М. П. Овчинцев, Наилучший метод приближения регулярных ограниченных функций в кольце по их значениям в заданных точках,
Изв. вузов. Матем., 1989, номер 5, 32–39

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1989 МАТЕМАТИКА № 5 (324)

М. П. Овчинцев

УДК 517.5

НАИЛУЧШИЙ МЕТОД ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕГУЛЯРНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ В КОЛЬЦЕ ПО ИХ ЗНАЧЕНИЯМ В ЗАДАННЫХ ТОЧКАХ

Введение

Пусть $L, l_1, \ldots, l_n$ — линейные функционалы, заданные на вещественном линейном пространстве X. Пусть W — некоторое множество, лежащее в X. В работах [1], [2] была поставлена задача о наилучшем приближении линейного функционала L по значениям функционалов $l_1, \ldots, l_n$ на множестве $W \subset X$. Если $S(x_1, \ldots, x_n)$ — любая действительная функция n действительных переменных, то погрешностью метода приближения S функционала L по значениям функционалов $l_1, \ldots, l_n$ на множестве W называлась величина

$$r_n(S) = \sup_{x \in W} | L(x) - S(l_1(x), \ldots, l_n(x)) |.$$

Метод S_0 назывался наилучшим методом приближения, если $r_n(S_0) = \inf_S r_n(S)$, где inf берется по всем функциям $S(x_1, \ldots, x_n)$.

В работах [1], [2] было доказано, что в случае, когда W — выпуклое и центрально-симметричное множество с центром симметрии 0, среди наилучших методов приближения существует линейный $S_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j l_j(x)$. Кроме того, было доказано, что погрешность наилучшего метода приближения равна

$$r_n(L, l_1, \ldots, l_n) = \sup_{\substack{x \in W \\ l_1(x) = \ldots = l_n(x) = 0}} | L(x) |. \tag{1}$$

В работе [3] постановка задачи и результаты были обобщены на случай комплексного линейного пространства X, комплексных линейных функционалов $L, l_1, \ldots, l_n$ и выпуклого уравновешенного множества W. Основным предметом изучения в работе [3] являлась задача о наилучшем приближении значений ограниченных аналитических функций в односвязной области по их значениям в конечном числе точек. В качестве X берется пространство ограниченных аналитических в G функций; в качестве W — единичный шар этого пространства; в качестве функционалов $L(f), l_1(f), \ldots, l_n(f)$ — значения $f(z) \in W$ в точках $z_0, z_1, \ldots, z_n$. В [3] найдена погрешность наилучшего метода и линейный наилучший метод.

В данной работе аналогичная задача решается для класса регулярных ограниченных функций в круговом кольце: находится погрешность наилучшего метода приближения и линейный наилучший метод приближения значений функций в заданной точке по их значениям в конечном числе точек.

Содержание работы разбито на три параграфа. В § 1 вкратце излагаются необходимые сведения из работ [4] — [6]. В § 2 ставится задача и находится погрешность наилучшего метода приближения в кольце. В § 3 строится линейный наилучший метод приближения в кольце и исследуется вопрос о его единственности.

§ 1. Предварительные сведения

Напомним некоторые понятия и результаты из работ [4] — [6]. Экстремальные задачи, описанные во введении, тесно связаны со следующей задачей наилучшего приближения. Пусть E — подпространство нормированного комплексного пространства X, а X^* — сопряженное пространство (т. е. пространство комплексных линейных непрерывных функционалов, заданных на нормированном пространстве X). Обозначим через $E^{\perp}$ ортогональное дополнение E в X^* (т. е. множество всех линейных функционалов $l \in X^*$ таких, что $l(x)=0$, когда $x \in E$). Тогда выполняется соотношение двойственности

$$\sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leqslant 1}} |L(x)| = \inf_{l \in E^{\perp}} \|L - l\|, \tag{2}$$

где $L \in X^*$.

Равенство (2) было впервые установлено и использовано С. М. Никольским [7] в случае, когда $E^{\perp}$ — конечномерное подпространство. С. Я. Хавинсон [4], [6] применил соотношение двойственности (2) (в случае произвольного подпространства E) к изучению ряда экстремальных задач теории аналитических функций в круге и многосвязных областях. В дальнейшем нам потребуются некоторые результаты его работ.

