# МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

*М. И. Фрейдлин*

## ВВЕДЕНИЕ

В последние годы в теории эллиптических и параболических уравнений второго порядка широкое применение получили вероятностные методы. Существование тесных связей между дифференциальными уравнениями второго порядка и марковскими случайными процессами было известно давно. Уже в работе А. Н. Колмогорова «Об аналитических методах теории вероятностей» (1931 г.), в которой впервые точно вводится понятие марковского процесса с непрерывным временем и непрерывным пространством состояний, выписываются параболические уравнения для вероятностей перехода. В работе И. Г. Петровского [127] (1934 г.) дается представление решения задачи Дирихле как среднего значения некоторого функционала от траекторий соответствующего марковского процесса. В дальнейшем вероятностное представление решений дифференциальных уравнений обобщалось и уточнялось Дубом [95], Какутани [116], Е. Б. Дынкиным [28] и другими авторами. Однако до последнего десятилетия связь между дифференциальными уравнениями и марковскими процессами использовалась преимущественно в одну сторону — из свойств решений дифференциальных уравнений делались выводы о соответствующих марковских процессах. Даже доказательство существования марковского процесса с заданными характеристиками проводилось с помощью теоремы существования для соответствующего параболического дифференциального уравнения.

Положение существенно изменилось в последнее время. Бурное развитие прямых вероятностных методов исследования марковских процессов дало возможность строить и изучать марковские процессы без обращения к дифференциальным уравнениям. Наоборот, прямое построение траекторий позволяет строить решения дифференциальных уравнений и изучать их свойства.

Выражаясь несколько неточно, можно сказать, что траектории марковских процессов играют для эллиптических и параболических уравнений второго порядка такую же роль, какую для уравнений первого порядка играют характеристики. И так же как теория характеристик делает геометрически наглядными уравнения первого порядка, так и вероятностные рассмотрения делают наглядными целый ряд задач теории эллиптических и параболических уравнений второго порядка.

В первом параграфе настоящей работы вводятся основные вероятностные понятия, необходимые при изучении теории дифференциальных уравнений. Вместе с теорией полугрупп (см., например, Е. Б. Дынкин [22, 28]) это прежде всего стохастические дифференциальные уравнения, которые являются очень удобным средством построения и изучения траекторий марковских процессов. Эти уравнения были введены независимо Ито [111] и И. И. Гихманом [18]. Чрезвычайно важными для всей теории стали концепция марковского процесса, введенная в работах Е. Б. Дынкина [24, 26], и понятие строгой марковости ([24, 34]), а также связи между решениями эллиптических уравнений и теорией мартингалов, замеченные впервые Д. Дубом [93]. Полезными оказались также такие преобразования марковских процессов, как случайная замена времени (см., например, В. А. Волконский [9]) и абсолютно непрерывная замена меры (см. И. В. Гирсанов [13], А. В. Скороход [53]).

Большая часть представленных в обзоре работ принадлежит советским авторам. Этот факт отражает реальное положение вещей — наши математики в области применения вероятностных методов к дифференциальным уравнениям занимают ведущее положение.

Заметим, наконец, что в основном обзор посвящен тем вероятностным идеям, которые помогают решать классические задачи теории дифференциальных уравнений. В значительно меньшей степени представлены обобщения классической теории, естественным образом получающиеся на основе теории марковских процессов (прежде всего теория потенциала (см., например, Хант [106])).

## § 1. ПОСТРОЕНИЕ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Случайным процессом называется функция $x(t, \omega) = x_t(\omega)$ со значениями в $n$-мерном пространстве $R_n$, определенная при $t \geqslant 0$ и $\omega \in \Omega$. Здесь $\Omega$ — некоторое пространство, на котором задана вероятностная мера $P$. При каждом фиксированном $t \geqslant 0$ $x_t(\omega)$ есть случайная величина, т. е. функция, измеримая по мере $P$. При фиксированном $\omega$ получаем функцию от $t$, называемую реализацией или траекторией. Таким образом, случайный процесс индуцирует отображение пространства с мерой $\{\Omega, P\}$ в пространство функций. Это отображение сопоставляет каждому случайному процессу меру в пространстве функций. Мы будем интересоваться случайными процессами специального типа — марковскими процессами. Выражаясь несколько неточно, марковским процессом называется случайный процесс, для которого поведение траектории после момента $t$ не зависит от поведения до момента $t$, при условии, что положение траектории в момент $t$ известно. Точное определение достаточно сложно, и мы его приводить не будем [28].

Простейшим марковским процессом является детерминированное движение с постоянной скоростью $x_t = bt + x_0$. Рассмотрим еще один пример марковского процесса, который в дальнейшем играет центральную роль. Случайный процесс $\xi_t(\omega)$ со значениями в $R_1$ назовем винеровским, если его приращения за непересекающиеся промежутки времени независимы и имеют гауссовское распределение с нулевым средним и дисперсией, равной разности между конечным и начальным моментом времени

$$P\{\xi_t(\omega) - \xi_s(\omega) < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2(t-s)}} dz.$$

Мы считаем, что $\xi_0(\omega) = 0$ с вероятностью 1. Доказывается (см., например, [20]), что траектории винеровского процесса с вероятностью 1 непрерывны, хотя и нигде не дифференцируемы. Марковость процесса $\xi_t(\omega)$ является очевидным следствием независимости приращений этого процесса. Набор $\xi_t(\omega) = \{\xi_t^1, \xi_t^2, \ldots, \xi_t^n\}$ из $n$ независимых одномерных винеровских процессов назовем $n$-мерным винеровским процессом.

Широкий класс марковских процессов можно построить с помощью следующей конструкции. Предположим, что приращение процесса $dx_t$ за время $dt$ есть линейная комбинация случайной составляющей $\sigma(t, x_t)\, d\xi_t$ и детерминированной

$b(t, x_t)\,dt$:

$$dx_t = \sigma(t, x_t)\,d\xi_t + b(t, x_t)\,dt. \tag{1.1}$$

Коэффициенты этой комбинации зависят от положения траекторий в момент $t$. В многомерном случае $\sigma(t, x)$ — матрица, $b(t, x)$ — вектор. Равенство (1.1) представляет собой некоторое обыкновенное дифференциальное уравнение. Для того, чтобы выделить одно решение этого уравнения, необходимо задать начальное условие $x_0(\omega) = x$. Без дополнительных пояснений уравнение (1.1) не имеет точного смысла, так как $\xi_t$ не дифференцируема. Чтобы придать смысл равенству (1.1), проинтегрируем его от 0 до $t$. С учетом начального условия получим

$$x_t(\omega) - x = \int_0^t \sigma(s, x_s)\,d\xi_s + \int_0^t b(s, x_s)\,ds. \tag{1.2}$$

Первый интеграл в правой части понимается как стохастический (см. Ито [111], Дуб [20]). Напомним свойства стохастического интеграла:

1. Стохастический интеграл $\int_0^T \Phi(s, \omega)\,d\xi_s$ определен для функций $\Phi(s, \omega)$ таких, что $\int_0^T M\Phi^2(s, \omega)\,ds < \infty$, функция $\Phi(s, \omega)$ предполагается, кроме того, не зависящей от будущего, т. е. события $\{\Phi(t, \omega) < a\}$ предполагаются измеримыми относительно $\sigma$-алгебры событий, определяемых по поведению процесса $\xi_s$ за время $[0, t]$.

2. Стохастический интеграл есть линейный непрерывный в среднем квадратичном функционал от подынтегральной функции.

3. $$M\int_0^t \Phi(s, \omega)\,d\xi_s = 0, \quad M\left\{\int_0^t \Phi_1(s, \omega)\,d\xi_s\right\} \times$$
$$\times \left\{\int_0^t \Phi_2(s, \omega)\,d\xi_s\right\} = \int_0^t M\Phi_1(s, \omega)\,\Phi_2(s, \omega)\,ds.$$

4. $$P\left\{\sup_{t \leqslant T}\left|\int_0^t \Phi(s, \omega)\,d\xi_s\right| > a\right\} \leqslant \frac{1}{a^2}\int_0^T M\Phi^2(s, \omega)\,ds.$$

Это неравенство есть обобщение неравенства Колмогорова.

Если предполагать, что коэффициенты уравнения (1.2) растут не очень быстро и удовлетворяют условию Липшица, то, аналогично обыкновенным дифференциальным уравнениям, (1.2) можно решать методом последовательных приближений [20], [111]. В этом случае уравнение (1.2) будет иметь единственное решение $x_t(\omega)$. Функции $x_t(\omega)$ будут с вероятностью 1 непрерывны и образуют марковский процесс. Решение уравнения (1.2) существует и при более слабых предположениях относительно коэффициентов. Как и в классическом случае решение существует, если коэффициенты непрерывны [54, 136]. В этом случае метод последовательных приближений неприменим и приходится пользоваться аналогом метода Пеано. Если матрица $\{\sigma_{ij}(t, x)\}$ не вырождается и коэффициенты непрерывны, то решение единственно и определяет марковский процесс [45]. В невырождающемся случае решение существует и в случаях разрывных коэффициентов, если только разрывы не очень плохие [15]. Уравнения с разрывными коэффициентами рассматриваются также в работе Н. В. Крылова [45].

