С. Ф. Лукомский, О коэффициентах лакунарных тригонометрических рядов и рядов Радемахера, сходящихся на множествах нулевой меры, *Изв. вузов. Матем.*, 1995, номер 9, 37–47

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1995 МАТЕМАТИКА № 9 (400)

УДК 517.518

С.Ф. ЛУКОМСКИЙ

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ЛАКУНАРНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ И РЯДОВ РАДЕМАХЕРА, СХОДЯЩИХСЯ НА МНОЖЕСТВАХ НУЛЕВОЙ МЕРЫ

Хорошо известно, что ([1], с.148) если ряд Радемахера $\sum c_k r_k(t)$ сходится почти всюду, то

$$\sum |c_k|^2 < +\infty. \tag{1}$$

Если же ряд Радемахера сходится всюду, то

$$\sum |c_k| < +\infty. \tag{2}$$

Таким образом, поведение ряда Радемахера на множествах нулевой меры существенно влияет на свойства его коэффициентов, и можно ожидать, что найдутся такие множества нулевой меры, сходимость на которых влечет выполнение свойства, промежуточного между (1) и (2). В качестве такого свойства можно выбрать, напр., условие

$$\sum |c_k|^p < +\infty \quad (1<p<2)$$

или

$$\sum |c_k|\varphi(k) < +\infty \quad (\varphi(k)\downarrow 0). \tag{3}$$

Мы рассмотрим только условие (3), но применительно не только к системе Радемахера, но и к лакунарной тригонометрической системе.

Систему Радемахера будем рассматривать на двоичной группе D, элементами которой являются бесконечные последовательности $t=\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$, состоящие из 0 и 1, а операция сложения определяется как покоординатное сложение по модулю 2. Топология в D задается системой окрестностей точек t

$$V_k(t) = \{\tau=\{\tau_i\}\in D : \tau_i=t_i,\ i\leqslant k\}.$$

Отображение

$$\Psi : t \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} t_k 2^{-k-1}$$

переводит группу D в отрезок $[0,1]$, но с нарушением взаимной однозначности в двоично-рациональных точках. Отображение Ψ становится взаимно однозначным, если вместо отрезка $[0,1]$ рассматривать "модифицированный отрезок" J^*, в котором каждая двоично-рациональная точка считается дважды. При этом V_k переходят в отрезки

$$\Delta^{(k)} = \{t\in J^* : (i-1)2^{-k-1}+0 \leqslant t \leqslant i\,2^{-k-1}-0\}.$$

Отметим, что мера Хаара μ на D совпадает с мерой Лебега m на $[0,1]$. В дальнейшем мы не будем различать J^* и D, т.к. они изоморфны.

Функции Уолша на D определяются равенством

$$w_n(t) = \exp\left(\pi i \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k^{(n)} t_k\right),$$

где $t=\{t_k\}\in D$ и

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k^{(n)} 2^k \qquad (\varepsilon_k^{(n)}=0 \text{ или } 1)$$

– двоичное разложение числа n. При $n=2^k$ получаем функции Радемахера

$$r_k(t) = \exp(\pi i t_k).$$

Подробнее об этом см. в [2], [3].

В дальнейшем соотношение $a(x) \ll b(x)$ будет означать, что при некоторой постоянной $C>0$ выполняется неравенство $a(x)<Cb(x)$. Запись $f(x)\downarrow$ или $f(x)\uparrow$ означает, что $f(x)$ убывает или, соответственно, возрастает, но не обязательно строго. Символ X^* будет означать количество элементов в множестве X, $\mathrm{int}(m)$ – целую часть m.

Основные результаты статьи можно сформулировать в виде следующих двух теорем.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\varphi(x)$ – невозрастающая на $[1;+\infty)$ функция такая, что $\varphi(x)\downarrow 0$ при $x\longrightarrow+\infty$. Пусть, кроме того*:

1) *$x\varphi^2(x)$ строго возрастает к $+\infty$ при $x\longrightarrow+\infty$,*

2) *фу́кция $\gamma: x\varphi^2(x)\longrightarrow x$ удовлетворяет условию*

$$\gamma(x+1)-\gamma(x) \ll \gamma(x)/x.$$

Тогда существует множество $E\subseteq D$ нулевой меры такое, что:

1) *из сходимости ряда Радемахера*

$$\sum c_k r_k(t)$$

на множестве E следует сходимость ряда (3);

2) *для любой возрастающей к $+\infty$ функции $\chi(x)$ существует ряд Радемахера, сходящийся на E, но*

$$\sum |c_k|\varphi(k)\chi(k) = +\infty.$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы* 1 *и последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ такова, что*

$$\sum n_k/n_{k+1} < +\infty. \tag{4}$$

Тогда существует такое множество $E\subseteq[0,2\pi]$ нулевой меры, что:

1) *из сходимости ряда*

$$\sum a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x \tag{5}$$

на множестве E следует, что

$$\sum(|a_k|+|b_k|)\varphi(k) < +\infty;$$

2) *для любой возрастающей к $+\infty$ функции $\chi(x)$ существует ряд* (5) *по системе $\{\cos n_k x, \sin n_k x\}$, сходящийся на E, но*

$$\sum(|a_k|+|b_k|)\varphi(k)\chi(k) = +\infty.$$

При $\varphi(x)=1/x^\alpha$ $(0<\alpha<1/2)$ эти теоремы были анонсированы в [4]. Условие 2) в теоремах 1 и 2 выделяет более широкий класс функций, близких к степенным. Ему удовлетворяют, напр., все функции $\varphi(x)=1/x^\alpha \ln^\beta(1+x)$.

§ 1. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 1. *Пусть последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ такова, что*

$$\lim_{k\to\infty} \inf\{\nu : \varepsilon_\nu^{(k)}=1\} = \infty, \tag{6}$$

где $\varepsilon_\nu^{(k)}$ *– коэффициенты в двоичном разложении*

$$n_k = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu^{(k)} 2^\nu.$$

Если частичные суммы ряда Уолша

$$\sum c_k w_{n_k}(t) \tag{7}$$

ограничены в каждой точке $t \in D$, *то они равномерно ограничены на* D.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть частичные суммы

$$S_m(t) = \sum_{k=0}^{m} c_k w_{n_k}(t)$$

ограничены в каждой точке $t \in D$. Тогда существует такой отрезок $\Delta^{(s)} \subset D$, что $S_m(t)$ равномерно ограничены на $\Delta^{(s)}$. Действительно, если $S_m(t)$ неограничены в каждом отрезке, то найдется последовательность вложенных отрезков $\Delta^{(s_k)}$ и последовательность m_k такие, что $|S_{m_k}(t)| \geq k$ на $\Delta^{(s_k)}$ (это следствие кусочной постоянности функций Уолша). Но тогда в точке $t_0 \in \bigcap \Delta^{(s_k)}$ имеем $|S_{m_k}(t_0)| \geq k$, что невозможно. Ввиду условия (6) найдется такое число $k(s)$, что при $k > k(s)$ все $w_{n_k}(t)$ суть произведения функций Радемахера $r_\nu(t)$ с номерами $\nu > s$. Это означает, что при $m > k(s)$

$$\sum_{k=k(s)+1}^{m} c_k w_{n_k}(t) \tag{8}$$

есть периодическая функция с периодом 2^{-s-1}. Поэтому равномерная ограниченность сумм (8) на $\Delta^{(s)}$ влечет равномерную ограниченность сумм $S_m(t)$ на D.

Аналогичный результат верен и для тригонометрической системы.

ЛЕММА 2. *Пусть* $\lambda \geq 2$ *целое;* $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ *– возрастающая последовательность натуральных чисел и*

$$n_k = \sum_j \gamma_j^{(k)} \lambda^j \quad (\gamma_j^{(k)} = 0, 1, \ldots, \lambda-1) \tag{9}$$

– представление n_k *в системе с основанием* λ. *Если последовательность* $\{n_k\}$ *такова, что для любого натурального* m, *начиная с некоторого номера* $k(m)$, *в разложении* (9) *не содержится* λ^m, *то из сходимости ряда*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(i n_k x) \quad (n_{-k} = -n_k,\ c_{-k} = \overline{c}_k) \tag{10}$$

всюду на $[0, 2\pi]$ *следует, что все его частичные суммы равномерно ограничены.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Осгуда ([5], с.74) существует отрезок $[\alpha, \beta]$, в котором частичные суммы ряда (10) равномерно ограничены. Пусть

$$\delta_m = [2\pi(j-1)\lambda^{-m},\ 2\pi j \lambda^{-m}] \subset [\alpha, \beta].$$

По условию найдется $k(m)$ такое, что при $k > k(m)$ все n_k не содержат в своих разложениях члены вида λ^s ($s \leq m$). Тогда суммы

$$\sum_{|k|=k(m)}^{K} c_k \exp(i n_k x)$$

равномерно ограничены на δ_m и в силу периодичности равномерно ограничены на $[0, 2\pi]$. Поэтому и частичные суммы ряда (10) равномерно ограничены на $[0, 2\pi]$.