Пусть G есть m-связная область, ограниченная спрямляемыми контурами; $\omega(\zeta)$ — суммируемая функция на Γ (Γ — граница области G). Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$\sup_{f \in B^1(G)} \int_{\Gamma} f(\zeta)\,\omega(\zeta)\,d\zeta. \tag{3}$$

Здесь $B^1(G)$ — множество регулярных, ограниченных единицей функций в области G. Тогда имеет место соотношение двойственности

$$\sup_{f \in B^1(G)} \left| \int_{\Gamma} f(\zeta)\,\omega(\zeta)\,d\zeta \right| = \min_{\varphi \in E_1(G)} \int_{\Gamma} |\omega(\zeta) - \varphi(\zeta)|\,|d\zeta| \tag{4}$$

(класс $E^1(G)$ состоит из аналитических в области G функций, представимых интегралом Коши через свои граничные значения; см. [8]).

Существуют экстремальные функции $f^*(\zeta) \in B^1(G)$ и $\varphi^*(\zeta) \in E_1(G)$ для равенства (4); причем для того чтобы функции $f^*(\zeta) \in B^1(G)$ и $\varphi^*(\zeta) \in E_1(G)$ были экстремальными функциями в равенстве (4), необходимо и достаточно, чтобы почти везде на Γ выполнялось соотношение

$$f^*(\zeta)\,[\omega(\zeta) - \varphi^*(\zeta)]\,d\zeta = e^{i\theta}\,|\omega(\zeta) - \varphi^*(\zeta)|\,ds, \tag{5}$$

где θ — вещественное число.

В случае, когда область G ограничена аналитическими контурами и когда функция $\omega(\zeta)$ есть граничное значение мероморфной функции $\omega(z)$ в области G с полюсами $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ (каждый полюс повторен столько раз, какова его кратность), экстремальная функция задачи (3) единственна с точностью до множителя $e^{i\theta}$ (θ — действительное число) и имеет вид (см. [4], [9]):

$$f^*(z) = e^{i\theta} \exp\left[-\sum_{j=1}^{k} P(z, \alpha_j)\right], \tag{6}$$

где $P(z, z_0) = g(z, z_0) + i\widetilde{g}(z, z_0)$ — комплексная функция Грина в области G ($\widetilde{g}$ сопряженная к g по z); $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — нули функции $f^*(z)$. В рассматриваемом случае для количества нулей k экстремальной функции $f^*(z)$ справедлива оценка

$$k \leqslant m + \nu - 2. \tag{7}$$

Ряд экстремальных задач для аналитических функций в кольце $K\,(r < |z| < 1)$ изучил Р. М. Робинсон [5]. В его исследованиях основную роль играет функция $H(z;\,a)$ (функция Робинсона), которая будет существенно использована и в нашей работе. Она определяется следующим образом. Для любого заданного $a \in K$ $H(z; a)$ регулярна в $\overline{K}$ и удовлетворяет условиям: 1) $|H(z; a)| = 1$, когда $|z| = 1$; 2) $|H(z;\,a)| = |a|$, когда $|z| = r$; 3) $H(a;\,a) = 0$; 4) $H(1;\,a) = 1$. Этими условиями $H(z;\,a)$ определяется единственным образом.

В заключение напомним, что функция Грина $g(z, a)$ в кольце K равна (см. [5]):

$$g(z, a) = \ln(|z|^{\log_r |a|}/|H(z; a)|). \tag{8}$$

§ 2. Постановка задачи. Величина погрешности наилучшего метода приближения в кольце

Пусть K — кольцо $r < |z| < 1$ и $z_0, z_1, \ldots, z_n$ — заданные точки, лежащие в нем. Рассмотрим описанную во введении задачу для пространства $X = H_\infty(K)$ регулярных в кольце K ограниченных функций, когда $W = B^1(K)$ — единичный шар в $H_\infty(K)$, а функционалы определяются как значения функции $f(z) \in B^1(K)$ в точках

$$L(f) = f(z_0),\ l_1(f) = f(z_1),\ \ldots,\ l_n(f) = f(z_n).$$

В этом случае погрешность наилучшего метода приближения равна

$$r_n(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \inf_S \sup_{f \in B^1(K)} |f(z_0) - S(f(z_1), \ldots, f(z_n))|, \tag{9}$$

где $S = S(z_1, \ldots, z_n)$ — любая комплексная функция n комплексных переменных. Согласно формуле (1) погрешность наилучшего метода приближения можно также найти по формуле

$$r_n(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \sup_{\substack{f \in B^1(K) \\ f(z_1) = \ldots = f(z_n) = 0}} |f(z_0)|. \tag{10}$$

Наша цель — вычислить погрешность наилучшего метода приближения и затем найти линейный наилучший метод приближения при заданных точках $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Сначала докажем лемму.