Два случайных процесса естественно считать эквивалентными, если они индуцируют одинаковые распределения в пространстве функций. Двум разным стохастическим уравнениям*) могут соответствовать эквивалентные процессы. Оказывается, что двум стохастическим уравнениям соответствуют эквивалентные процессы, если коэффициенты этих уравнений $\sigma^{(1)}(x)$, $b^{(1)}(x)$ и $\sigma^{(2)}(x)$, $b^{(2)}(x)$ удовлетворяют равенствам

$$\{a_{ij}(x)\} = \{\sigma^{(1)}(x)\}\{\sigma^{(1)}(x)\}^* = \{\sigma^{(2)}(x)\}\{\sigma^{(2)}(x)\}^*,$$
$$b^{(1)}(x) = b^{(2)}(x).$$

Таким образом, марковский процесс определяется матрицей $\{a_{ij}(x)\}$ — матрицей диффузии и вектором $b(x)$ — вектором переноса.

Стохастические уравнения (1.2) дают возможность строить случайный процесс во всем пространстве или на замкнутом многообразии. Если мы хотим построить процесс в области $D \subset R_n$, то стохастическое уравнение (1.2) дает возможность определить его траектории до первого момента достижения границы $\Gamma$ области $D$. На границе должны быть заданы дополнительные условия поведения траекторий после достижения границы. При этом мы интересуемся только такими способами поведения на границе, при которых процесс остается марковским. А. Д. Вентцелем [6, 7] найдены наиболее общие условия, которые можно задавать на границе в многомерном случае. Одномерный случай ранее был изучен Феллером [101, 102] и А. Д. Вентцелем. Эти условия, выражаясь несколько

*) В дальнейшем мы будем рассматривать только стохастические уравнения, коэффициенты которых не зависят от $t$.

неточно, допускают следующие способы поведения траекторий: траектория может отразиться внутрь области, может совершать диффузионное движение вдоль границы, может исчезнуть или остановиться. Кроме этих условий и их комбинаций, не нарушающих непрерывности процесса, возможны условия, приводящие к разрывам — траектория, дойдя до границы, может совершать скачки внутрь области или на границу с некоторым распределением. Аналитически результат А. Д. Вентцеля можно сформулировать как нахождение наиболее общих граничных условий, при которых смешанная задача для параболического уравнения второго порядка имеет неотрицательное фундаментальное решение. Следует заметить, что А. Д. Вентцелем в [6] доказано только, что не может быть других условий, кроме сформулированных. Построение таких процессов в [6] отсутствует. Этому вопросу посвящен целый ряд работ. Для построения процессов возможны два пути. Первый путь связан с построением фундаментального решения смешанных задач для параболических уравнений с соответствующими граничными условиями. Таким образом строятся процессы с исходными вентцелевскими граничными условиями в работе Ито [115]. Основным недостатком такого способа построения процессов является неестественное предположение о невырожденности матрицы $\{a_{ij}(x)\}$ — матрицы диффузии, и требование излишней гладкости коэффициентов. Возможен более прямой способ построения процессов с заданными граничными условиями. Для этого можно использовать стохастические уравнения.

Стохастическое уравнение для одномерного процесса с отражением впервые построено А. В. Скороходом [57] (см. также [124]). Многомерный процесс с отражением построен с помощью стохастических уравнений в работах И. В. Гирсанова [16] и М. И. Фрейдлина [65, 67]. Специальный случай рассмотрен Икеда [107]. В [16] выписано стохастическое уравнение процесса с отражением. Это уравнение имеет такой же вид, как обычное, только в нем имеются члены вида $\int_0^t \delta(x_s)\,ds$, где $\delta(x)$ — $\delta$-функция, сосредоточенная на границе области. С помощью стохастических уравнений можно построить и некоторые другие процессы с граничными условиями, однако диффузионные процессы с общими граничными условиями до настоящего времени не построены. В этом направлении определенный интерес представляют работы Уэно [138] и Сато [134], где построение процесса в области с общими граничными условиями сводится к построению некоторого процесса на границе. Этот процесс на границе уже не будет непрерывным, но построение его траекторий тоже можно проводить с помощью стохастических уравнений, дополненных членами, описывающими скачки процесса.

Итак, пусть задан марковский процесс. Если мы хотим отметить, что рассматривается траектория, начинающаяся в точке $x$, то мы будем писать индекс $x$ сверху — $x_t^x(\omega)$. Иногда мы будем писать индекс $x$ в обозначении вероятности, указывая тем самым, что рассматривается вероятность для траекторий, выходящих из точки $x$. Например, $P_x\{x_t \in \Gamma\}$ — вероятность того, что траектория, исходя из $x$, в момент $t$ будет находиться в $\Gamma$. Аналогично принято употреблять индекс $x$ у математического ожидания. Например, $M_x\{\inf\{t: x_t \bar{\in} D\}\}$ — математическое ожидание случайной величины — времени, необходимого для первого достижения траекторией, исходящей из $x$, внешности множества $D$. Марковский процесс будем обозначать одной буквой $X$, подразумевая под этим траектории $x_t(\omega)$ и вероятность $P_x: X = \{x_t(\omega), P_x\}$. Марковские процессы во всем пространстве или в ограниченной области $D$, траектории которых являются решениями уравнения (1.2) (при $t \leqslant \tau = \inf\{t: x_t \bar{\in} D\}$, если $D \neq R_n$), называются диффузионными.

Вероятность $P(t, x, \Gamma) = P_x\{x_t \in \Gamma\}$ называется переходной функцией марковского процесса $X$. Марковские переходные функции удовлетворяют следующему соотношению

$$P(s+t, x, \Gamma) = \int_{R_n} P(s, x, dy)\, P(t, y, \Gamma). \tag{1.3}$$

Это соотношение называется уравнением Чепмена — Колмогорова. Определим семейство операторов $T_t$ равенством $T_t f(x) = M_x f(x_t)$. Здесь $t \geqslant 0$, $f(x)$ — ограниченная измеримая функция на фазовом пространстве. Банахово пространство таких функций с нормой $\|f(x)\| = \sup\limits_{x \in R_n} |f(x)|$ обозначим через $B$. Из (1.3) следует, что семейство операторов $T_t$ образует полугруппу: $T_t T_s = T_{t+s}$. Легко проверить, что эта полугруппа не увеличивает норму ($\|T_t f(x)\| \leqslant \|f(x)\|$) и сохраняет положительность (если $f(x) \geqslant 0$, то $T_t f(x) \geqslant 0$). Полугруппы, переводящие непрерывные функции в непрерывные, называются феллеровскими. Если полугруппа переводит все пространство $B$ в непрерывные функции, то она называется сильно феллеровской. Марковские процессы, соответствующие феллеровским и сильно феллеровским полугруппам обладают многими хорошими свойствами ([21, 24, 28] и [11]).

Соотношение $Af = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(T_t f - f)$ определяет инфинитезимальный оператор $A$ полугруппы $T_t$. Предел в последнем равенстве можно понимать по-разному, в соответствии с этим получим сильный (предел по норме) или слабый инфинитезимальный оператор. Сильный инфинитезимальный оператор называется инфинитезимальным оператором марковского процесса $X$. Обозначим через $D_A$ область определения инфинитезимального оператора $A$ процесса $X$. Для диффузионных процессов множество $D_A$ достаточно обширно. Покажем, что для процессов во всем пространстве оно содержит все функции, имеющие две непрерывные ограниченные во всем пространстве производные. В самом деле, пусть $X$ — процесс, определяемый уравнением (1.2), $f(x) \in C^2$. Применив формулу Ито*) [109] (см. также [19, 28]), получим

$$f(x_t) - f(x) = \int_0^t (\nabla f(x_s), \sigma(x_s)\, d\xi_s) +$$

$$+ \int_0^t \left[ \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sum_k \sigma_{ik}(x_s)\, \sigma_{jk}(x_s) \frac{\partial^2 f(x_s)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i(x_s) \frac{\partial f(x_s)}{\partial x_i} \right] ds.$$

Если функция, стоящая под вторым интегралом, непрерывна, то

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t f(x) - f(x)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{M_x[f(x_t) - f(x)]}{t} =$$

$$= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t M \left[ \frac{1}{2} \sum a_{ij}(x_s) \frac{\partial^2 f(x_s)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i(x_s) \frac{\partial f(x_s)}{\partial x_i} \right] ds =$$

$$= \frac{1}{2} \sum a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x},$$

где матрица $\{a_{ij}(x)\}$ определяется равенством

$$\{a_{ij}(x)\} = \{\sigma_{ij}(x)\}\{\sigma_{ij}(x)\}^*.$$

*) Эта формула является естественным обобщением на случай стохастических интегралов формулы Ньютона—Лейбница. Чтобы доказать ее, напишем выражение для $df(x_t) = f(x_{t+dt}) - f(x_t)$ по формуле Тейлора:

$$df(x_t) = (\nabla f(x_t),\ dx_t) + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 f(x_s)}{\partial x_i \partial x_j} dx_t^i dx_t^j + \ldots =$$

$$= (\nabla f(x_s),\ \sigma(x_s)\, d\xi_s) + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^{n} \sigma_{ij}(x_t)\, \sigma_{jk}(x_t) \frac{\partial^2 f(x_s)}{\partial x_i \partial x_k} d\xi^k +$$

$$+ (\nabla f(x_t),\ b(x_t)\, dt) + \ldots .$$

Интегрируя полученное равенство с учетом того, что члены замененные точками, имеют порядок $o(dt)$, получим формулу К. Ито.

