Многоугольники и многогранники над конечными полями

Тамара Лавшук, НГУ

Научный руководитель: д-р физ.-мат. наук, проф.

Медных Александр Дмитриевич

Новосибирск 2014

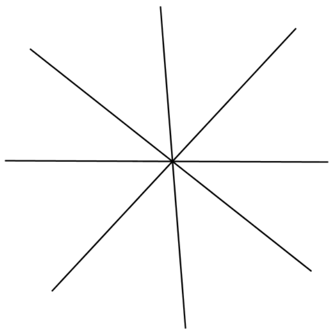
Регулярная звезда порядка *n*

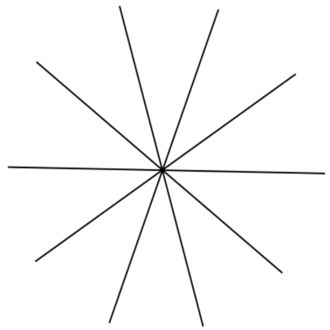
Определение:

Регулярная звезда порядка n – это набор различных попарно непараллельных линий $[l_{0,} l_{1,} l_{2} \ldots l_{n-1}]$ таких, что $l_{k+1} = \Sigma_{l_k}(l_{k-1})$ для всех k, с условием, что $l_{k+1} = l_{k+n}$ для всех k и условиями:

$$\left[l_0, l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}\right] \equiv \left[l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}, l_0\right]$$

$$\left[l_0, l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}\right] \equiv \left[l_{n-1}, l_{n-2}, \ldots, l_1, l_0\right]$$





Правильный *n*-угольник

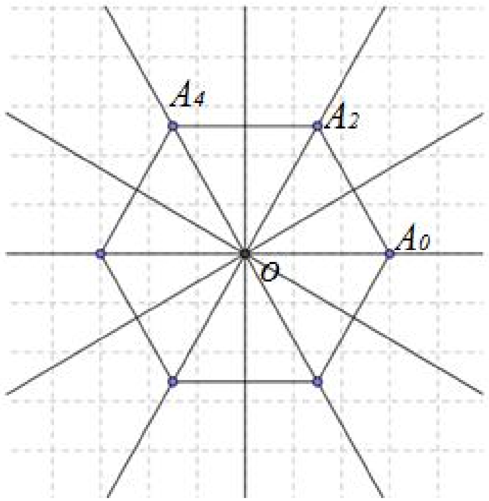
Определение:

Правильным *n*-угольником называется n-угольник, полученный с помощью регулярной звезды по следующей схеме:

Пусть $[l_{0,} l_{1,} l_{2\ldots} l_{n-1}]$ регулярная звезда порядка *n* с общим пересечением *O*.

Выберем точку A_0 на l_0, отличную от *O*. Определим последовательность точек: A_0, $A_2 = \sigma_{L_1}(A_0)$, $A_4 = \sigma_{L_3}(A_2)$, $A_6 = \sigma_{L_5}(A_4)$ и т. д.

Соединяем полученные точки прямыми.



Правильный многоугольник над конечным полем F_P

Определение **:**

Если набор линий $[l_{0,}\ l_{1,}l_{2\dots}\ l_{n-1}]$ является регулярной звездой порядка n с общей точкой пересечения O, тогда полученное по описанной схеме множество из n точек (назовем их вершинами) с условием, что квадраты расстояний между соседними точками сравнимы по модулю p, и прямых, проходящих через эти точки (назовем их сторонами), называется правильным многоугольником над конечным полем F_P.

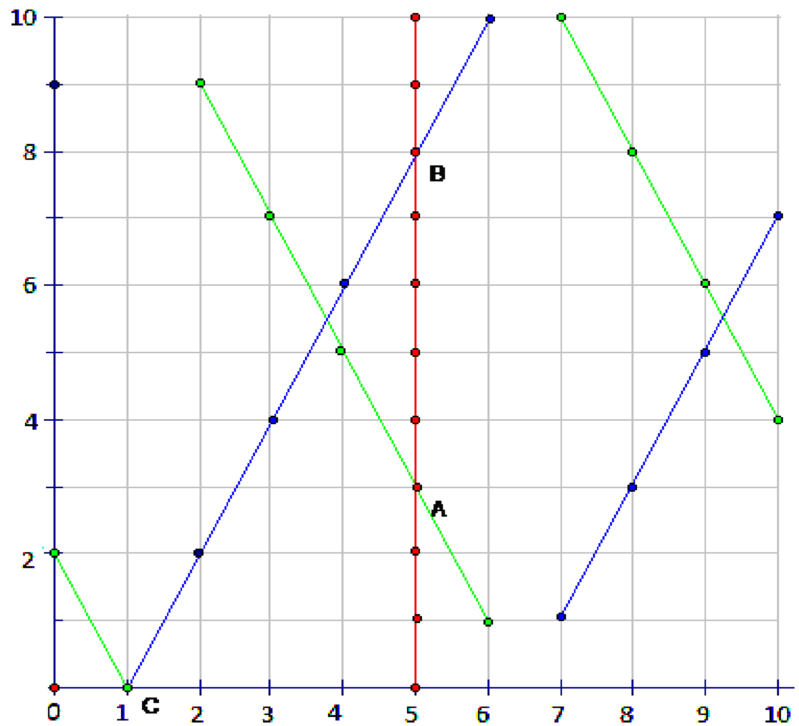
Правильный треугольник над конечным полем F_P