Лемма. 1. *Пусть K — кольцо $r < |z| < 1$. Пусть точка $z_0 \in K$. Тогда минимум величины $g(z, z_0)$ ($g(z, z_0)$ — функция Грина) на окружности $|z| = R_0$ ($r < R_0 < 1$) достигается в точке*

$$z_* = -R_0 \cdot z_0/|z_0|.$$

Доказательство. Согласно формуле (8) необходимо убедиться в том, что функция Робинсона $H(z; z_0)$ достигает максимума в точке z_*. Для этого рассмотрим функцию $\Phi(z) = H(z; t)/H(z; z_*)$, где $|t| = R_0$. Очевидно, функция $\Phi(z)$ на границе кольца K удовлетворяет условию $|\Phi(z)| = 1$. В точке z_* функция имеет простой полюс. Отсюда согласно работе [5] справедливо неравенство $|\Phi(z)| < 1$, когда z принадлежит интервалу $(rz_0/|z_0|, z_0/|z_0|)$. Поэтому $|H(t; z_0)| < |H(z_*; z_0)|$ (мы воспользовались тем, что $|H(a; b)| = |H(b; a)|$, как следует из известного свойства функции Грина и формулы (8)).

Пусть $S_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j f(z_j)$ — определяемый наилучший метод приближения по заданным в кольце K точкам $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Так как

$$r_n(S_0) = \sup_{f \in B^1(K)} |f(z_0) - \sum_{j=1}^{n} c_j f(z_j)|,$$

то, выразив значения функции $f(z)$ в точках $z_0, z_1, \ldots, z_n$ через ядро Коши, получим

$$r_n(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \sup_{f \in B^1(K)} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\zeta - z_j} \right) f(\zeta)\, d\zeta \right|. \tag{11}$$

Обозначим через $\sigma(z)$ экстремальную функцию задачи (11). Пусть k — количество нулей функции $\sigma(z)$ в кольце K. Тогда (см. (7)) $n \leqslant k \leqslant n+1$.

Теорема 1. *Погрешность наилучшего метода приближечия в кольце K равна*

$$r_n(z_0, z_1, \ldots, z_n) = |\exp(-\sum_{j=1}^{n} P(z_0, z_j))|,$$

если $\varkappa = \ln(|z_1|\cdot\ldots\cdot|z_n|)/\ln r$ *— целое число, и*

$$r_n(z_0, z_1, \ldots, z_n) = |\exp(-\sum_{j=1}^{n+1} P(z_0, z_j))|,$$

если $\varkappa$ *— не целое число. Здесь* $z_{n+1} = -\rho z_0/|z_0|$,

$$\rho = r^{1+N}/(|z_1|\cdot\ldots\cdot|z_n|) \text{ и } N = [\varkappa]. \tag{12}$$

Доказательство. Экстремальная функция задачи (11) единственна (с точностью до постоянного множителя), а общее количество ее нулей равно либо n, либо $n+1$. Таким образом, экстремальная функция $\sigma(z)$ задачи (11) имеет согласно (6) вид

$$\sigma(z) = e^{i\theta}\exp(-\sum_{j=1}^{n} P(z, z_j)) \tag{13}$$

либо

$$\sigma(z) = e^{i\theta}\exp(-\sum_{j=1}^{n+1} P(z, z_j)), \tag{14}$$

где θ — действительное число; $z_1, \ldots, z_n$ — заданные точки, а z_{n+1} — дополнительная, пока неизвестная точка. Известно, что период $\tilde{g}(z, a)$ при обходе окружности $|z| = r$ равен $-2\pi\omega(a)$ (см. [10], с. 278), где $\omega(z)$ — гармоническая мера окружности $|z| = r$. Так как $\omega(z) = \ln|z|/\ln r$, то период $-\sum_{j=1}^{n}\tilde{g}(z, z_j)$ при обходе окружности $|z| = r$ равен (см. (13)):