Таким образом, мы доказали, что $C^2 \subset D_A$ и для $f(x) \in C^2$

$$Af(x) = \frac{1}{2} \sum a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Более точно область определения оператора $A$ описывается в терминах соболевских пространств (см. Крылов [45]).

Если $X$ есть процесс в области, отличной от всего пространства, то область определения инфинитезимального оператора содержит все дважды непрерывно дифференцируемые функции $f(x)$, удовлетворяющие определенным условиям на границе. Так, например, если рассматривается процесс с отражением по направлению $l(x)$ на границе $\Gamma$ области $D$, то $D_A$ содержит все дважды непрерывно дифференцируемые функции $f(x)$ с условием $\left.\frac{\partial f}{\partial l(x)}\right|_{x \in \Gamma} = 0$ [67]. Исчезновение на границе приводит к условию $f(x)|_\Gamma = 0$; скачкообразное поведение — к заданию некоторых интегралов от функции $f(x)$ [6].

Инфинитезимальный оператор процесса, вообще говоря, не является локальным оператором, что создает некоторые неудобства. Очень полезным оказался, введенный Е. Б. Дынкиным в [21] (см. также [24, 28]) характеристический оператор, определяемый формулой

$$\mathfrak{A}f(x) = \lim_{U(x) \downarrow x} \frac{M_x f\left(x_{\tau_{U(x)}}\right) - f(x)}{M_x \tau_{U(x)}},$$

где $U(x)$ — произвольная окрестность точки $x$, $\tau$ — первый момент достижения множества $R_n \setminus U(x)$. Из определения следует, что $\mathfrak{A}$ — локальный оператор. Доказывается, что $A \subset \mathfrak{A}$ и для непрерывных феллеровских процессов на компактном фазовом пространстве $A = \mathfrak{A}$. Заметим, что оператор $\mathfrak{A}$ определяется с помощью осреднения, и этим он напоминает определение оператора Лапласа через предел средних по сфере.

Чрезвычайно важным для применения вероятностных методов в теории дифференциальных уравнений оказалось открытое и изученное в работах Е. Б. Дынкина и А. А. Юшкевича [34], Е. Б. Дынкина [28], Блюменталя [19], А. А. Юшкевича [90] строго марковское свойство. Прежде чем его формулировать, введем класс случайных величин, не зависящих от будущего для процесса $X = \{x_t(\omega), P_x\}$. Говорят, что случайная величина $\beta > 0$ не зависит от будущего, если событие $\{\beta(\omega) < t\}$ измеримо относительно $\sigma$-алгебры, порожденной событиями $\{x_s \in \Gamma\}$ при $s < t$. Иными словами, величина $\beta$ не зависит от будущего, если событие $\{\beta < t\}$ определяется по поведению процесса до момента $t$. Важнейшим примером случайных величин, не зависящих от будущего, являются моменты первого попадания в некоторое множество. Перейдем теперь к описанию понятия строгой марковости. Процесс $X=\{x_t, P_x\}$ мы назовем строго марковским, если для любой случайной величины $\beta$, не зависящей от будущего, поведение его траекторий до момента $\beta$ не зависит от поведения после момента $\beta$ при условии, что положение в момент $\beta$ известно. Существуют примеры, показывающие, что марковские процессы не обязательно являются строго марковскими. В [34] (см. также [28]) доказывается, что непрерывные феллеровские марковские процессы являются строго марковскими. Таким образом, процессы, траектории которых во всем пространстве удовлетворяют уравнениям (1,2) с липшицевыми коэффициентами, оказываются строго марковскими. При естественных ограничениях процессы в ограниченных областях также строго марковские.

В теории эллиптических дифференциальных уравнений есть много утверждений, при доказательстве которых основную роль играют старшие производные. Наличие младших членов, хотя оно и приводит к некоторым дополнительным трудностям, не является существенным. Теоретико-вероятностной причиной таких фактов, в определенном смысле, является абсолютная непрерывность мер в пространстве функций, соответствующих двум диффузионным процессам, отличающимся только переносом. Точная формулировка такова. Пусть есть два стохастических уравнения $dx_t=\sigma(x_t)\,d\xi_t+b_1(x_t)\,dt$ и $dy_t=\sigma(y_t)\,d\xi_t+b_2(y_t)\,dt$ с одинаковыми начальными условиями $y_0=x_0$. Предположим, что система линейных алгебраических уравнений $\Sigma\sigma_{ij}(x)\varphi_i(x)=b_2(x)-b_1(x)$, $i, j=1, \ldots, n$, при любом $x \in R_n$ имеет решение и $\Sigma\varphi_i^2(x)<K<\infty$. Тогда меры в пространстве функций $x(t)$ при $t\in[0, T]$, индуцированные процессами $x_t$ и $y_t$ ($\mu_x$ и $\mu_y$ соответственно), абсолютно непрерывны друг по друг и плотность одной меры по другой задается формулой

$$\frac{d\mu_y}{d\mu_x}=\exp\left\{\int_0^T\sum_{i=1}^n\varphi_i(x_s)\,d\xi_s^i-\frac{1}{2}\int_0^T\sum\varphi_i^2(x_s)\,ds\right\}.$$

Заметим, что ограниченные функции $\{\varphi_i(x)\}$ существуют всегда, когда матрица $\{\sigma_{ij}(x)\}$ не вырождается и $\|b_1(x)\|$, $\|b_2(x)\|$ ограничены. Абсолютная непрерывность мер, соответствующих диффузионным процессам, изучалась в [13] и [53]. Абсолютная непрерывность может оказаться полезной при изучении дифференциальных уравнений. Например, из того, что прибавление младших членов в операторе приводит к абсолютно непрерывной замене меры, сразу следует, что младшие члены в невырожденном случае не влияют на регулярность граничной точки.

С помощью абсолютно непрерывной замены меры можно от одного марковского процесса перейти к другому, отличающемуся от первоначального переносом. Другой способ преобразования марковских процессов дает случайная замена времени [9]. Это преобразование соответствует умножению производящего оператора процесса на неотрицательную функцию. Весьма общий класс преобразований марковских процессов разобран в [28].

Перейдем теперь к вероятностному представлению решений дифференциальных уравнений. Мы будем предполагать, что в $R_n$ имеется невырождающийся эллиптический оператор

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}+c(x).$$

Коэффициенты его предполагаются достаточно гладкими и ограниченными. Обозначим через $\sigma(x)$ матрицу с гладкими коэффициентами, удовлетворяющую соотношению $\sigma(x)\sigma^*(x)=\{a_{ij}(x)\}$. Такая матрица существует (см. Ито [110]). Рассмотрим марковский процесс $X$, траектории которого удовлетворяют стохастическому уравнению

$$x_t-x=\int_0^t\sigma(x_s)\,d\xi_s+\int_0^t b(x_s)\,ds. \qquad (1.4)$$

При сделанных предположениях решение уравнения (1.4) существует и единственно. Оказывается, что решение задачи Коши и первой краевой задачи, связанной с оператором $L$, записывается как математическое ожидание некоторого функционала от процесса $X$.

Доказывается, что если $f(x)\in C$, то функция

$$u(t,\ x)=M_x f(x_t)\ \exp\left\{\int_0^t c(x_s)\,ds\right\},$$

если она гладкая, есть единственное решение задачи Коши*)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Au=Lu,\ u(0,\ x)=f(x). \qquad (1.5)$$

Этот факт, по существу, лежит в основе известного способа построения марковских процессов. А именно, из теоремы су-

*) Если оператор $L$ вырождается, то функция $u$ не обязана быть гладкой. В этом случае она будет только обобщенным решением. Это решение единственно в классе функций, принадлежащих $D_A$.

