Изоморфизм изоспектральных графов рода три

Ухарова Е. С.

Новосибирский государственный университет

Новосибирск, 2014

Род графа

Будем рассматривать неориентированные конечные мультиграфы (т.е. графы с петлями и кратными ребрами).

- Обозначим через $V(G)$ и $E(G)$ множества вершин и ребер графа G соответственно.
- Определим род графа G как $g = |E(G)| - |V(G)| + 1$.
- Мостом графа G называется ребро, удаление которого увеличивает число компонент связности графа.

Полином Лапласа

- Для любых $u, v \in V(G)$, обозначим через a_{uv} число ребер между u и v.
- Матрица $A = A(G) = [a_{uv}], u, v \in V(G)$ называется матрицей смежности графа G.
- Пусть $d(v)$ - валентность (или степень) вершины $v \in V(G)$, $d(v) = \sum_u a_{uv}$.
- $D = D(G)$ - диагональная матрица, образованная элементами $d_{vv} = d(v), v \in V(G)$.
- Матрица $L = L(G) = D(G) - A(G)$ называется матрицей Лапласа графа G. Обозначим за $\mu(G, x)$ характеристический полином матрицы $L(G)$ и будем называть его полиномом Лапласа графа G.

Определение

Два графа G и H называются изоспектральными по Лапласу, если их полиномы Лапласа совпадают: $\mu(G, x) = \mu(H, x)$.

Полином Лапласа

А. К. Кельманс (1967) дал комбинаторную интерпретацию всех коэффициентов многочлена $\mu(X, x)$.

Теорема (Кельманс, 1967)

Пусть $\mu(X, x) = x^n - c_1 x^{n-1} + \ldots + (-1)^i c_i x^{n-i} + \ldots + (-1)^{n-1} c_{n-1} x$. Тогда $c_i = \sum\limits_{S \subset V, |S| = n-i} T(X_S)$, где $T(H)$ – число остовных деревьев графа H, а граф X_S получен из X отождествлением всех точек множества S.

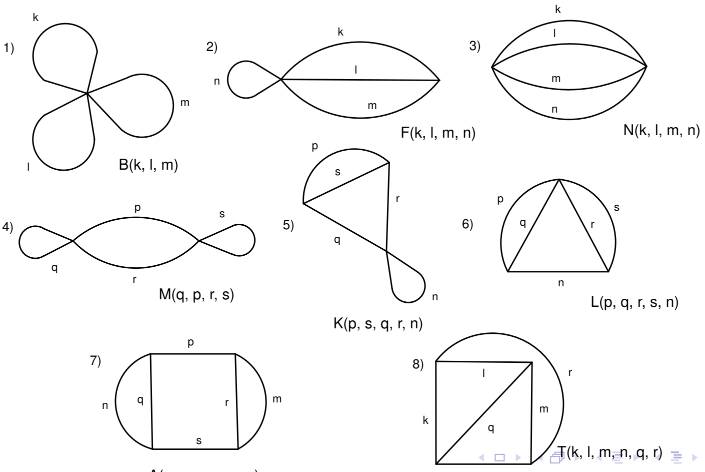
Следствие

$n = V(G), c_1 = 2E(G), c_{n-1} = V(G)T(G)$, $c_{n-2} = \sum\limits_{S \subset V, |S| = 2} T(G_S)$, где граф G_S получен из графа G отождествлением двух точек.

Классификация графов рода три

Теорема

Пусть G - связный конечный мультиграф рода три без мостов. Тогда G гомеоморфен графу одного из восьми типов.



Изоморфизм изоспектральных графов рода три

Гипотеза

Два графа рода три, не имеющие мостов и принадлежащие одному типу, изоспектральны тогда и только тогда, когда они изоморфны.

Проверка гипотезы для графа B(k, l, m)

Два графа $B(k, l, m)$ и $B(k', l', m')$ изоморфны $\Leftrightarrow$ неупорядоченные тройки $\{k, l, m\}$ и $\{k', l', m'\}$ совпадают.