Пусть ΔABC правильный треугольник с координатами вершин:

$$A \equiv \left\{-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right\},\ B \equiv \left\{-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\ C \equiv \{1;\ 0\}$$

Пересчитаем координаты вершин правильного треугольника над F_{11} :

$$A \equiv \{5;\ 3\},\ B \equiv \{5;\ 8\},\ C \equiv \{1,\ 0\}.$$



Теорема (звезда порядка три):

Регулярная звезда порядка три существует именно тогда, когда число *3* является ненулевым квадратом.

Теорема (звезда порядка пять):

Регулярная звезда порядка пять существует именно тогда , когда есть ненулевое число r, удовлетворяющее условиям: $r^2=5$ и $2\cdot(5-r)$ является квадратом.

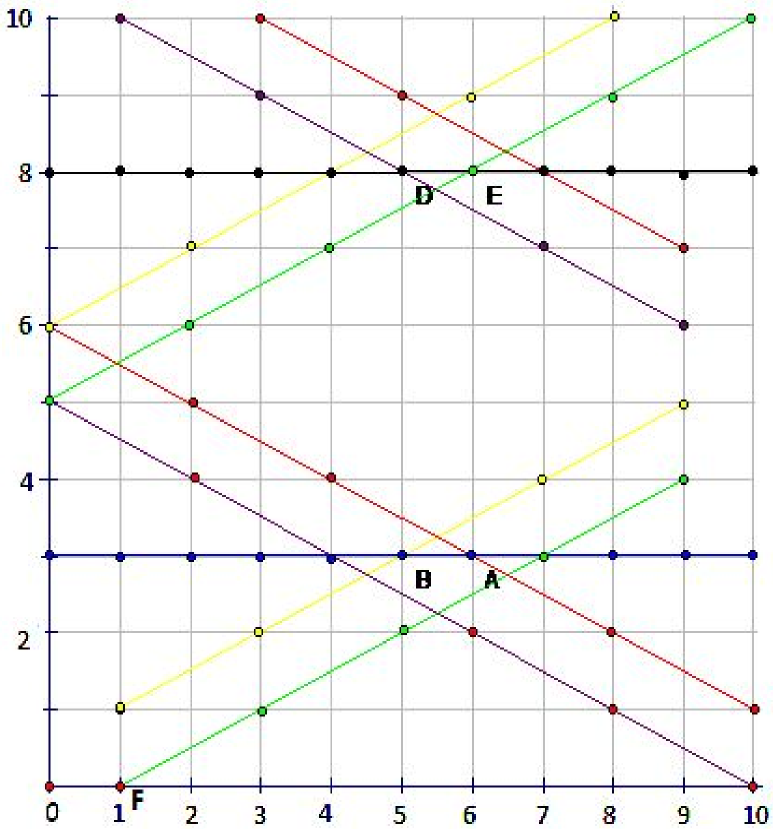
Теорема (звезда порядка семь):

Регулярная звезда порядка семь существует именно тогда, когда есть ненулевое число *s*, для которого :