ЛЕММА 3. *Пусть N_1 и N_2 – непересекающиеся подмножества множества натуральных чисел $\mathbb{N}$; $C>0$ – некоторая постоянная. Для любого $k\in N_1$ положим $T_k(t)=\sum_{l\le l(k)} a_{kl}w_l(t)$, где $w_l(t)=\prod_{i\in N_2} r_i(t)$.*

Если при $M\in N_1$ и всех $t\in D$

$$\Big|\sum_{k\in N_1, k\le M} r_k(t)T_k(t)\Big| \le C, \tag{11}$$

то при всех $t\in D$

$$\sum_{k\in N_1, k\le M} |T_k(t)| \le C. \tag{12}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольное $t\in D$. Так как $N_1\cap N_2=\varnothing$, то найдется такое $t_1\in D$, что

$$r_k(t_1) = \operatorname{sign} T_k(t_1);\quad T_k(t_1) = T_k(t)\quad (k\in N_1).$$

Так как (11) верно при всех t, то оно верно и при замене t на t_1. Заменяя в (11) t на t_1, мы и получим (12).

ЛЕММА 4. *Пусть $N_0=\bigcup_{i=1}^{p} N_i$ – разбиение множества натуральных чисел на p непересекающихся бесконечных подмножеств N_i, и последовательность $\{n_k\}$ состоит из чисел вида*

$$n_k = 2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots+2^{k_p}\quad (k_i\in N_i).$$

Тогда для любого полинома Уолша

$$T_m(t) = \sum_{k=0}^{m} c_k w_{n_k}(t) \tag{13}$$

справедливо неравенство

$$\Big(\sum |c_k|^2\Big)^{1/2} \le 8\|T_m\|_1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим p-кратный полином Радемахера

$$T = \sum c_{k_1\ldots k_p} r_{k_1}(t_1)\ldots r_{k_p}(t_p).$$

Повторяя рассуждения, проводимые при доказательстве теоремы Хинчина ([1], с.156), получим

$$\Big(\sum |c_{k_1\ldots k_p}|^2\Big)^{1/2} \le 8\|T\|_1. \tag{14}$$

Определим теперь пару отображений $\varphi_p: D\to D^p$ и $\chi_p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^p$ следующим образом: если

$$N_i = \{n_j^{(i)}\}_{j=0}^{\infty}\quad (n_{j+1}^{(i)} > n_j^{(i)})$$

и

$$n = \sum_{i=1}^{p}\sum_j \varepsilon_j^{(i)} 2^{n_j^{(i)}}$$

– двоичное разложение числа n, то положим $\chi_p(n)=(n^{(1)},n^{(2)},\ldots,n^{(p)})$, где $n^{(i)}=\sum_j \varepsilon_j^{(i)}2^j$.

Если же $t=\{t_j\}_{j=0}^{\infty}=\{t_{n_j^{(i)}}\}_{j,i}$, то положим

$$\varphi_p(t) = (t^{(1)},t^{(2)},\ldots,t^{(p)}),$$

где

$$t^{(i)}=\{t_{n_j^{(i)}}\}_{j=0}^{\infty} \quad (i=1,2,\ldots,p).$$

Можно убедиться [6], что отображение φ_p сохраняет меру и при этом

$$w_n(t) = w_{\chi_p(n)}(\varphi_p(t)).$$

А это означает, что полином T можно рассматривать как полином $T_m(t)$ вида (13) и при этом $\|T\|_1=\|T_m\|_1$. Поэтому из (14) и вытекает требуемое неравенство.