ществования для задачи (1.5) следует существование полугруппы $T_t f(x)$. Если к тому же эта полугруппа обладает некоторыми хорошими свойствами, то по ней можно построить процесс.

Пусть теперь есть область $D \subset R_n$ с границей Г. Рассмотрим задачу Дирихле

$$Lu(x) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in D; \quad u(x)|_{x \in \Gamma} = \psi(x).$$

Решение этой задачи может быть записано в следующем виде:

$$u(x) = -M_x \int_0^{\tau} e^{\int_0^t c(x_s)ds} f(x_t)\,dt + M_x \psi(x_\tau) e^{\int_0^{\tau} c(x)ds}, \tag{1.6}$$

где $\tau = \inf\{t: x_t \overline{\in} D\}$. Эта формула имеет смысл при $c(x)$, не превосходящих некоторого неотрицательного числа (первого собственного значения задачи). Следует только отметить, что для того чтобы функция $u(x)$ принимала граничные значения, необходимо положить некоторые условия на границу области и на поведение в ее окрестности оператора $L$. Точку $x_0 \in \Gamma$ мы назовем регулярной для процесса $X$, если $\lim\limits_{x \to x_0,\, x \in D} P_x\{|x_\tau - x_0| > \varepsilon\} = 0$ при любом $\varepsilon > 0$. Оказывается, что сформулированное понятие регулярности по существу совпадает с понятием регулярности, известным в теории дифференциальных уравнений (см., например, [75]). Функция $u(x)$, определяемая формулой (1.6), принимает граничные значения во всех регулярных точках непрерывности граничной функции.

Аналогичное представление имеется для решения смешанной задачи

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = Lv, \quad x \in D,$$
$$v(0, x) = f(x), \; v(t, x)|_{x \in \Gamma} = \psi(x). \tag{1.7}$$

Положим $\tau_t = \min(t, \inf\{s: x_s \overline{\in} D\})$. Тогда функция $v(t, x) = M_x \varphi(x_{\tau_t}) \exp\left\{\int_0^{\tau_t} c(x_s)\,ds\right\}$ удовлетворяет уравнению (1.7). Здесь

$$\varphi(x_{\tau_t}) = \begin{cases} f(x_t) & \text{при } \tau > t, \\ \psi(x_\tau) & \text{при } \tau \leqslant t. \end{cases}$$

Для того, чтобы функция $v(t, x)$ принимала граничные значения, необходимо сделать некоторые предположения о регулярности граничных точек. Приведенные представления решений можно найти в [28].

Перейдем к вероятностному представлению решения задачи с косой производной. Пусть в $R_n$ имеется ограниченная область $D$ с гладкой границей $\Gamma$ и гладкое векторное поле $l(x)$ на $\Gamma$. Предполагается, что поле $l(x)$ нигде не касается $\Gamma$. Рассмотрим задачу

$$Lu(x) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial l(x)}\right|_{x \in \Gamma} = 0. \tag{1.8}$$

Обозначим через $X$ процесс в области $D$ с отражением по направлению $l(x)$. Предположим, что $c(x) < -\alpha < 0$. Тогда задача (1.8) имеет решение при любой ограниченной гёльдеровской $f(x)$ и функция $u(x)$ может быть представлена в виде:

$$u(x) = M_x \int_0^\infty f(x_s) \exp\left\{\int_0^s c(x_t)\,dt\right\} ds.$$

Если $c(x) \equiv 0$, то задача (1.8) имеет решение уже не при всякой правой части. Для разрешимости (1.8) необходимо потребовать чтобы $\int_D f(x)\mu(x)\,dx = 0$, где $\mu(x)$ — единственное положительное решение уравнения $L^*\mu = 0$ с условием $\int_D \mu(x)\,dx = 1$. Если это последнее условие выполнено, то $M_x f(x_t)$ с ростом $t$ экспоненциально быстро убывает и функция $u(x)$ представляется в виде

$$u(x) = \int_0^\infty M_x f(x_t)\,dt.$$

Вероятностное представление решения задачи с косой производной изучалось в работе М. И. Фрейдлина [67]. Случай однородного уравнения с неоднородным граничным условием рассматривался Икеда [107] и Ватанабе [141]. Вероятностные представления имеются также для смешанной задачи с условием отражения на границе, для задачи в области, на части границы которой задано условие отражения, а на части — условие Дирихле (см. [63]); имеется вероятностное представление для задачи с условием

$$\alpha(x)u(x) + \beta(x)\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{x \in \Gamma} = 0.$$

## § 2. МАЛЫЙ ПАРАМЕТР В ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Рассмотрим задачу Коши для параболического уравнения

$$\frac{du^\varepsilon}{dt} = \varepsilon^2 L_1 u^\varepsilon(t, x) + L_2 u^\varepsilon(t, x), u^\varepsilon(0, x) = f(x). \tag{2.1}$$

Здесь

$$L_1 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}; \quad L_2 = \sum B_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Коэффициенты операторов и начальная функция предполагаются достаточно гладкими. Как объяснялось ранее решение задачи (2.1) может быть записано в виде

$$u^\varepsilon(t, x) = Mf(x_t^\varepsilon(x, \omega)),$$

где $x_t^\varepsilon(x, \omega)$—марковский процесс, управляемый оператором $L^\varepsilon = \varepsilon^2 L_1 + L_2$. Траектории $x_t^\varepsilon(x, \omega)$ получаются как решения стохастического уравнения

$$x_t^\varepsilon - x = \int_0^t \sigma(x_s^\varepsilon)\, d\xi_s + \int_0^t B(x_s^\varepsilon)\, ds, \tag{2.2}$$

где $\sigma(x)\sigma^*(x) = \{a_{ij}(x)\}$, $B(x) = \{B_1(x), \ldots, B_n(x)\}$. При стремлении $\varepsilon$ к нулю влияние «случайного» члена в уравнении (2.2) становится все меньше и меньше, поэтому, как это обычно бывает в обыкновенных дифференциальных уравнениях, следует ожидать, что решение уравнения (2.2) будет сходиться в определенном смысле к неслучайной функции $x_t^0(x)$ — решению уравнения

$$x_t^0 - x = \int_0^t B(x_s^0)\, ds. \tag{2.3}$$

Покажем, что $x_t^\varepsilon \to x_t^0(x)$ в среднем квадратичном. Вычитая (2.3) из (2.2), получим

$$x_t^\varepsilon - x_t^0 = \varepsilon \int_0^t \sigma(x_s^\varepsilon)\, d\xi_s + \int_0^t [B(x_s^\varepsilon) - B(x_s^0)]\, ds. \tag{2.4}$$

Возведем равенство (2.4) скалярно в квадрат, воспользуемся неравенством $(a+b)^2 < 2a^2 + 2b^2$ и свойствами стохастических интегралов

$$M \mid x_t^\varepsilon(x, \omega) - x_t^0(x) \mid^2 \leqslant 2\varepsilon^2 \int_0^t M \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij}^2 (x_s^\varepsilon)\, ds +$$

$$+ 2M \left[ \int_0^t (B(x_s^\varepsilon) - B(x_s^0))\, ds \right]^2 .$$

Из последнего неравенства получаем

$$M \mid x_t^\varepsilon - x_t^0 \mid^2 \leqslant 2\varepsilon^2 t n^2 K + 2Kt \int_0^t M \mid x_s^\varepsilon - x_s^0 \mid^2 ds, \qquad (2.5)$$

где через $K$ обозначена верхняя грань модулей коэффициентов и их производных. Из неравенства (2.5) следует, что $M \mid x_t^\varepsilon - x_t^0 \mid^2 \leqslant 2\varepsilon^2 tnK \exp\{Kt\} \to 0$ при $t \to 0$. Если начальная функция обладает достаточно хорошими свойствами непрерывности, например, если она имеет ограниченные во всем пространстве первые производные, то, воспользовавшись вероятностным представлением решения, легко теперь доказать, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u^\varepsilon (t, x) = f(x_t^0(x)).$$

В самом деле

$$\mid u^\varepsilon(t, x) - f(x_t^0(x)) \mid \leqslant M \mid f(x_t^\varepsilon(x)) - f(x_t^0(x)) \mid \leqslant$$

$$\leqslant \left[ \max_{i,x} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| M \mid x_t^\varepsilon - x_t^0 \mid^2 \right]^{\frac{1}{2}} \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Заметим теперь, что (2.3) есть уравнение характеристик для дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{i=1}^n B_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} . \qquad (2.6)$$

Отсюда следует, что функция $v(t, x) = f(x_t(x))$ есть решение уравнения (2.6). Из непрерывности $f(x)$ следует, что

$$\lim_{t \to 0} v(t, x) = f(x).$$

Таким образом, мы показали, что решение задачи (2.1) при $\varepsilon \to 0$ сходится к решению задачи Коши для уравнения (2.6).

