\}) \cup S^1$, где $(RP^2 \setminus \{\infty\}) \cap S^1$ одноточечно.

- [1] *Берестовский В.Н.*, Универсальные методы поиска нормальных геодезических на группах Ли с левоинвариантной субримановой метрикой // принята к печати в Сиб. матем. журн.
- [2] *Гантмахер Ф.Р.*, Теория матриц. – М.: Наука, 1967.
- [3] *Погорелов А.В.*, Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1969.
- [4] *Берестовский В.Н., Зубарева И.А.*, Формы сфер специальных неголомомных левоинвариантных метрик на некоторых группах Ли // Сиб. матем. журн. 2001, Т. 42, №4, С. 731-748.
- [5] *Berestovskii V.N., Guijarro L.*, A metric characterization of Riemannian submersions // Ann. Global Anal. Geom. – 2000. – Vol. 18, №6. P. 577-588.