$$7-56s+112s^2-54s^3=0$$

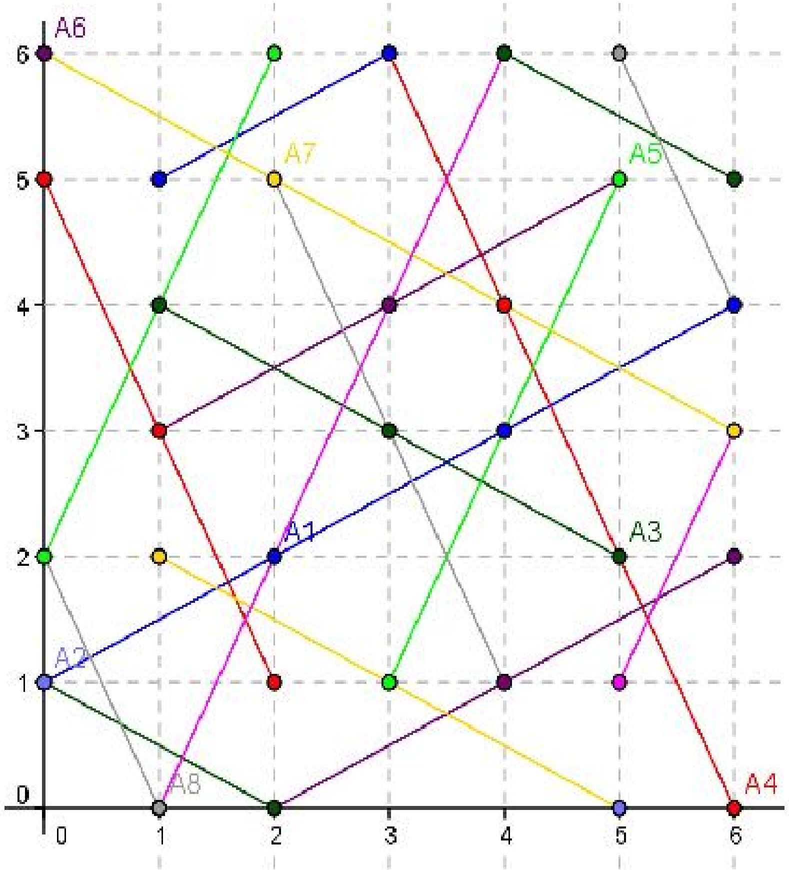
и такое, что *s(1-s)* является квадратом.

Правильный шестиугольник над F_{11}



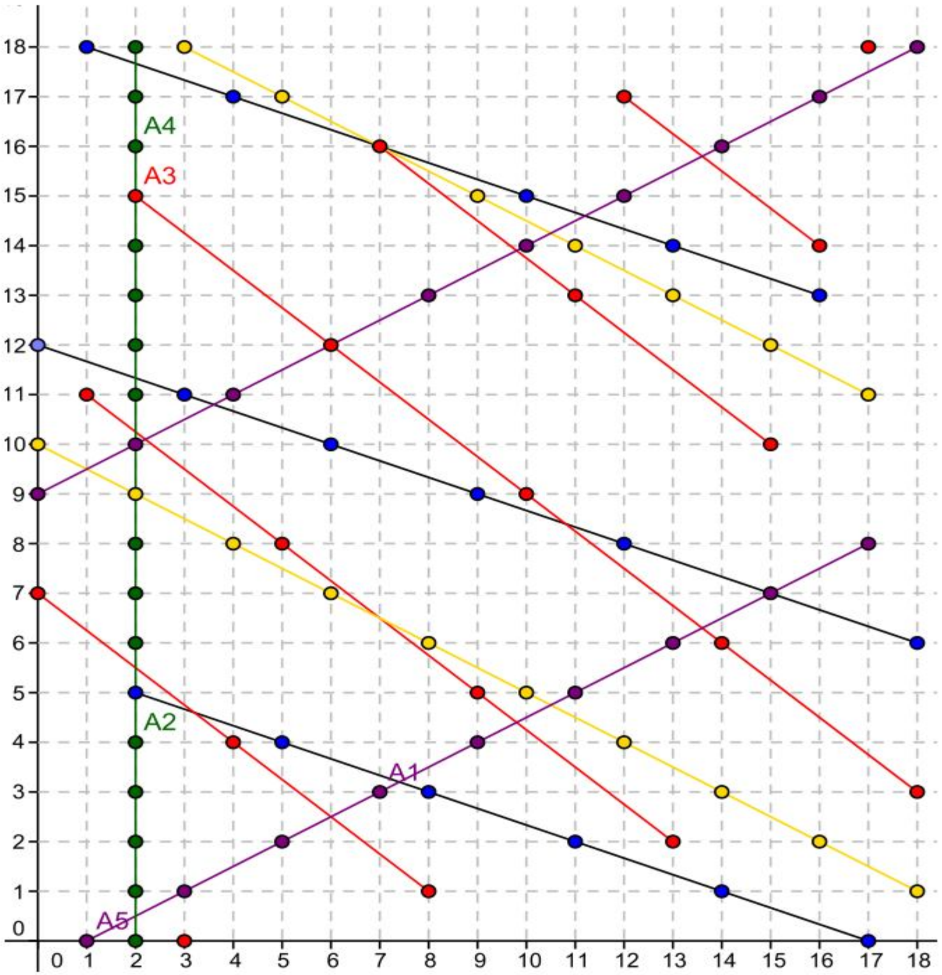
a)