Центральной частью приведенных рассуждений является доказательство непрерывной зависимости решения уравнения (2.2) от параметра. Если мы желаем изучить не только главный член $u_\varepsilon(t, x)$ при $\varepsilon \to 0$, но и получить разложение по степеням $\varepsilon$, то необходимо разложить по степеням малого параметра решение стохастического уравнения (2.2)

$$x_t^\varepsilon(x, \omega) = x_t^0(x) + \varepsilon x_t^{(1)}(x, \omega) + \ldots + \varepsilon^k x_t^{(k)}(x, \omega) + \ldots$$

Оказывается, что если коэффициенты оператора достаточно гладкие, то это разложение всегда возможно и при любом $k \geqslant 1$ первые $k$ коэффициентов разложения

$$(x_t^0(x), x_t^{(1)}(x, \omega), \ldots, x_t^{(k)}(x, \omega))$$

образуют $(k+1)$-мерный диффузионный процесс. Не представляет большого труда выписать для этого процесса систему стохастических дифференциальных уравнений. Эта система получается формальным дифференцированием уравнения (2.2) при $\varepsilon=0$. Например, для $(x_t^0(x), x_t^{(1)}(x, \omega))$ получим уравнения

$$x_t^0(x) - x = \int_0^t B(x_s^0)\,ds,$$

$$x_t^{(1)}(x, \omega) - x = \int_0^t \sigma(x_s^0)\,d\xi_s + \int_0^t \sum \frac{\partial B}{\partial x_i}(x_s^0)\,[x_s^{(1)}(x, \omega)]_i\,ds. \quad (2.7)$$

Чтобы получить систему для первых трех коэффициентов, надо к (2.7) приписать третье уравнение, которое получается из (2.2) двукратным дифференцированием при $\varepsilon = 0$, и т. д. Выпишем теперь разложение по степеням $\varepsilon$ для функции $u^\varepsilon(t, x)$

$$u^\varepsilon(t, x) = Mf(x_t^\varepsilon(x)) = M\,[f(x_t^0(x)) +$$
$$+ \varepsilon \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_t^0)\,[x_t^{(1)}(x, \omega)]_i +$$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{2}\left[\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_t^0)\,[x_t^{(1)}(x, \omega)]_i\,[x_t^{(1)}(x, \omega)]_j +\right.$$
$$\left.+ \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_t^0)\,[x_t^{(2)}(x, \omega)]_i\right] + \ldots$$

Такое дифференцирование законно, если коэффициенты оператора и начальная функция обладают ограниченными производными достаточно высокого порядка. Заметим, что коэффициент $a_k(t, x)$ при $\varepsilon^k$ в этом разложении имеет вид

$$a_k = Mf_k(x_t^0(x), \ldots, x_t^{(k)}(x, \omega)),$$

где $f_k$—некоторая функция, которая выражается через начальную функцию и коэффициенты оператора. Так как $(x_t^{(0)}, x_t^{(1)}, \ldots, x_t^{(k)})$ образуют марковский процесс, то функции $a_k(t, x)$ являются решениями некоторой цепочки задач Коши. Уравнения этих задач просто выписываются через системы вида (2.7).

Приведенные здесь результаты получены в работах Ю. Н. Благовещенского [2,3], Ю. Н. Благовещенского и М. И. Фрейдлина [5]. Отметим также работу Ю. Н. Благовещенского [3], где вероятностными методами изучается асимптотика фундаментального решения параболического уравнения при $\varepsilon \to 0$. Там же исследуются особенности этой асимптотики в случае вырождения матрицы $\{a_{ij}(x)\}$.

Обратимся теперь к эллиптическим задачам, содержащим малый параметр. Рассмотрим задачу Дирихле $L^\varepsilon u^\varepsilon(x) = 0$, $u^\varepsilon(x) \mid_\Gamma = \psi(x)$. Область $D$, в которой рассматривается задача, предполагается ограниченной, граница $\Gamma$ и функция $\psi(x)$ достаточно гладкими. Рассмотрим сначала самый простой случай — случай выхода характеристик уравнения $L_2 v(x) = 0$ на $\Gamma$. Мы предположим для простоты, что выполнено следующее условие (условие А): существует такое $\widetilde{T}$, что за время $\widetilde{T}$ характеристика, исходящая из любого $x \in D$, выходит из области $D$ и, что в точках выхода характеристик на $\Gamma$ проекция вектора $B(x)$ на нормаль к $\Gamma$ отлична от нуля. Решение задачи Дирихле $u^\varepsilon(x)$ представимо в виде $u^\varepsilon(x) = M_x \psi(x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon})$, где $x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}(x, \omega)$ — положение траектории марковского процесса, управляемого оператором $L^\varepsilon$ в момент первого выхода из области $D$. Если, как и раньше, обозначить $x_t^0(x)$ характеристику оператору $L_2$, выходящую из $x$, и через $T(x)$ — первый момент выхода $x_t^0(x)$ на $\Gamma$, то функция $v(x) = \psi(x^0_{T(x)}(x))$ есть, очевидно, решение задачи $L_2 v(x) = 0$, $v(x) \mid_{x \in \widetilde{\Gamma}} = \psi(x)$. Здесь $\widetilde{\Gamma}$ обозначает множество точек границы $\Gamma$, в которые входят характеристики. Мы покажем, что $\psi(x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}(x, \omega)) \to \psi(x^0_{T(x)})$ при $\varepsilon \to 0$ в среднем квадратичном. Отсюда очевидно следует, что $\lim\limits_{\varepsilon \to \infty} u^\varepsilon(x) = v(x)$.

Отличие от параболического случая состоит в том, что $\tau^\varepsilon$ — случайный момент, свой для каждой траектории, поэтому недостаточно убедиться в сходимости $x_t^\varepsilon(x, \omega)$ к $x_t^0(x)$ при фиксированном $t$. Покажем, что траектории $x_s^\varepsilon(x, \omega)$ по вероятности равномерно на любом конечном интервале времени сходятся к $x_s^0(x)$. Из (2. 4), пользуясь неравенством Колмогорова, получим

$$P\left\{\sup_{s<t}\left|x_s^\varepsilon(x,\omega)-x_s^0(x)\right|>\delta\right\}\leqslant P\left\{\varepsilon\sup_{s<t}\left|\int_0^s\sigma(x_u)\,d\xi_u\right|>\frac{\delta}{3}\right\}+$$

$$+P\left\{\left|\int_0^t\left(B(x_s^\varepsilon)-B(x_s^0)\right)ds\right|>\frac{\delta}{3}\right\}\leqslant\frac{9\varepsilon^2}{\delta^2}\int_0^t M\left|\sigma(x_s)\right|^2ds+$$

$$+\frac{9t}{\delta^2}\int_0^t M\left|B(x_s^\varepsilon)-B(x_s^0)\right|^2ds.$$

Принимая во внимание ограниченность коэффициентов и их производных, а также, что

$$\lim_{\varepsilon\to0}M\left[x_s^\varepsilon-x_s^0\right]^2=0 \tag{2.9}$$

равномерно по $s<t$, из (2.8) и (2.9) заключаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to0}P\left\{\sup_{s<t}\left|x_s^\varepsilon(x,\omega)-x_s^0(x)\right|>\delta\right\}=0. \tag{2.10}$$

Из условия (A) следует, что для каждого $x\in D$ и $\lambda<0$ найдутся такие $\mu$, $\alpha>0$, для которых выполнены следующие неравенства:

$$\rho\left(x^0_{T(x)+\mu}(x),\ D\right)>\alpha,$$

$$\inf_{s\leqslant T(x)-\mu}\rho\left(x_s^0(x),\ \Gamma\right)>\alpha,$$

$$\rho\left(x^0_{T(x)-\mu}(x),\ x^0_{T(x)+\mu}(x)\right)<\lambda.$$

Выберем в (2.10) $t=T+\delta$, $\delta=\min(\alpha,\lambda)$, Тогда из предыдущих неравенств и (2.10) получим:

$$\lim_{\varepsilon\to0}P_x\left\{\left|x_\tau^\varepsilon(x,\omega)-x^0_{T(x)}(x)\right|>\delta\right\}=0. \tag{2.11}$$

Из (2.11), пользуясь непрерывностью и ограниченностью $\psi(x)$, выводим, что $\psi\left(x_\tau^\varepsilon(x)\right)\to\psi\left(x^0_{T(x)}(x)\right)$ в среднем квадратичном, и, следовательно $\lim\limits_{\varepsilon\to0}u^\varepsilon(x)=u(x)$. Из доказательства легко усмотреть, что эта сходимость равномерна в каждой внутренней подобласти области $D$. Приведенные здесь результаты относительно задачи Дирихле можно найти в работах М. И. Фрейдлина [64, 71].

