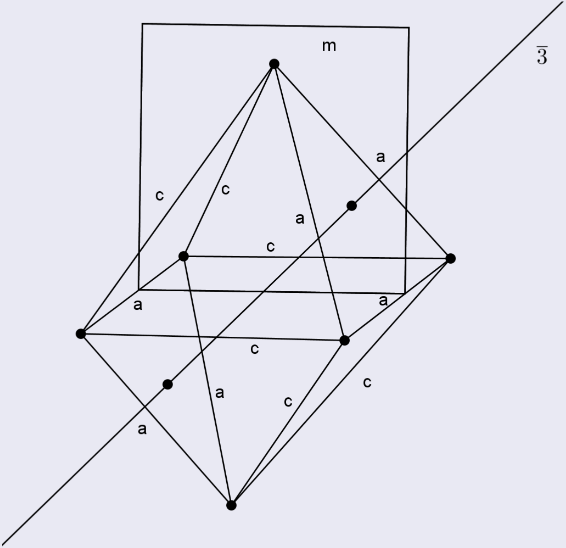
ЕВКЛИДОВ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ОКТАЭДРЫ С $\overline{3}m$-СИММЕТРИЕЙ

Кудина Екатерина Сергеевна

Горно-Алтайский государственный университет

Октаэдр с $\overline{3}m$ симметрией , *согласно статье Галиулина, Михалева и Сабитова [1].*



Евклидов случай

В случае такой симметрии многочлен $Q(v)$ для объема октаэдра V [1] имеет вид

$$Q(v) = v^8 + (4A^3 - 12CA^2)v^7,$$

где $v = 36V^2$, $A = a^2$, $C = c^2$.

Евклидов случай

Зададим октаэдр следующим образом: возьмем начальную точку $(p;q;r)$. *И начнем ее вращать с помощью матрицы поворота [2, с. 101]*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi}{3} & -\sin\dfrac{2\pi}{3} & 0 \\ \sin\dfrac{2\pi}{3} & \cos\dfrac{2\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

С учетом симметрии, октаэдр задается следующими точками:

$$(p,q,r); \left(-\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{3}q}{2}, \frac{\sqrt{3}p}{2}-\frac{q}{2}, r\right); \left(-\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{3}q}{2}, -\frac{\sqrt{3}p}{2}-\frac{q}{2}, r\right);$$

$$(-p,-q,-r); \left(\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{3}q}{2}, -\frac{\sqrt{3}p}{2}+\frac{q}{2}, -r\right); \left(\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{3}q}{2}, \frac{\sqrt{3}p}{2}+\frac{q}{2}, -r\right).$$

Евклидов случай

Векторы нормали граней тетраэдра

$$\left(0,0,\frac{3\sqrt{3}p^2}{2}\right);\left(\sqrt{3}pr,-3pr,\frac{1}{2}\sqrt{3}p^2\right);\left(-\sqrt{3}pr,-3pr,-\frac{1}{2}\sqrt{3}p^2\right);$$
$$\left(0,0,-\frac{3\sqrt{3}p^2}{2}\right);\left(-\sqrt{3}pr,3pr,-\frac{1}{2}\sqrt{3}p^2\right);\left(\sqrt{3}pr,3pr,\frac{1}{2}\sqrt{3}p^2\right).$$

Косинусы двугранных углов октаэдра

$$\cos^2\alpha=\frac{p^2}{p^2+16r^2}=-\frac{a^2}{3(a^2-4c^2)};$$
$$\cos\gamma=\frac{p^2-8r^2}{p^2+16r^2}=-\frac{a^2-2c^2}{a^2-4c^2}.$$

Гиперболический случай

Рассмотрим проективную модель пространства Лобачевского [2, с. 33] С учетом симметрии, октаэдр задается следующими точками:

$$(p, 0, r, 1); \left(-\frac{p}{2}, \frac{\sqrt{3}p}{2}, r, 1\right); \left(-\frac{p}{2}, -\frac{\sqrt{3}p}{2}, r, 1\right);$$

$$(-p, 0, -r, 1); \left(\frac{p}{2}, -\frac{\sqrt{3}p}{2}, -r, 1\right); \left(\frac{p}{2}, \frac{\sqrt{3}p}{2}, -r, 1\right).$$

Гиперболический случай

Векторы нормали граней тетраэдра

$$\left(0,0,\frac{1}{r},1\right);\left(\frac{2}{3p},-\frac{2}{\sqrt{3}p},\frac{1}{3r},1\right);\left(\frac{2}{3p},\frac{2}{\sqrt{3}p},\frac{1}{3r},1\right);$$

$$\left(0,0,-\frac{1}{r},1\right);\left(-\frac{2}{3p},\frac{2}{\sqrt{3}p},-\frac{1}{3r},1\right);\left(-\frac{2}{3p},-\frac{2}{\sqrt{3}p},-\frac{1}{3r},1\right).$$

Косинусы двугранных углов октаэдра

$$\cos^2\alpha=\frac{p^2(-1+3r^2)^2}{(-1+r)(1+r)(-p^2-16r^2+9p^2r^2)}=$$

$$=-\frac{(1+\operatorname{ch}a)(-1+\operatorname{ch}a+\operatorname{ch}c)^2}{(-1+2\operatorname{ch}a)(-1+\operatorname{ch}a+2\operatorname{ch}^2c)};$$

$$\cos\gamma=\frac{p^2-8r^2+9p^2r^2}{-p^2-16r^2+9p^2r^2}=\frac{-1+\operatorname{ch}c+\operatorname{ch}a\operatorname{ch}c+\operatorname{ch}^2c}{-1+\operatorname{ch}a+2\operatorname{ch}^2c}.$$

Литература

1. Р.В.Галиулин, С.Н.Михалев, И.Х.Сабитов, "Некоторые приложения формулы для объема октаэдра", Математические заметки, Vol. 76, No. 1, 27–43 (2001).
2. Д.В.Алексеевский, Э.Б.Винберг, А.С.Солодовников, Геометрия пространства постоянной кривизны, Итоги науки и техники. Фундаментальные направления, Vol. 1, (1988).