Правильный восьмиугольник над F_7

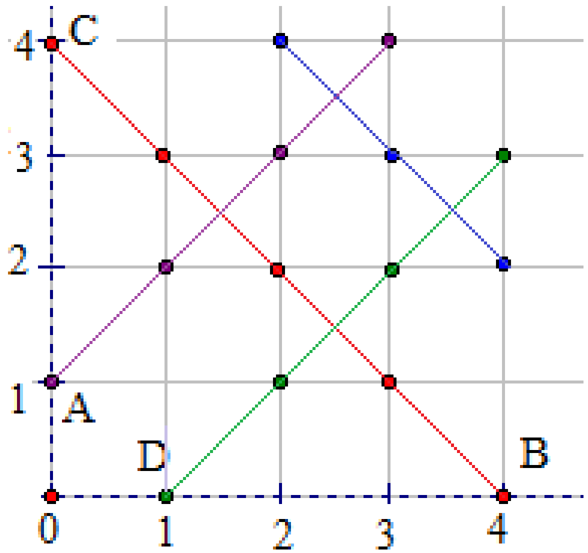


b)

Правильный пятиугольник над F_{19}



Квадрат над F_5



Неправильный треугольник с координатами вершин

$$A \equiv \{6;\ 2\},\ B \equiv \{1;\ 0\},\ C \equiv \{6;\ 11\}.$$

$$|AB|^2 = 29 \quad |BC|^2 = 146 \quad |AC|^2 = 81$$

Координаты треугольника ABC над полем F_{13} не изменятся.

$$|AB|^2 \equiv 3 \quad |BC|^2 \equiv 3 \quad |AC|^2 \equiv 3$$

ABC над F_{13} является правильным .

Правильные многогранники в F_P^3

Правильный тетраэдр в F_P^3

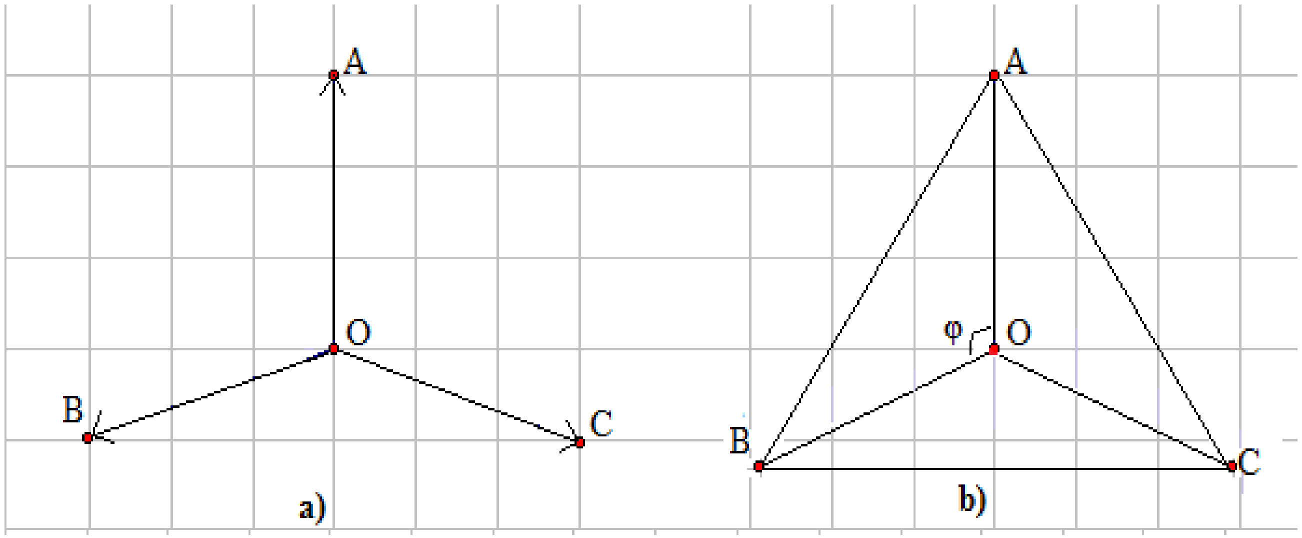
Определение:

Правильным тетраэдром в F_P^3 будем называть множество, состоящее из 4-х правильных треугольников над F_P, попарно пересекающихся по общей стороне.