$$2\pi\sum_{j=1}^{n}\frac{\ln|z_j|}{\ln r} = 2\pi\varkappa.$$

Значит, если $\varkappa$ — целое число, то экстремальная функция $\sigma(z)$ имеет вид (13). Если же $\varkappa$ — нецелое число, то (13) не дает однозначной функции и, следовательно, $\sigma(z)$ имеет $n+1$ нулей, причем для того чтобы выражение (6) для $\sigma(z)$ (с $k = n+1$) давало однозначную функцию (см. (14)), необходимо потребовать, чтобы $\varkappa + \ln|z_{n+1}|/\ln r$ было целым числом. Отсюда, для того чтобы функция $\exp\left(-\sum_{j=1}^{n+1} P(z, z_j)\right)$ была однозначной, необходимо (и достаточно), чтобы для нуля z_{n+1} выполнялось условие

$$\omega(z_{n+1}) = 1 - \{\varkappa\} \tag{15}$$

(здесь $\{x\}$ — дробная часть числа x). Получаем $|z_{n+1}| = \rho$, где ρ находится по формуле (12) (см. (15)). В этом случае экстремальная функция $\sigma(z)$ имеет вид (14), поэтому

$$|\sigma(z_0)| = \exp(-\sum_{j=1}^{n} g(z_j, z_0))\cdot\exp(-g(z_{n+1}, z_0)),$$

где $|z_{n+1}| = \rho$. Так как $\sigma(z)$ — экстремальная функция задачи (11), то отсюда следует (см. (10)), что $g(z_{n+1}, z_0) = \min_{|z|=\rho} g(z, z_0)$. По лемме 1 получим $z_{n+1} = -\rho z_0/|z_0|$. Теорема доказана.

§ 3. Линейный наилучший метод приближения в кольце

Докажем сначала две леммы.

Лемма 2. *Пусть точка* $z_0 \in K$, $z_0 < 0$. *Тогда функция* $P'(z, z_0)$ *на границе кольца* K *удовлетворяет неравенству*

$$|P'(\zeta, z_0)| \geqslant |P'(1, z_0)|, \tag{16}$$

когда $|\zeta|=1$, *и неравенству*

$$|P'(\zeta, z_0)| \geqslant |P'(r, z_0)|, \tag{17}$$

когда $|\zeta|=r$.

Доказательство. Известно (см. [4], с. 47), что

$$|P'(\zeta, z_0)| = \frac{\partial}{\partial n} g(\zeta, z_0),$$

когда $\zeta \in \Gamma$ (Γ — граница кольца K; $\partial/\partial n$ — дифференцирование по внутренней нормали). Докажем, что функция $\frac{\partial}{\partial n} g(\zeta, z_0)$ принимает минимум на окружности $|\zeta|=1$ в точке $\zeta=1$.

Рассмотрим точку ζ, лежащую на окружности $|z|=1$. Проведем из центра (0, 0) радиус в точку ζ. Рассмотрим окружность $|z|=R$ (R близко к единице). Пусть $\zeta(R)$ — точка пересечения радиуса с окружностью $|z|=R$. Тогда по лемме 1 имеем $g(\zeta(R), z_0) \geqslant g(R, z_0)$. Так как $g(\zeta, z_0)=0$, когда $|\zeta|=1$, то отсюда следует

$$\frac{\partial}{\partial n} g(\zeta, z_0) \geqslant \frac{\partial}{\partial n} g(1, z_0).$$

Неравенство (16) доказано. Аналогично доказывается неравенство (17).

Теперь рассмотрим экстремальную задачу

$$J = \inf \int_\Gamma |\Phi(\zeta)|\, ds, \quad \Phi(\zeta) = -(\zeta - z_0)^{-1} + \varphi(\zeta), \quad \varphi \in E_1(K). \tag{18}$$

Здесь z_0 — некоторая фиксированная точка, принадлежащая кольцу K.