Запишем полином (13) в виде

$$T = \sum c_{k_1\ldots k_p} w_{n_k}(t) \quad (n_k=\sum 2^{k_i},\ k_i\in N_i).$$

ЛЕММА 5. *Для полинома $T(t)$ имеем при каждом $i\leqslant p$*

$$\sum_{k_i} \Big(\sum{}' |c_{k_1\ldots k_p}|^2\Big)^{1/2} \leqslant 8\|T\|_\infty,$$

где штрих означает, что суммирование не распространяется на индекс i.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3

$$\sum_{k_i}\Big|\sum{}' c_{k_1\ldots k_p} w_{n_k}(t)\Big| \leqslant \|T\|_\infty$$

равномерно по t. Интегрируя почленно по t и используя лемму 4, получаем требуемое неравенство.

ЛЕММА 6. *Пусть $\{m_k\}$ – лакунарная последовательность натуральных чисел такая, что $m_{k+1}\geqslant 3m_k$ и $\mathbb{N}=\bigcup N_i$–разбиение множества действительных чисел на p непересекающихся множеств. Тогда для действительного многочлена*

$$T(x) = \sum c_{k_1\ldots k_p}\exp(ix(m_{k_1}+\ldots+m_{k_p})) \quad (k_j\in N_j)$$

при любом $i=1,\ldots,p$ справедливо неравенство

$$\sum_{k_i} \Big(\sum{}' |c_{k_1\ldots k_p}|^2\Big)^{1/2} \leqslant 8\cdot 2^{p+1}\|T\|_\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произведения Рисса

$$P(x,t) = \prod_{j=1}^{p}\prod_{k_j}(1+r_{k_j}(t)\cos m_{k_j}x),$$

$$Q(x,t) = \prod_{j=1}^{p}\prod_{k_j}(1+r_{k_j}(t)\sin m_{k_j}x).$$

Обычным образом ([7], с.693) убеждаемся, что

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T(x)P(x,t)dx = 2^{-p}\sum a_{k_1\ldots k_p} r_{k_1}(t)\ldots r_{k_p}(t) = A(t),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T(x)Q(x,t)dx = 2^{-p}\sum b_{k_1\ldots k_p} r_{k_1}(t)\ldots r_{k_p}(t).$$

Так как $\|P(\cdot,t)\|_1=\|Q(\cdot,t)\|_1=2\pi$, то по лемме 5

$$\sum_{k_i} \Big(\sum{}' |a_{k_1\ldots k_p}|^2\Big)^{1/2} \leqslant 8\cdot 2^p\|A\|_\infty \leqslant 8\cdot 2^{p+1}\|T\|_\infty,$$

$$\sum_{k_i} \Big(\sum{}' |b_{k_1\ldots k_p}|^2\Big)^{1/2} \leqslant 8\cdot 2^{p+1}\|T\|_\infty,$$

откуда и вытекает требуемое неравенство.

ЛЕММА 7. *Пусть последовательность* $\{n_k\}$ *такова, что*

$$\ln n_k \ll \psi(k) \quad (\psi(k)\uparrow +\infty).$$

Тогда для любой последовательности $\chi(k)\uparrow +\infty$ *существует ряд*

$$\sum c_k w_{n_k}(t),$$

сходящийся всюду на D, *но тем не менее*

$$\sum |c_k|(\psi(2k)/k)^{1/2}\chi(k) = +\infty.$$

ЛЕММА 8. *Если для последовательности* $\{n_k\}$

$$\ln n_k \ll \psi(k) \quad (\psi(k)\uparrow +\infty),$$

то для любой последовательности $\chi(k)\uparrow +\infty$ *существует ряд*

$$\sum b_k \sin n_k x,$$

сходящийся на $[0, 2\pi]$, *для которого*

$$\sum |b_k|(\psi(2k)/k)^{1/2}\chi(k) = +\infty. \tag{15}$$

Более того, если $s(k)$ – *ограниченная единицей действительная последовательность, то* b_k *можно выбрать так, чтобы, кроме того, сходился ряд*

$$\sum b_k s(k). \tag{16}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 8. Так как $\chi(k)\uparrow +\infty$, то существует последовательность $d(k)\downarrow 0$ такая, что

$$\sum d(k) < +\infty, \quad \text{но} \quad \sum d(k)\chi(k) = +\infty.$$

Положим

$$|b_k| = d(k)(k/\psi(2k))^{1/2}.$$

Тогда $\sum |b_k|(\psi(2k)/k)^{1/2} < +\infty$ и поэтому

$$\sum_m |b_{2^m}|(2^m\psi(2^{m+1}))^{1/2} < +\infty. \tag{17}$$

Рассмотрим случайный ряд ($\varepsilon_k=\pm 1$)

$$\sum \varepsilon_k |b_k| \exp(in_k x) = \sum_m \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \varepsilon_k |b_k| \exp(in_k x). \tag{18}$$