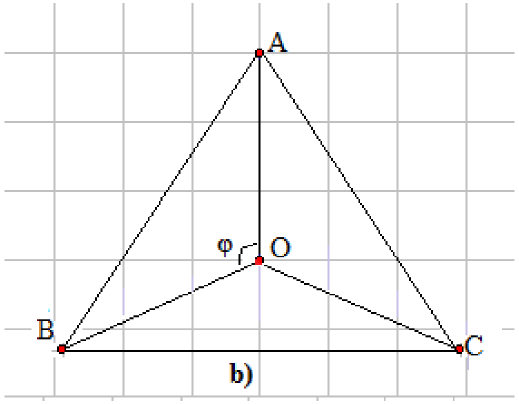
Теорема 1:

Правильный тетраэдр реализуется над любым конечным полем F_P

Для реализации правильного треугольника над полем F_P выбираем такое p, чтобы число 3 являлось ненулевым квадратом некоторого числа по модулю p.

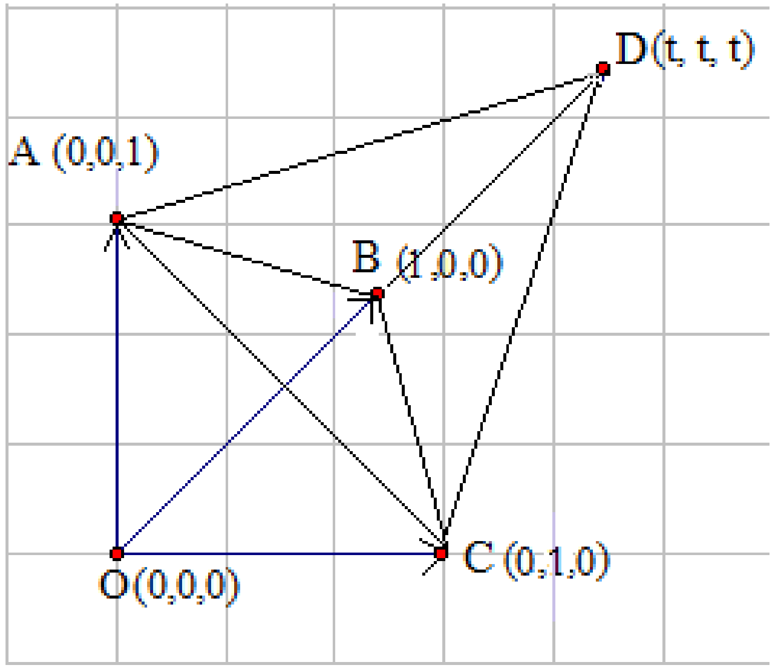


$$\begin{cases}(\overline{OA})^2=(\overline{OB})^2=(\overline{OC})^2\\ \overline{OA}\cdot\overline{OB}=\overline{OB}\cdot\overline{OC}=\overline{OA}\cdot\overline{OC}\\ \overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}(\overline{OA})^2=(\overline{OB})^2\\ \overline{OA}\cdot\overline{OB}=-\dfrac{1}{2}(\overline{OA})^2\end{cases}$$



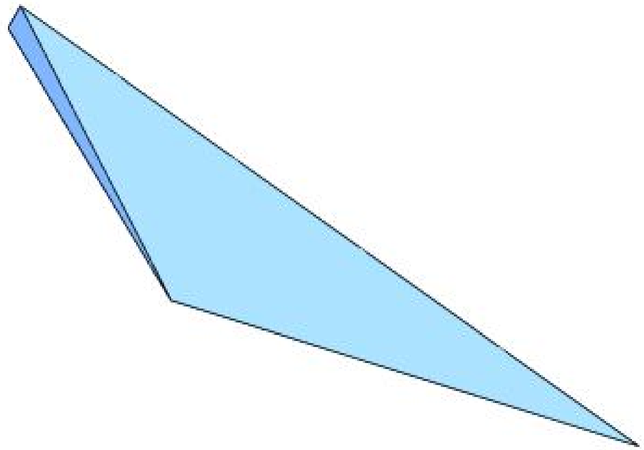
$$\overline{OA}\,\{x;\,y\},\qquad \overline{OB}\,\{s;\,t\}$$

$$\begin{cases}x^2+y^2=s^2+t^2\\ xs+yt=-\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(-s-\sqrt{3}t)\\ y=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}s-t)\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(-s+\sqrt{3}t)\\ y=\dfrac{1}{2}(-t-\sqrt{3}s)\end{cases}\end{array}\right.$$