Рассмотрим теперь несколько более сложный случай, когда характеристики вырожденного уравнения не выходят на границу области. Предположим, что область $D$ делится плоскостью $x_1=0$ на две части и коэффициенты оператора $L_2$ имеют разрыв первого рода вдоль этой плоскости. Под решением задачи Дирихле для уравнения с разрывными коэффициентами мы понимаем функцию, непрерывную вместе со своими первыми производными в области $D$ и удовлетворяющую уравнению вне поверхности разрыва. Пусть характеристики оператора $L_2$ выходят на поверхность разрыва. Для того, чтобы описать предельное поведение решения при $\varepsilon \to 0$, положим $B_i^+(x)=\lim\limits_{x_1 \downarrow 0} B_i(x)$, $B_i^-(x)=\lim\limits_{x_1 \uparrow 0} B_i(x)$ и рассмотрим на плоскости $x_1 = 0$ векторное поле

$$\hat{B}(x) = \left\{0, \frac{B_2^+(x)}{B_1^+(x)} + \frac{B_2^-(x)}{B_1^-(x)}, \ldots, \frac{B_n^+(x)}{B_1^+(x)} + \frac{B_n^-(x)}{B_1^-(x)}\right\}. \tag{2.12}$$

Предположим, что интегральные кривые векторного поля $\hat{B}(x)$ выходят на границу $\hat{\Gamma}$ множества $D \cap \{x_1 = 0\}$. Тогда $\lim u^\varepsilon(x) = u(x)$ существует и функция $u(x)$ определяется следующими условиями: при $x_1 \neq 0$ она постоянна на характеристиках оператора $L_2$, при $x_1 = 0$ — постоянна на интегральных кривых векторного поля $\hat{B}(x)$ и принимает граничные значения в точках выхода интегральных кривых поля $\hat{B}(x)$ на $\hat{\Gamma}$. Чтобы пояснить происхождение поля $\hat{B}(x)$, заметим следующее. Если $\varepsilon$ достаточно мало и $x \in \{x: \varepsilon > x_1 > 0\}$, то основное влияние на движение частицы, описывающей траекторию процесса $X^\varepsilon$, оказывает поле $B^+(x)$; если $x \in \{x: 0 > x_1 > -\varepsilon\}$, то — поле $B^-(x)$. Векторное поле $\hat{B}(x)$ есть линейная комбинация проекций полей $B^+(x)$ и $B^-(x)$ на плоскость $\{x_1 = 0\}$. Коэффициенты этой линейной комбинации выбраны так, чтобы каждое из этих полей учитывалось пропорционально времени, которое проводит траектория процесса $X^\varepsilon$ в множествах $\{x_1 > 0\}$ и $\{x_1 < 0\}$. Эта задача рассматривалась в [64, 71].

Все рассмотренные здесь случаи обладают одним общим свойством, которое существенно упрощает задачу. Дело в том, что во всех приведенных задачах время достижения траекторией соответствующего процесса границы области не растет с уменьшением $\varepsilon$. Выход на границу осуществляется за счет членов, не зависящих от $\varepsilon$. Задачи, в которых достижение границы происходит за счет малых членов (членов порядка $\varepsilon$) существенно труднее. Среди таких задач много нерешенных. Вероятностные методы оказались в этой области весьма плодотворными. Пример задачи, в которой выход на границу происходит за счет малых членов, мы получаем, если поле (2.12) на плоскости $x_1 = 0$ тождественно обращается в нуль [71]. Тогда выход траекторий на границу может произойти только за счет малой диффузии вдоль плоскости

$x_1=0$. В этом случае $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon(x)=u(x)$ существует. Функция $u(x)$ постоянна на характеристиках оператора $L_2$, а на плоскости $x_1=0$ удовлетворяет некоторому уравнению второго порядка и принимает граничные условия на всей границе $\widetilde{\Gamma}$ множества $\widetilde{D}=D\cap\{x_1=0\}$. Если характеристики поля $\hat{B}(x)$ имеют с нормалью к плоскости $x_1=0$ касание не ниже второго порядка, то уравнение для $u(x)$ в области $\widetilde{D}$ получается из уравнения $L_1u=0$ вычеркиванием членов, содержащих дифференцирование по $x_1$. Новые эффекты возникают, если в операторе $L_2$ есть член $c(x)u(x)$. В этом случае краевую задачу на плоскости $x_1=0$ надо ставить в подобласти множества $\widetilde{D}$. В приведенном примере выход на границу происходит за счет медленного движения, однако быстрое движение при этом фактически отсутствует. После того как траектории достигли плоскости $x_1=0$, они не выходят из ее окрестности, так как «быстрые» члены сносят их к плоскости. Интересные эффекты получаются, когда траектории выходят на границу за счет «медленного» движения, но при этом принимают участие в «быстром» движении. В таких случаях появляется усреднение скоростей медленного движения по траекториям быстрого движения. Рассмотрим задачу, в которой проявляется эффект усреднения. Пусть $D$ есть круговое кольцо ($D=\{x=(x_1, x_2): r_1<x_1<r_2\}$, причем $(x_1, x_2)$ и $(x_1, x_2+1)$ представляют одну и ту же точку). Введем обозначения $\Gamma_k=\{x: x_1=r_k\}$, $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, $k=1, 2$,

$$N_1=\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{2} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$N_2=A(x)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+B(x)\frac{\partial}{\partial x_2};\quad N_2^*(x)u=$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(A(x)u-\frac{\partial}{\partial x_2}(B(x)u).$$

Обозначим через $\mu(\overset{0}{x}_1, x_2)$ плотность инвариантной меры марковского процесса на окружности $x_1=\overset{0}{x}_1$, управляемого оператором $N_2$. Такая плотность обязательно существует и является единственным положительным решением задачи $N_2^*\mu(x_1, x_2)=0$ с условием $\int\limits_{x_1=\overset{0}{x}_1}\mu(\overset{0}{x}_1, x_2)dx_2$. Положим

$$\bar{g}(x_1)=\int\limits_0^1 g(x_1, x_2)\mu(x_1, x_2)\,dx_2.$$

Имеет место следующая теорема (см. Хасьминский [83)].

Теорема. Пусть $A(x)>a_0>0$ в $D$. Тогда решение задачи Дирихле

$$(\varepsilon N_1+N_2)u_\varepsilon=0 \text{ при } x\in D$$
$$u_\varepsilon(r_k, x_2)=f(x_2)$$

при $\varepsilon\to 0$ сходится к решению задачи

$$\widetilde{L}_1(x_1)u_0(x_1)=0,\quad u_0(r_k)=\widetilde{f}_k,\quad k=1,2,$$

где

$$\widetilde{L}_1(x_1)\equiv\bar{a}_{11}(x_1)\frac{d^2}{dx_1^2}+\bar{b}_1(x_1)\frac{d}{dx_1},\ \widetilde{f}_k=$$
$$=\frac{1}{\bar{a}_{11}(r_k)}\int\limits_0^1 a_{11}(r_k, x_2)f_k(x_2)\mu(r_k, x_2)\,dx_2$$

Чтобы пояснить сформулированную теорему, заметим следующее. Движение по направлению $x_1$ происходит за счет членов порядка $\varepsilon$. Пока марковская частица переместится на расстояние $h$ по радиусу пройдет время порядка $\frac{h}{\varepsilon}$. За это время частица успеет сделать много оборотов по окружности $x_1=\mathrm{const}$. В связи с этим коэффициенты движения вдоль $x_1$ должны получаться усреднением вдоль окружности $x_1=\mathrm{const}$ с весом, пропорциональным времени пребывания частицы на разных участках окружности. Именно так выбрана мера $\mu(x_1^0, x_2)$. Аналогично объясняется усреднение граничных условий. В [83] вычисляется также асимптотическое разложение разности $u_\varepsilon(x)-u(x)$ по степеням $\sqrt{\varepsilon}$, рассматриваются уравнения с правой частью и с диссипативным членом.