По теореме Ж.П.Кахана ([8], с.99) знаки ε_k можно выбрать так, чтобы при $2^m\leq s\leq 2^{m+1}$

$$\left\| \sum_{k=2^m}^{s} \varepsilon_k |b_k| \exp(in_k x)\right\|_\infty \leq B\left(\sum_{k=2^m}^{s} |b_k|^2 \ln n_{2^{m+1}}\right)^{1/2},$$

$$\left| \sum_{k=2^m}^{s} \varepsilon_k |b_k| s(k)\right| \leq B\left(\sum_{k=2^m}^{s} |b_k|^2 \ln n_{2^{m+1}}\right)^{1/2},$$

где $B>0$ – абсолютная постоянная. Так как $|b_k|$ есть произведение монотонных последовательностей, то при $2^m\leq k<2^{m+1}$ имеем $|b_k|\leq\sqrt{2}|b_{2^m}|$. Используя эти неравенства, получаем с учетом (17), что ряды (16) и (18) сходятся и условие (15) выполняется. Тогда мнимая часть ряда (18) и есть искомый ряд.

Лемма 7 доказывается аналогично, но при ее доказательстве нужно воспользоваться теоремой из ([8], с.97).

§ 2. Коэффициенты рядов Радемахера

Пусть $\Lambda=\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел. Обозначим через $\Lambda(n)$ количество членов последовательности Λ, удовлетворяющих неравенству $n_k<2^n$, и определим функцию $\Phi_\Lambda : D \longrightarrow D$ равенством

$$\Phi_\Lambda(t) = \{\tfrac{1}{2}(1-w_{n_k}(t))\}_{k=0}^{\infty}. \tag{19}$$

ЛЕММА 9. *При любом $t \in D$ и любом $M \in \mathbb{N}$ справедливо равенство*

$$\sum_{k=0}^{M} c_k w_{n_k}(t) = \sum_{k=0}^{M} c_k r_k(\Phi_\Lambda(t)). \tag{20}$$

Если при этом

$$\limsup(\Lambda(n)-n) = +\infty, \tag{21}$$

то $\mu\Phi_\Lambda(D)=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения функции Φ_Λ следует, что $w_{n_k}(t)=r_k(\Phi_\Lambda(t))$, откуда и вытекает (20). Для доказательства второй части леммы рассмотрим при некотором натуральном m конечные последовательности

$$\{\tfrac{1}{2}(1-w_{n_k}(t))\}_{k=0}^{\Lambda(m)-1}. \tag{22}$$

По определению $\Lambda(m)$ в семействе (22) содержатся не более 2^m различных числовых последовательностей. Значит, при каждом m все последовательности семейства (19) содержатся не более чем в 2^m отрезках $\Delta_{\Lambda(m)-1}$ длины $2^{-\Lambda(m)}$. Поэтому $\mu\Phi_\Lambda(D)\leq 2^m 2^{-\Lambda(m)}$, что и доказывает лемму.

Эта лемма позволяет строить множества $\Phi_\Lambda(D)$ нулевой меры, обладающие определенным свойством, ибо изучение ряда Радемахера на множестве $\Phi_\Lambda(D)$ она сводит к изучению ряда Уолша на группе D.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Согласно лемме 9 достаточно построить последовательность $\Lambda=\{n_k\}$ такую, что из сходимости ряда Уолша

$$\sum c_k w_{n_k}(t) \tag{23}$$

всюду на D следует, что $\sum |c_k| \varphi(k) < +\infty$, но для любой последовательности $\chi(k) \uparrow +\infty$ существует сходящийся на D ряд (23), для которого

$$\sum |c_k| \varphi(k)\chi(k) = +\infty. \tag{24}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\varphi(1)=1$. Тогда и $\gamma(1)=1$. Поскольку $\varphi(x)$ убывает, а $x\varphi^2(x)$ возрастает, то при $a>1$

$$\gamma^{-1}(x) \leq \gamma^{-1}(ax) \leq a\gamma^{-1}(x). \tag{25}$$

Так как по условию $\gamma(x+1)-\gamma(x) \ll \gamma(x)/x$, то при натуральном n

$$\gamma(n+1) \leq \gamma(n)(1+C/n)$$

и поэтому $\gamma(x) \ll x^\alpha$ при некотором $\alpha>1$.