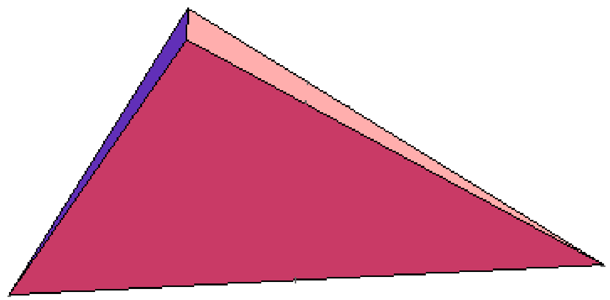


$$D\{1;1;1\} \text{ или } D\left\{-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right\}$$

Правильный тетраэдр в F_{47}^3



Правильный тетраэдр в F_{23}^3



Гексаэдр в F_P^3

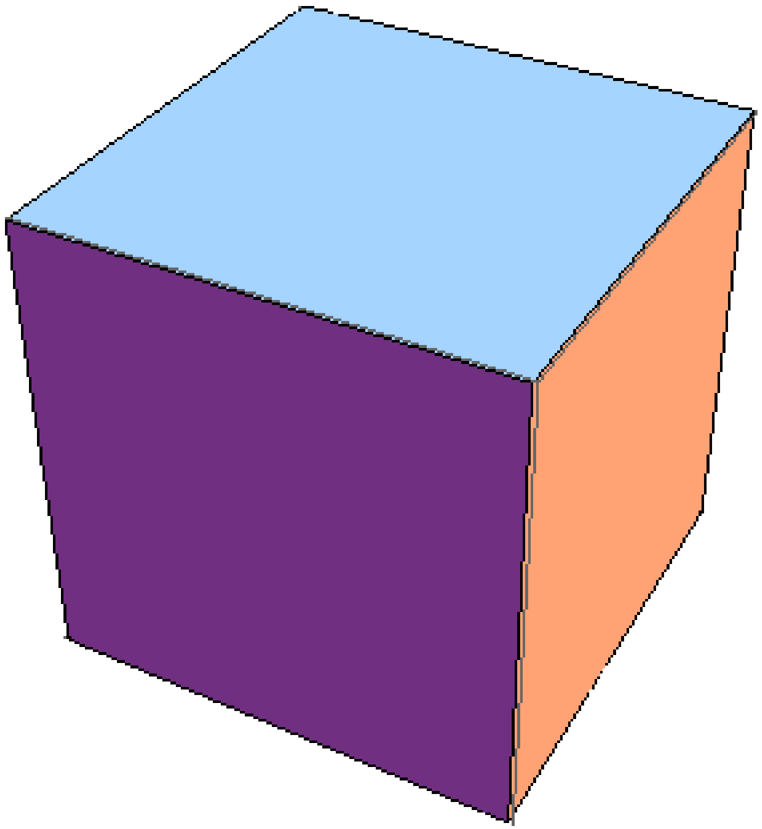
<u>Определение:</u>

Гексаэдром в F_P^3 будем называть множество точек и прямых, образующих 6 квадратов над F_P, любые два из которых пересекаются по общей стороне и двум общим вершинам или не пересекаются. При этом каждая вершина таких квадратов является вершиной *2-х* других.

Теорема 2:

Гексаэдр реализуется над любым конечным полем F_P

Гексаэдр в F_P^3



Октаэдр в F_P^3

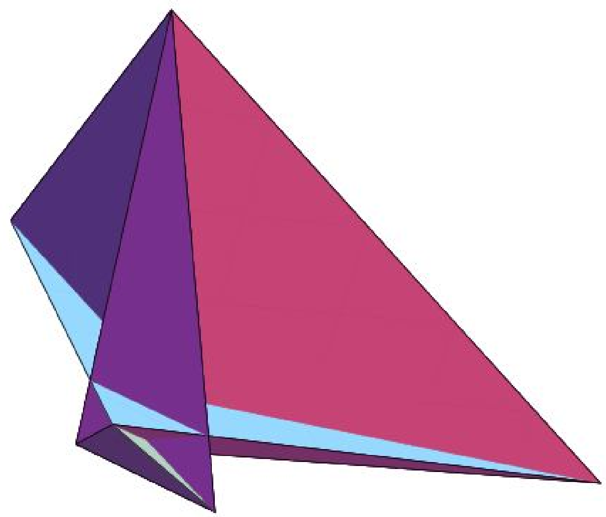
Определение:

Октаэдром в F_P^3 будем называть множество точек и прямых, образующих *8* правильных треугольников над F_P, любые два из которых пересекаются по общей стороне и двум общим вершинам или не пересекаются. При этом каждая вершина таких треугольников является вершиной *3-х* других.