Лемма 3. *Справедливо равенство*

$$J = 2\pi. \tag{19}$$

Экстремальные функции задачи (18) *имеют вид*

$$\Phi^*(\zeta) = P'(\zeta, z_0) - \lambda/\zeta, \tag{20}$$

где

$$P'(1, -|z_0|) \leqslant \lambda \leqslant rP'(r, -|z_0|). \tag{21}$$

Доказательство. В дальнейшем считаем, что z_0 — действительное число. Пусть $z_0 < 0$. Двойственной к задаче (18) (см. [4]) является задача о

$$\sup_{f \in B^1(K)} |2\pi f(z_0)|. \tag{22}$$

Экстремальными функциями задачи (22) являются константы $e^{i\alpha}$; α — действительное число. Отсюда следует равенство (19). Известно (см. [4]), что экстремальная функция задачи (18) не единственна. Известно также, что $P'(\zeta, z_0)$ — одна из экстремальных функций задачи (18). Пусть $\Phi^*(\zeta)$ является любой другой из экстремальных функций задачи (18). Обозначим

$$P'(\zeta, z_0) = -(\zeta - z_0)^{-1} + \varphi^*(\zeta), \quad \Phi^*(\zeta) = -(\zeta - z_0)^{-1} + f^*(\zeta),$$

$$\text{где } \varphi^*(\zeta) \in E^1(K) \text{ и } f^*(\zeta) \in E_1(K).$$

Экстремальные функции $\varphi^*(\zeta)$ и $f^*(\zeta)$ удовлетворяют следующим соотношениям почти везде на границе кольца (см. (5)):

$$i[-(\zeta - z_0)^{-1} + \varphi^*(\zeta)]\, d\zeta = |-(\zeta - z_0)^{-1} + \varphi^*(\zeta)|\, ds, \tag{23}$$

$$i[-(\zeta - z_0)^{-1} + f^*(\zeta)]\, d\zeta = |-(\zeta - z_0)^{-1} + f^*(\zeta)|\, ds. \tag{24}$$

Вычитая из равенства (24) равенство (23), видим, что выражение $i[f^*(\zeta) - \varphi^*(\zeta)]\, d\zeta$ принимает почти везде действительные значения на границе кольца K. Так как

$$d\zeta/ds = \begin{cases} i\zeta, \text{ когда } |\zeta| = 1; & (25) \\ -i\zeta/r, \text{ когда } |\zeta| = r, & (26) \end{cases}$$

то отсюда следует, что почти везде на границе кольца K регулярная в кольце K функция $[f^*(z) - \varphi^*(z)]z$ принимает действительные значения. Кроме того, т. к. эта функция, очевидно, принадлежит классу $E_1(K)$, то она аналитически продолжается за границу кольца K (см. [4]). Отсюда $[f^*(z) - \varphi^*(z)]z \equiv -\lambda$, где λ — вещественное число. Поэтому получим

$$\Phi^*(z) = P'(z, z_0) - \lambda/z.$$

Нам осталось убедиться в том, что действительное число λ удовлетворяет неравенству (21).

Пусть λ — действительное число такое, что функция $P'(\zeta, z_0) - \lambda/\zeta$ является экстремальной функцией задачи (18). Тогда на окружности $|\zeta| = 1$ выполняется равенство (см. (24) и (25)):

$$i[P'(\zeta, z_0) - \lambda/\zeta]\, i\zeta = |P'(\zeta, z_0) - \lambda/\zeta|$$

или

$$\lambda - \zeta P'(\zeta, z_0) = |P'(\zeta, z_0) - \lambda/\zeta|.$$

Из последнего равенства следует, что функция $\zeta P'(\zeta, z_0)$ принимает действительные значения на окружности $|\zeta| = 1$. Кроме того, из последнего равенства следует $\lambda \geqslant \zeta P'(\zeta, z_0)$. Отсюда получим $\lambda \geqslant P'(1, z_0)$. Аналогично, рассмотрев окружность $|\zeta| = r$, убедимся в том, что λ удовлетворяет неравенству (см. (24) и (26)): $\lambda \leqslant rP'(r, z_0)$.

Обратно, если λ удовлетворяет неравенству (21), то можно убедиться в том, что

$$i[P'(\zeta, z_0) - \lambda/\zeta]\, d\zeta = |P'(\zeta, z_0) - \lambda/\zeta|\, ds$$

на границе кольца K (при этом используется лемма 2). Отсюда следует, что функция $P'(\zeta, z_0) - \lambda/\zeta$ является экстремальной функцией задачи (18).