Общий принцип усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений сформулирован в работе Р. З. Хасьминского [82]. Основной результат этой работы является перенесением на уравнения с частными производными принципа усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений Н. Н. Боголюбова. Согласно Н. Н. Боголюбову решение системы $\frac{dx}{dt}=\varepsilon X(t, x)$ при $\varepsilon\to 0$ может быть приближено сколь угодно точно на интервале времени порядка $\frac{1}{\varepsilon}$ решением уравнения $\frac{dy}{dt}=\varepsilon X_0(y)$, если $X_0(y)=$ $=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T X\ (t,\ x)\ dt$ существует, а функция $X\ (t,\ x)$ ограничена и удовлетворяет условию Липшица. Чтобы сформулировать основной результат работы [82], введем понятие интегральной непрерывности. Функцию $a(s,$

$x, \lambda)$ назовем интегрально непрерывной в области $(x, s) \in G \times \times [0, T]$ $(G \in R_n)$ при $\lambda = \lambda_0$, если равномерно для всех $0 < s_1 < s_2$ и $x$ из рассматриваемой области

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_{s_1}^{s_2} a(s, x, \lambda)\, ds = \int_{s_1}^{s_2} a(s, x, \lambda_0)\, ds.$$

Обозначим $\Gamma$ границу области $G$ и $\psi(z)$ непрерывную функцию на $G \cup (\Gamma \times [0, T])$. Рассмотрим смешанную задачу

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial t} = \sum a_{ij}(s, x, \lambda) \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i(s, x, \lambda) \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} + $$
$$+ c(s, x, \lambda) u_\lambda(x) = f(s, x, \lambda);$$
$$\lim_{(s,x) \to Z \in G \cup (\Gamma \times [0,T])} u(s, x, \lambda) = \psi(z). \tag{2.12}$$

Коэффициенты оператора и правая часть предполагаются ограниченными и непрерывными по $x$ равномерно по $\lambda$ и достаточно гладкими по $s$, $x$, чтобы обеспечить существование решения задачи (2.12). В [82] доказано, что, если коэффициенты и правая часть уравнения (2.12) интегрально непрерывны в области $G \times [0, T]$ в точке $\lambda_0$, то равномерно в рассматриваемой области $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} u\lambda\ (s, x) = u\ \lambda_0\ (s, x)$.

С помощью замены неизвестной функции и независимых переменных сформулированный результат прилагается к изучению задач для параболических и эллиптических уравнений, содержащих малый параметр. Изучается также вопрос о сходимости инвариантной меры процесса с малой диффузией на торе к инвариантной мере динамической системы, получающейся при вырождении диффузии.

В работе М. И. Фрейдлина [69] рассматривается задача Дирихле для оператора

$$L_\varepsilon = \sum a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Предполагается, что коэффициенты оператора $L_\varepsilon$ при $\varepsilon = 1$ представляют собой периодические по всем аргументам функции с периодом 1 (такие функции можно рассмотреть на торе $\Lambda$). Тогда решение $u_\varepsilon(x)$ задачи $L_\varepsilon u_\varepsilon = 0$, $x \in D$, $u_\varepsilon(x)|_\Gamma = \psi(x)$, где $\Gamma$—граница ограниченной области $D$, при $\varepsilon \to 0$ сходится к функции $u(x)$, являющейся решением задачи Дирихле для уравнения с постоянными коэффициентами

$$\bar{L}u(x) = \sum \bar{a}_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum \bar{b}_i \frac{\partial u}{\partial x_i}; \ v/_\Gamma = \psi(x).$$

Коэффициенты оператора $\overline{L}$, получаются из соответствующих коэффициентов оператора $L_1$ путем усреднения по некоторой мере $\mu$ на торе $\Lambda$. Мера $\mu$ есть инвариантная мера диффузионного процесса на $\Lambda$, управляемого оператором $\widetilde{L}_1$. Плотность меры $\mu$ может быть найдена как положительное, нормированное решение уравнения $L_1^* \left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) = 0$. Доказательства в [69] проводятся с помощью стохастических уравнений.

Уравнениям с малым параметром посвящена также работа М. И. Фрейдлина [65], в которой рассматривается краевая задача для эллиптического уравнения с малой диффузией, причем на части границы задано условие Дирихле, на части— условие Неймана. Наиболее интересен случай выхода характеристик вырожденного уравнения на ту часть границы, где задано условие Неймана. В работе Я. А. Когана [41] изучается смешанная задача для параболического уравнения с малой диффузией. Особый интерес представляют задачи, в которых рассматривается решение параболических уравнений с малым параметром за время порядка $\frac{1}{\varepsilon}$ [38]. Об этих работах мы скажем несколько слов в § 3.

В работах Р. З. Хасьминского [83] и М. И. Фрейдлина [69] изучается поведение траекторий диффузионного процесса на отрезке времени $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, если возмущающее движение имеет порядок $\varepsilon$. Некоторые задачи с малым параметром приводят к изучению диффузионных траекторий за время большее, чем $\frac{1}{\varepsilon}$. К таким задачам относится задача Дирихле для уравнения с малым параметром при старших производных в случае, когда характеристики вырожденного уравнения входят в одну точку, лежащую внутри области. Некоторые результаты относительно этой задачи имеются в [50], однако общий случай остается открытым.

В заключение этого параграфа упомянем о работе С. А. Молчанова [48], которая хотя по формулировкам результатов и не относится к задачам с малым параметром, однако тесно с ними связана. В [48] изучается операция взятия следа процесса (эта операция представляет собой специальный вид случайной замены времени). Пусть $X$ есть диффузионный процесс в $R_n$, $D$ — область с границей $\Gamma$. Процесс $Y$ — след процесса $X$ в области $D$ своими траекториями имеет части траекторий процесса $X$, лежащие в $D$. Если в момент $\tau$ траектория процесса $Y$ достигла границы, то она перескакивает из точки выхода в момент $\tau$ в точку первого после $\tau$ входа траектории процесса $X$ в область $D$. В [48] вычислены граничные условия описывающие поведение процесса $Y$ на Г. Используя результаты этой работы, можно изучить задачу Дирихле в области $G$ для уравнения, коэффициенты которого в некоторой внутренней подобласти $G' \subset G$ имеют порядок $\frac{1}{\varepsilon}$.

## § 3. ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ И ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Другим удобным для вероятностных методов разделом теории дифференциальных уравнений являются вырождающиеся эллиптические и параболические уравнения второго порядка. На этом пути был получен целый ряд результатов в теории вырождающихся уравнений. Изучены постановки и построены обобщенные решения краевых задач, проведено исследование локальных свойств обобщенных решений и их связь с другими обобщенными решениями. Вероятностными методами изучались классы единственности задачи Коши для вырождающихся параболических уравнений, аналоги принципа Фрагмена — Линделёфа, стабилизация решений смешанных задач и другие вопросы. Успех вероятностных методов в этой области объясняется в значительной мере следующими двумя фактами: во-первых, нечувствительностью стохастических дифференциальных уравнений, при достаточно гладких коэффициентах, к вырождению матрицы диффузии (сохраняется теорема существования и единственности) и, во-вторых, тем, что траектории случайного процесса, используемого для вероятностного представления решения дифференциального уравнения, в определенном смысле являются обобщением характеристик, играющих основную роль в теории уравнений первого порядка.

Рассмотрим задачу Коши для вырождающегося параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_j} + \sum_{1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}; \ u(0, x) = f(x). \quad (3.1)$$

Матрица $\{a_{ij}(x)\}$ предполагается неотрицательно определенной, коэффициенты и начальная функция ограниченные и достаточно гладкие. Пусть $X = \{x_t, P_x\}$ — марковский процесс, управляемый оператором $L$. Траектории этого процесса можно построить как решения стохастического уравнения

$$x_t - x = \int_0^t \sigma(x_s)\, d\xi_s + \int_0^t b(x_s)\, ds, \quad (3.2)$$

где, как обычно, $\sigma(x)\sigma^*(x) = \{a_{ij}(x)\}$, $b(x) = \{b_1(x), \ldots, b_n(x)\}$.

Уравнение (3.2) имеет решение, если только функции $\sigma(x)$ и $b(x)$ непрерывны. Однако, если элементы матрицы $\{\sigma(x)\}$ удовлетворяют только условию Гельдера с показателем, меньшим $\frac{1}{2}$, то решение уравнения (3.2) может не быть единственным (см. Гирсанов [17]). Будем считать, что все коэффициенты в (3.2) удовлетворяют условию Липшица. Как объяснялось ранее, функция $u(t, x) = M_x f(x_t)$ будет обобщенным решением задачи (3.1). Это решение будет единственным во всяком случае в классе ограниченных функций, принадлежащих области определения инфинитезимального оператора процесса $X$.