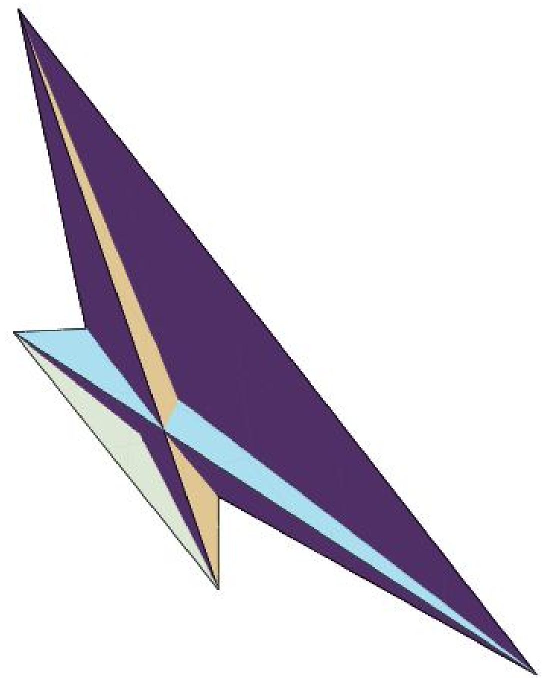
Теорема 3:

Октаэдр реализуется над любым конечным полем F_P

Октаэдр в F_{17}^3



Октаэдр в F_{41}^3



Додекаэдр в F_P^3

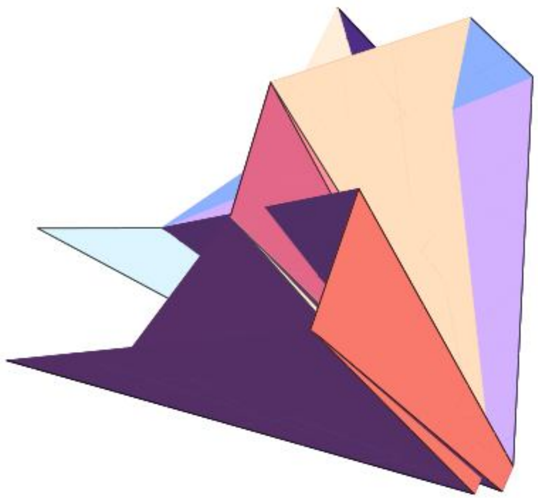
Определение:

Додекаэдром в F_P^3 будем называть множество точек и прямых, образующих *12* правильных пятиугольников над F_P, любые два из которых пересекаются по общей стороне и двум общим вершинам или не пересекаются. При этом каждая вершина таких пятиугольников является вершиной *2-х* других.

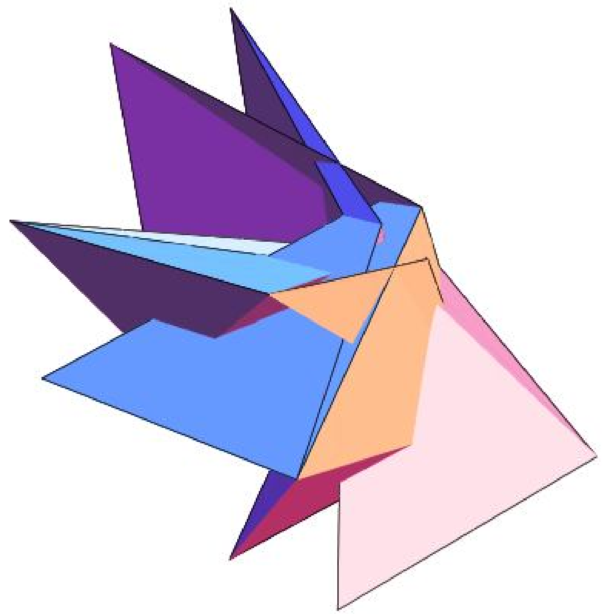
Теорема 4:

Додекаэдр реализуется над конечным полем F_P при $p \equiv \{0, 1, 4\} (mod 5)$

Додекаэдр в F_{19}^3



Додекаэдр в F_{59}^3



Икосаэдр в F_P^3

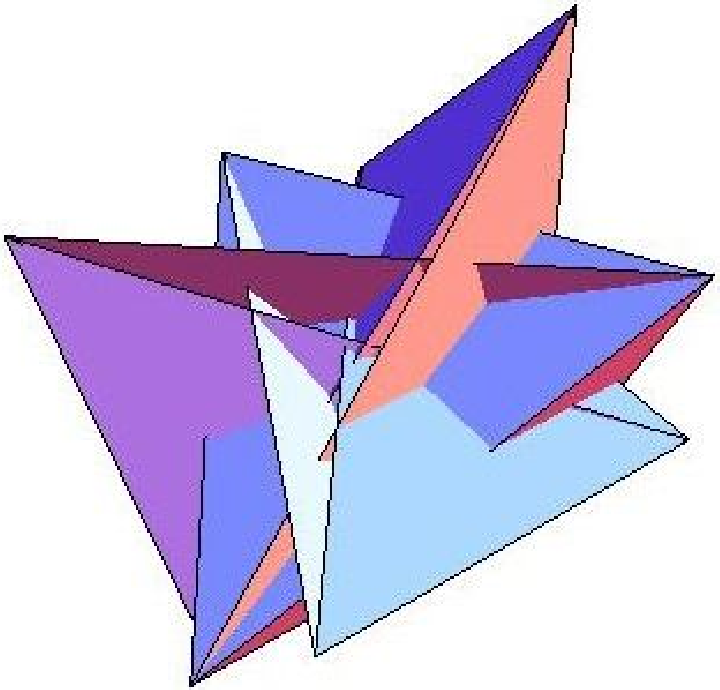
Определение:

Икосаэдром в F_P^3 будем называть множество точек и прямых, образующих *20* правильных треугольников над F_P, любые два из которых пересекаются по общей стороне и двум общим вершинам, либо имеют одну общую вершину, либо не пересекаются. При этом каждая вершина таких треугольников является вершиной *4-х* других.

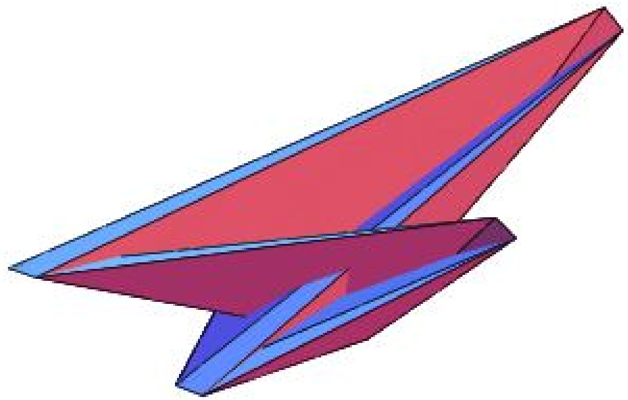
Теорема 5:

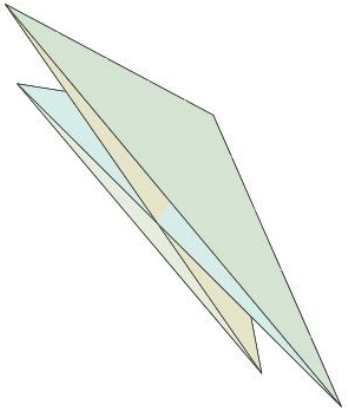
Икосаэдр реализуется над конечным полем F_P при $p \equiv \{0,\ 1,\ 4\}(mod 5)$

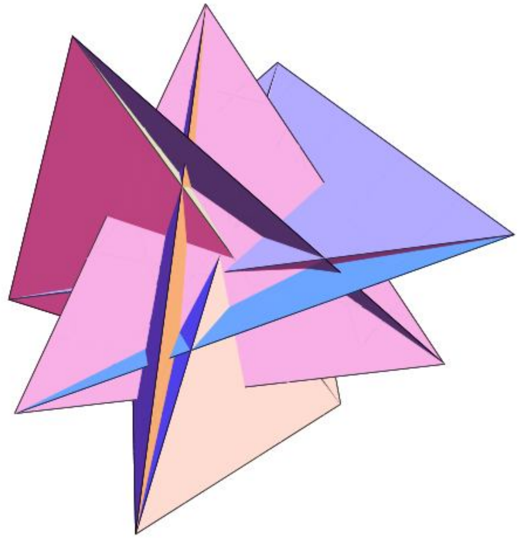
Икосаэдр в F_{71}^{3}



Икосаэдр в F_{29}^{3}







Спасибо за внимание!