Положим $i(x)=\operatorname{int}\gamma(x)$. Очевидно,

$$i(x) \ll x^\alpha \quad \text{и} \quad i(x+1)-i(x) \leq \gamma(x)/x. \tag{26}$$

Пусть при натуральном p

$$N_j = \{pk+j\}_{k=0}^{\infty} \quad (j=0,1,\dots,p-1),$$

$$\widetilde{\Lambda}_m = \{2^{mp}+2^{k_1}+\ldots+2^{k_{p-1}} : k_j\in N_j,\ mp/2 \le k_j \le mp\}.$$

Ясно, что $\widetilde{\Lambda}_m^\# \gg m^{p-1}$. Выберем p так, чтобы $\widetilde{\Lambda}_m^\# > i(m+1)-i(m)$ при больших m, что возможно, ибо $i(m+1)-i(m)$ растет не быстрее некоторой степенной функции. Выберем $\Lambda_m \subset \widetilde{\Lambda}_m$ так, чтобы $\widetilde{\Lambda}_m^\# = i(m+1)-i(m)$ и положим $\Lambda=\{n_k\}=\bigcup\Lambda_m$. Покажем, что Λ и есть искомая последовательность.

Пусть ряд

$$\sum c_k w_{n_k}(t) = \sum_m \sum_{n_k\in\Lambda_m} c_k w_{n_k}(t)$$

сходится всюду на D. Так как Λ удовлетворяет условиям леммы 1, то его частичные суммы равномерно ограничены на D и по лемме 5

$$\sum_m \Big(\sum_{n_k\in\Lambda_m} |c_k|^2\Big)^{1/2} < \infty.$$

Используя (26), находим, что

$$\sum_{n_k\in\Lambda_m} \varphi^2(k) \le \varphi^2(i(m)+1)(i(m+1)-i(m)) \ll \varphi^2(\gamma(m))\gamma(m)/m = \gamma^{-1}(\gamma(m))/m = 1.$$

Поэтому

$$\sum |c_k|\varphi(k) = \sum_m \sum_{n_k\in\Lambda_m} |c_k|\varphi(k) \le \sum_m (\sum |c_k|^2)^{1/2}(\sum \varphi^2(k))^{1/2} < +\infty.$$

Далее, из определения $\{n_k\}$ следует, что если

$$2^{mp} \le n_k \le 2^{(m+1)p},$$

то и $i(m)+1\le k\le i(m+1)$. Поэтому $\gamma(m)\le k$ и $m\le\gamma^{-1}(k)$. Следовательно, $\ln n_k \ll m \le \gamma^{-1}(k)$ и по лемме 7 для любой функции $\chi(x)\uparrow+\infty$ существует ряд (23), сходящийся на D, но

$$\sum |c_k|(\gamma^{-1}(2k)/k)^{1/2}\chi(k) = +\infty,$$

откуда с учетом (25) и определения функции γ следует (24).

Теперь положим $E=\Phi_\Lambda(D)$. Так как $\Lambda(n)-n\longrightarrow+\infty$, то $\mu\Phi_\Lambda(D)=0$ и согласно лемме 9 множество E является искомым.