Теорема 2. *Если $\varkappa$ — целое число, то имеется бесчисленное множество линейных наилучших методов приближения. Коэффициенты c_j имеют вид*

$$c_j = (\sigma(z_0)/\sigma'(z_j))\,[P'(z_j, z_0) - \lambda/z_j], \tag{27}$$

где $j = 1, \ldots, n;\ \lambda \in [P'(1, -|z_0|),\ rP'(r, -|z_0|)]$.

Если $\varkappa$ — не целое число, то линейный наилучший метод приближения единственен; причем если нуль z_{n+1} экстремальной функции $\sigma(z)$ задачи (11) *не совпадает ни с одной из точек $z_1, \ldots, z_n$, то*

$$c_j = (\sigma(z_0)/\sigma'(z_j))\,[P'(z_j, z_0) - (z_{n+1}/z_j)\,P'(z_{n+1}, z_0)], \tag{28}$$

где $j = 1, \ldots, n$.

Если же $z_{n+1} = z_k\ (1 \leqslant k \leqslant n)$, то коэффициенты $c_1, \ldots, c_{k-1}, c_{k+1}, \ldots, c_n$ вычисляются по формуле (28), *а коэффициент*

$$c_k = (2\sigma(z_0)/\sigma''(z_k))\,[P''(z_k, z_0) - P'(z_k, z_0)/z_k]. \tag{29}$$

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j f(z_j)$ является линейным наилучшим методом приближения,

$$J_1 = \sup_{f \in B^1(K)} \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\zeta - z_j} \right) f(\zeta)\, d\zeta \right|, \tag{30}$$

$$J_2 = \inf_{\varphi \in E_1(K)} \int\limits_{\Gamma} \left| \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\zeta - z_j} \right) - \varphi(\zeta) \right| ds. \tag{31}$$

Тогда $J_1 = J_2 = |\sigma(z_0)|$. Обозначим через $q(\zeta)$ экстремальную функцию задачи (31). Экстремальные функции $\sigma(\zeta)$ и $q(\zeta)$ удовлетворяют соотношению (см. (5)):

$$\sigma(\zeta)\left[\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\zeta - z_j}\right) - q(\zeta)\right] d\zeta =$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\zeta - z_j}\right) - q(\zeta)\right| ds.$$

Функция

$$Q(z) = \frac{\sigma(z)}{\sigma(z_0)}\left[-\frac{1}{z - z_0} + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{z - z_j} + 2\pi i q(z)\right] \tag{32}$$

удовлетворяет следующим условиям:

1) $Q(\zeta) = -(\zeta - z_0)^{-1} + \varphi(\zeta)$, $\varphi \in E_1(K)$;

2) $\int\limits_{\Gamma} |Q(\zeta)|\, ds = 2\pi$.

Функция $Q(z)$ является экстремальной функцией задачи (18). Кроме того, если $\varkappa$ — не целое число (т. е. экстремальная функция $\sigma(z)$ имеет $n+1$ нулей), то функция $Q(z)$ удовлетворяет еще условию

3) $Q(z_{n+1}) = 0$.

По лемме 3 $Q(z)$ совпадает с функцией (20). Из формулы (32) следует

$$\frac{1}{\zeta - z_0} - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\zeta - z_j} = -\frac{\sigma(z_0)}{\sigma(\zeta)} Q(\zeta) + 2\pi i q(\zeta).$$

Отсюда

$$\sup_{f \in B^1(K)} |J_3| = |\sigma(z_0)|, \tag{33}$$

$$J_3 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\sigma(z_0)}{\sigma(\zeta)} Q(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta, \quad f \in B^1(K). \tag{34}$$

Далее рассмотрим два случая.

Пусть $\varkappa$ является целым числом. Рассмотрим выражение (34), в котором функция $Q(\zeta)$ имеет вид (20). По теореме о вычетах имеем

$$J_3 = -f(z_0) + \sum_{j=1}^{n} c_j f(z_j),$$

где c_j суть вычеты функции $(\sigma(z_0)/\sigma(z))\, Q(z)$ в полюсах $z_1, \ldots, z_n$.

Оценим выражение (34). Имеем

$$|J_3| \leqslant |\sigma(z_0)| \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} |Q(\zeta)|\, ds.$$

Значит,

$$\left| f(z_0) - \sum_{j=1}^{n} c_j f(z_j) \right| \leqslant |\sigma(z_0)|, \quad f \in B^1(K).$$

Отсюда следует, что линейный метод $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j f(z_j)$ является линейным наилучшим методом приближения с вычетами (27).