Это условие эквивалентно равенствам

- $\sigma_1(k, l, m) = \sigma_1(k', l', m')$
- $\sigma_2(k, l, m) = \sigma_2(k', l', m')$
- $\sigma_3(k, l, m) = \sigma_3(k', l', m')$,

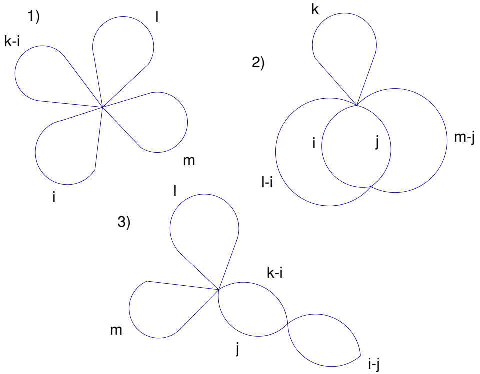
где $\sigma_1(x, y, z) = x + y + z$; $\sigma_2(x, y, z) = xy + yz + xz$; $\sigma_3(x, y, z) = xyz$

Пусть $B = B(k, l, m)$ и
$\mu(B, x) = x^n - c_1 x^{n-1} + \ldots + (-1)^i c_i x^{n-i} + \ldots + (-1)^{n-1} c_{n-1} x$ - полином Лапласа графа B.

Число вершин, граней и остовных деревьев графа B определяются формулами:

- $V(B) = k + l + m - 2$
- $E(B) = k + l + m$
- $T(B) = klm$

Коэффициент c_{n-2} для графа B



Число остовных деревьев для полученных типов будет вычисляться по следующим формулам:

- $H1[k,l,m] = \sum_{i=1}^{k-1} iklm$
- $T1 = H1[k,l,m] + H1[l,m,k] + H1[m,k,l]$

- $H2[k,l,m] = \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{j=1}^{m-1} k(mi(l-i) + lj(m-j))$
- $T2 = H2[k,l,m] + H2[l,m,k] + H2[m,k,l]$

- $H3[k,l,m] = \sum_{i=2}^{k-1} \sum_{j=1}^{i-1} ml(i-j)(k-i+j)$
- $T3 = H3[k,l,m] + H3[l,m,k] + H3[m,k,l]$

Т.к. графы B и B' изоспектральны

- $n = V(B) = V(B') = n' \Rightarrow k + l + m = k' + l' + m' \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_1^{'}$
- $c_1(B) = c_1(B') \Rightarrow V(B)T(B) = V(B')T(B') \Rightarrow (\sigma_1 - 2)\,\sigma_3 = \left(\sigma_1^{'} - 2\right)\sigma_3^{'}$
  $\Rightarrow \sigma_3 = \sigma_3^{'}$
- Равенство $\sigma_2 = \sigma_2^{'}$ можно доказать через непосредственное вычисление коэффициента c_{n-2}.

Для графа B

$$c_{n-2} = 1/12klm(12 - 5k - 4k^2 + k^3 - 5l + 2k^2 l - 4l^2 + 2kl^2 + l^3 - 5m + 2k^2 m + 2l^2 m - 4m^2 + 2km^2 + 2lm^2 + m^3)$$

Получившийся результат можно выразить в терминах симметрических полиномов:

$$c_{n-2} = 1/12(12\sigma_3 - 5\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_1^2\sigma_3 + \sigma_1^3\sigma_3 + 8\sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 3\sigma_3^2)$$

Разрешив полученное уравнение относительно σ_2 используя полученные ранее равенства

- $c_{n-2}(B) = c_{n-2}(B')$
- $\sigma_1 = \sigma_1^{'}$
- $\sigma_3 = \sigma_3^{'}$

получим искомое равенство $\sigma_2 = \sigma_2^{'}$.

Так как все три симметрических полинома совпадают, а, значит, совпадают неупорядоченные тройки (k, l, m) и $(k', l', m') \implies$ графы B и B' изоморфны по спектру.