§ 3. Коэффициенты лакунарных тригонометрических рядов

ЛЕММА 10. *Пусть $\{\widetilde{n}_k\}_{k=0}^\infty$ и $\{n_k\}_{k=0}^\infty$ – возрастающие последовательности натуральных чисел такие, что*

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{n}_k/n_k = 0, \quad \sum n_k/n_{k+1} < +\infty.$$

Тогда для любого $\widetilde{x}\in[0,2\pi]$ существует $x\in[0,2\pi]$ такой, что

$$\sum |\exp(i\widetilde{n}_k\widetilde{x})-\exp(in_kx)| < +\infty. \tag{27}$$

Если через F обозначить соответствующее отображение $F:\widetilde{x}\longrightarrow x$, то $mF([0,2\pi])=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $n_{k+1}=\lambda_k n_k$ и $d_k=\operatorname{int}\lambda_k$. Пусть $\widetilde{x}\in[0,2\pi]$. Ясно, что если

$$x \in \left[\frac{2\pi}{n_2}(i_1-1);\ \frac{2\pi}{n_2}i_1\right] = I_1,$$

то

$$n_1x \in \left[\frac{2\pi}{\lambda_1}(i_1-1);\ \frac{2\pi}{\lambda_1}i_1\right] = \Delta_1.$$

Выберем i_1 так, чтобы $\widetilde{n}_1\widetilde{x} \in \Delta_1$. Тогда

$$|\exp(i\widetilde{n}_1\widetilde{x})-\exp(in_1x)| \leq \frac{2\pi}{\lambda_1}.$$

Отрезок I_1 разобьем на d_2 отрезков. Если

$$x \in \left[2\pi\left(\frac{i_1-1}{n_2}+\frac{i_2-1}{n_2d_2}\right);\ 2\pi\left(\frac{i_1-1}{n_2}+\frac{i_2}{n_2d_2}\right)\right] = I_2,$$

то

$$n_2x \in \left[2\pi\left(i_1-1+\frac{i_2-1}{d_2}\right);\ 2\pi\left(i_1-1+\frac{i_2}{d_2}\right)\right] = \Delta_2.$$

Выберем i_2 так, чтобы $\widetilde{n}_2\widetilde{x} \in \Delta_2$. Тогда

$$|\exp(i\widetilde{n}_2\widetilde{x})-\exp(in_2x)| \leq \frac{2\pi}{d_2}.$$

Продолжая рассуждения дальше, построим последовательность вложенных отрезков $I_k=[2\pi a_k, 2\pi b_k]$, где

$$a_k = \frac{i_1-1}{n_2}+\frac{i_2-1}{n_2d_2}+\ldots+\frac{i_k-1}{n_2d_2\ldots d_k},$$

$$b_k = a_k+\frac{1}{n_2d_2\ldots d_k},$$

и отрезков $\Delta_k=n_kI_k$ таких, что $n_kx\in\Delta_k$ и $\widetilde{n}_k\widetilde{x}\in\Delta_k$, и, следовательно, таких, что при $x\in I_k$

$$|\exp(i\widetilde{n}_k\widetilde{x})-\exp(in_kx)| \leq \frac{2\pi}{d_k}\prod_{j=2}^{k-1}\left(\frac{\lambda_j}{d_j}\right) \ll \frac{1}{d_k}. \tag{28}$$

Положим $F(\widetilde{x})=\bigcap I_k$. Из (28) следует, что для $x=F(\widetilde{x})$ выполняется (27).

Покажем, что $mF([0,2\pi])=0$. Действительно, отрезок $[0,2\pi\widetilde{n}_k]$ содержит не более чем

$$\gamma_k = 1+\widetilde{n}_kd_k\cdot\prod_{j=2}^{k-1}\left(\frac{d_j}{\lambda_j}\right)$$

отрезков вида Δ_k длины

$$\frac{2\pi}{d_k}\prod_{j=2}^{k-1}\left(\frac{\lambda_j}{d_j}\right)$$

и поэтому $F([0,2\pi])$ покрывается не более чем γ_k отрезками вида I_k длины $2\pi(n_2d_2\ldots d_k)^{-1}$. Значит,

$$mF([0,2\pi]) \leq \gamma_k2\pi(n_2d_2\ldots d_k)^{-1} \leq 4\pi\cdot\widetilde{n}_k/n_k$$

и $mF([0,2\pi])=0$.