Обратно, если метод $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j f(z_j)$ является линейным наилучшим методом приближения, то существует функция $Q(\zeta)$, имеющая вид (20), такая, что справедливо равенство (33). Отсюда получим, что коэффициенты c_j линейного наилучшего метода приближения находятся по формуле (27).

Предположим, что $\varkappa$ — не целое число. Значит, экстремальная функция $\sigma(z)$ задачи (11) имеет $n+1$ нулей, причем нуль z_{n+1} может совпадать с одной из точек $z_1, \dots, z_n$. Рассмотрим вначале случай, когда все нули различны. Так как $Q(z_{n+1})=0$, то (см. (20))

$$Q(\zeta)=P'(\zeta, z_0)-z_{n+1}P'(z_{n+1}, z_0)/\zeta.$$

Видно, что линейный наилучший метод приближения единственен, а коэффициент c_j имеет вид (см. (34)) (28).

Если нуль $z_{n+1}=z_k(1\leqslant k\leqslant n)$, то коэффициенты $c_1, \dots, c_{k-1}, c_{k+1}, \dots, c_n$ находятся по этой же формуле (28). Заметим, что z_k является простым полюсом выражения

$$(\sigma(z_0)/\sigma(z))\,[P'(z, z_0)-z_{n+1}P'(z_{n+1}, z_0)/z].$$

Значит, коэффициент c_k равен (29). Теорема доказана.

Автор благодарит К. Ю. Осипенко за постановку задачи и С. Я Хавинсона за советы и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них:) Дис... канд. физ.-матем. наук.— М., 1966.— 117 с.

2. Бахвалов Н. С. Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций // Журн. вычисл. матем. и матем. физ.— 1971.— Т. 11.— № 4.— С. 1014—1018.

3. Осипенко К. Ю. Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек // Матем. заметки.— 1976.— Т. 19.— № 1.— С. 29—40.

4. Хавинсон С. Я. Основы теории экстремальных задач для ограниченных аналитических функций и их различных обобщений. — М.: Изд-во МИСИ, 1981.— 91 с.

5. Robinson R. M. Analytic functions in circular rings // Duke Math. J.— 1943. — V. 10.— P. 341—354.

6. Хавинсон С. Я. Об одной экстремальной задаче теории аналитических функций // УМН.— 1949.— Т. 4, вып. 4 (32).— С. 158—159.

7. Никольский С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. матем.— 1946.— Т. 10.— № 3.— С. 207—256.

8. Хавинсон С. Я. Факторизация аналитических функций в конечносвязных областях.— М.: Изд-во МИСИ, 1981.— 117 с.

9. Хавинсон С. Я. Экстремальные задачи для некоторых классов аналитических функций в конечносвязных областях // Матем. сб.— 1955.— Т. 36 (78).— № 3.— С. 445—478.

10. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного.— 2-е изд.— М.: Наука, 1966.—628 с.

г. Москва

Поступила
14.07.1987

Г. Г. Распутин

УДК 519.644.7

H-БАЗИСЫ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ИДЕАЛОВ И КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

§ 1. Введение

Пусть I: $\boldsymbol{R}[x]\to\boldsymbol{R}$ есть n-мерный интеграл, т. е. вещественный линейный функционал на кольце $\boldsymbol{R}[x]$ вещественных многочленов от n переменных $x=(x_1, \dots, x_n)$, обладающий свойством строгой положительности: $I(f)\geqslant 0$ для $f\in P^+ := \{g\in\boldsymbol{R}[x]\colon g|_{\boldsymbol{R}^n}\geqslant 0\}$, причем $\operatorname{Ker} I\cap P^+=\{0\}$. Рассматриваются кубатурные формулы

$$I(\varphi)=c_1\cdot\varphi(\xi^{(1)})+\dots+c_N\cdot\varphi(\xi^{(N)})+r(\varphi)\quad(\xi^{(i)}\in\boldsymbol{R}^n,\ c_i\in\boldsymbol{R},\ i=1, \dots, N).\quad(1.1)$$

Пусть $P_n^d\subset\boldsymbol{R}[x]$ — линейное подпространство всех многочленов степени не