В качестве следствия получается

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $\{\widetilde{n}_k\}_{k=0}^{\infty}$ *и* $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ *удовлетворяют условиям леммы* 10 *и функция* F *определена как в лемме* 10. *Если последовательность* $\{c_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ $(c_{-k}=\overline{c}_k)$ *ограничена, то ряд*

$$\sum c_k\exp(i\widetilde{n}_k\widetilde{x}) \quad (\widetilde{n}_{-k}=-\widetilde{n}_k) \tag{29}$$

равномерно равносходится на отрезке $[0,2\pi]$ *с рядом*

$$\sum c_k\exp(in_kx) \quad (n_{-k}=-n_k), \tag{30}$$

рассматриваемым на множестве $E=F([0,2\pi])$ *с* $mE=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Оно проводится аналогично доказательству теоремы 1. При каждом натуральном p положим

$$\widetilde{\Lambda}_m = \{3^{mp}+3^{k_1}+\ldots+3^{k_{p-1}} : k_j\in N_j,\ mp/2\leq k_j\leq mp\},$$

$$\widetilde{\Lambda}_{-m} = -\widetilde{\Lambda}_m,\quad N_j = \{pk+j\}_{k=0}^{\infty}\quad (j=0,\ldots,p-1).$$

Выберем p так, чтобы (см. доказательство теоремы 1) $\widetilde{\Lambda}_m^{\#}>i(m+1)-i(m)$, и рассмотрим такие множества $\Lambda_m\subset\widetilde{\Lambda}_m$, что $\Lambda_m^{\#}=i(m+1)-i(m)$. Наконец, положим

$$\widetilde{\Lambda} = \{\widetilde{n}_k\}_{k=-\infty}^{\infty} = \bigcup_{m=-\infty}^{+\infty}\Lambda_m.$$

Повторяя рассуждения теоремы 1, получаем, что если ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(i\widetilde{n}_k\widetilde{x})\quad (\widetilde{n}_{-k}=-\widetilde{n}_k) \tag{31}$$

сходится на $[0,2\pi]$, то

$$\sum |c_k|\varphi(|k|) < +\infty.$$

Используя лемму 8, находим, что для любой последовательности $\chi(k)\uparrow+\infty$ и любой точки $x_0\in[0,2\pi]$ существует последовательность $\{b_k\}$ такая, что ряды

$$\sum b_k \sin\widetilde{n}_k\widetilde{x},\qquad \sum b_k\sin n_k x_0 \tag{32}$$

сходятся, причем первый всюду и, кроме того,

$$\sum |b_k|\varphi(k)\chi(k) = +\infty. \tag{33}$$

Из условия (4) находим, что существует $x_0\in[0,2\pi]$ такое, что $|\sin n_k x_0|\geq B_0>0$ при всех k. Положим $E=F([0,2\pi])\cup\{x_0\}$ и покажем, что E – искомое множество.

Так как $0\in E$, то из сходимости ряда

$$\sum c_k \exp in_k x = \sum a_k\cos n_k x + b_k\sin n_k x \tag{34}$$

на E следует, что $\lim a_k=0$. Поэтому сходимость ряда (34) в точке x_0 влечет $\lim b_k=0$. Но тогда из сходимости ряда (34) на E следует согласно теореме 3 сходимость ряда (31) на $[0,2\pi]$ и, значит,

$$\sum |c_k|\varphi(|k|) < +\infty.$$

Если положим в (34) $a_k=0$, а b_k выберем как в (32), то получим сходящийся на E ряд вида (34), для которого выполняется (33). Нетрудно проверить, что $\ln\widetilde{n}_k \ll k^{1/p}$. Поэтому $mE=0$ и теорема доказана.

В заключение отметим, что построенное в теореме 2 множество E имеет и размерность Хаусдорфа, равную нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Качмаж С. и Штейнгауз Г. *Теория ортогональных рядов.* – М., Физматгиз, 1958. – 508 с.

2. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша.* – М.: Наука, 1987. – 244 с.

3. Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И. *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах.* – Баку: Элм, 1979. – 180 с.

4. Лукомский С.Ф. *О коэффициентах рядов, сходящихся на множествах нулевой меры.* – СГПИ. – Саратов, 1982. – 11 с. – Деп. в ВИНИТИ 02.08.82, № 4149–82.

5. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. *Лекции по функциональному анализу.* – М.: Мир, 1979. – 587 с.

6. Лукомский С.Ф. *Об абсолютной сходимости кратных рядов Уолша* // Изв. вузов. Математика. – 1988. – № 4. – С.34–36.

7. Бари Н.К. *Тригонометрические ряды.* – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.

8. Кахан Ж.-П. *Случайные функциональные ряды.* – М.: Мир, 1973. – 302 с.

Саратовский педагогический институт

Поступила
04.05.1994