Таким образом, построение обобщенного решения задачи (3.1) производится достаточно просто, если только справедлива теорема существования для уравнения (3.2). Несколько большую трудность представляет исследование локальных свойств обобщенного решения. Доказывается, что если коэффициенты $\sigma_{ij}(x)$ и $b_i(x)$ удовлетворяют условию Липшица и $f(x)$ — непрерывная функция, то обобщенное решение $u(t, x)$ всегда непрерывно [66]. Большего о функции $u(t, x)$ без дополнительных предположений сказать нельзя. В работах [5], [18] доказано, что если функции $\sigma(x)$, $b(x)$, $f(x)$ имеют $k$ производных, то $u(t, x)$ имеет $k$ производных по $x$. В [3] этот результат несколько усилен. Исследование локальных свойств обобщенного решения проводится по следующей схеме. Сначала изучается зависимость траектории $x_t(x, \omega)$ — решения уравнения (3.2), от начальной точки. Как и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, оказывается, что $x_t(x, \omega)$ дифференцируема по $x$ (в среднем квадратичном и с вероятностью 1) столько раз, сколько производных имеют коэффициенты. Гладкость обобщенного решения следует из гладкости функции $f(x_t(x, \omega))$ по $x$ и из вероятностного представления функции $u(t, x)$. Полученные результаты коротко можно сформулировать так: решение задачи Коши для вырожденного уравнения, при достаточно гладких коэффициентах, имеет ту же гладкость, что и начальная функция.

В классе всех вырождающихся уравнений этот результат усилить нельзя. Об этом свидетельствуют простые примеры (например, задача Коши для уравнения первого порядка). Существуют, однако, такие специальные типы вырождающихся уравнений, решения которых, так же как решения невырожденных уравнений, имеют большую гладкость чем начальная функция. К таким уравнениям относится например уравнение Колмогорова для броуновского движения с инерцией:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial (x_i^1)^2} + \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \frac{\partial u}{\partial x_i^2}.$$

Уравнения такого типа изучались А. М. Ильиным [35, 36]. Вслед за А. М. Ильиным И. М. Сонин*) описал более широкий класс вырождающихся уравнений, которые обладают свойством повышения гладкости. Введенный И. М. Сониным класс уравнений, приблизительно, можно охарактеризовать следующим образом. Пусть $X^1(x_1^1, \ldots, x_n^1)$ — группа переменных, по которым оператор $L$ не вырождается. По переменным $X^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$ вторых производных в операторе нет, но коэффициенты при $\left(\frac{\partial}{\partial x_2^k}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n^k}\right)$ невырожденным образом зависят от $(x_1^{k-1}, \ldots, x_n^{k-1})$ (в уравнении (3.2) есть всего 2 группы переменных $X^1$ и $X^2$). Тогда уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = Lu$ имеет дважды непрерывно дифференцируемое фундаментальное решение. Соответствующую гладкость имеет и решение задачи Коши.

Описанные результаты А. М. Ильина и И. М. Сонина получены с помощью классического метода Леви, который в вырожденном случае требует значительно более тонких оценок.

Обратимся теперь к классам единственности решения задачи Коши для вырождающихся параболических уравнений. Эти вопросы рассматриваются в работах [73] и [77, 101]. Вырождение оператора может привести к тому, что задача Коши будет иметь единственное решение без всяких ограничений на рост. Сформулируем соответствующий результат для уравнения с одним пространственным переменным

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial u}{\partial x} = lu.$$

Положим $E_\alpha = \{x : a(x) = 0, \ x > \alpha\}$. Класс единственности удобно описать как пересечение двух функциональных пространств $H^+$ и $H^-$. Первое из этих пространств определяется условиями на поведение функций при $x \to +\infty$, второе — при $x \to -\infty$. Для того чтобы $H^+$ совпадало с пространством всех непрерывных функций, достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из следующих двух условий: 1) существует последовательность точек $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ такая, что $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, $a(x_n) = 0$, $b(x_n) \leqslant 0$; 2) при любом $\alpha > 0$, $\int\limits_{E_\alpha} \frac{dx}{b(x)} = \infty$. Аналогичные условия можно сформулировать для $H^-$. Заметим, что

---

*) Работа опубликована в журнале «Теория вероятностей и ее применения»», 1967, 12. № 3.

если для $H^-$ также выполнены соответствующие условия, то решение имеет конечную область зависимости (так же как в гиперболическом случае). Если условия типа 1), 2) выполнены только для $H^+$, то на рост функций при $x \to -\infty$ нужно налагать дополнительные условия. В случае ограниченности коэффициентов $a(x)$ и $b(x)$ класс единственности будет по порядку не уже, чем в невырожденном случае, а именно задача Коши будет иметь единственное решение в классе функций, растущих медленнее, чем $e^{cx^2}$ при каком-либо $c > 0$. Рост коэффициентов уравнения может сузить класс единственности и привести к тому, что при $x \to \pm\infty$ надо будет задавать граничные условия. В многомерном случае картина существенно усложняется. Наметим те рассуждения, которые приводят к сформулированным результатам. Если выполнено одно из условий 1), 2), то для всякого $x \in R_1$ и $t > 0$ найдется точка $z_t \in R_1$ такая, что с вероятностью 1 траектория марковского процесса, управляемого оператором $l$, исходящая из $x$ к моменту $t$, ни разу не побывает правее точки $z_t$. В самом деле, если выполнено условие 1), то в качестве такой точки $z_t$ можно взять ближайшую к $x$ справа точку последовательности $\{x_n\}$. Уйти правее точки $z_t = x_n$ траектория не сможет, так как $a(x_n) = 0$, а перенос в точке направлен влево. Если выполнено условие 2), то в качестве $z_t$ нужно выбрать такую точку, что $\int\limits_x^{z_t} \frac{dx}{b(x)} - \chi_{E_x}(x) = t$. (Здесь $\chi_{E_x}(x)$ — характеристическая функция множества $E_x$). Такая точка обязательно найдется в силу условия 2). Если условия типа 1), 2) выполнены и для пространства $H^-$, то найдется точка $\tilde{z}_t$ такая, что траектория с вероятностью 1, исходя из $x$, к моменту $t$ не побывает левее $\tilde{z}_t$. Таким образом, траектория, начинающаяся в точке $x$, до момента $t$ будет находиться между точками $\tilde{z}_t$ и $z_t$. Допустим, что рассматриваемая задача Коши имеет два непрерывных обобщенных решения, не совпадающих в точке $x$. Тогда их разность $v(t, x)$ можно рассматривать как ограниченное решение смешанной задачи в полуполосе $\{t > 0\} \times \{\tilde{z}_t \leqslant x \leqslant z_t\}$. Функция $v(t, x)$ имеет нулевые начальные условия. Обозначим через $\psi(z)$ значения функции $v(t, x)$ на границе полуполосы. Тогда, как объяснялось ранее, $v(t, x) = M_x \psi(z_{\tau_t})$, где $z_{\tau_t}$ — положение двумерного процесса $(t, x_t)$, в момент первого выхода из полуполосы. Так как до момента $t$ траектория не достигла точек $\tilde{z}_t$ и $z_t$, то $P_x\{z_{\tau_t} \in \{t = 0\}\} = 1$ и, следовательно, $v(t, x) = M_x \psi(z_{\tau_t}) = 0$. Таким образом, мы доказали единственность без ограничений на рост.

Поясним еще, почему неограниченность коэффициентов может повлечь за собой необходимость задания условий на бесконечности. Рост коэффициентов может привести к тому, что траектория с положительной вероятностью за конечное время уйдет на бесконечности (это может произойти и с детерминированным движением: $\frac{dx}{dt}=x^2$). Положим

$$F(x_{\tau_t})=\begin{cases} f(x_t), & \text{если } |x_t|<\infty, \\ f_+, & \text{если } x_t=\infty, \\ f_-, & \text{если } x_t=-\infty \end{cases}$$

Тогда, при некоторых естественных ограничениях, легко проверяется, что функция $u(t, x)=M_x F(x_{\tau_t})$ есть решение задачи Коши с начальной функцией $f(x)$ и условиями $\lim\limits_{x\to+\infty} u(t, x)=f_+$, $\lim\limits_{x\to-\infty} u(t, x)=f_-$. Это решение единственно.

Перейдем теперь к задаче Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения. Этому вопросу посвящен целый ряд работ, выполненных с использованием вероятностных методов. Мы рассмотрим сначала уравнение, которое вырождается только на границе области. Такая задача изучалась Р. З. Хасьминским в [75]. Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} Lu = a_{11}(x) u_{x_1x_1} + 2a_{12}(x) u_{x_1x_2} + a_{22}(x) u_{x_2x_2} + \\ + b_1(x) u_{x_1} + b_2(x) u_{x_2} = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

в области $D$, ограниченной отрезком $[r_1, r_2]=\Gamma_0$ оси $x_1$ и гладкой кривой $\Gamma$, расположенной в плоскости $x_2>0$. Предполагается, что коэффициенты непрерывны в $\Gamma\cup D$ и гладкие в $D$. Поведение их при приближении к $\Gamma_0$ может быть весьма произвольным. Следуя [75], мы будем допускать вырождение оператора $L$ только на отрезке $\Gamma_0$. Обозначим через $X= \{x_t, P_x\}$ марковский процесс, который управляется оператором $L$ внутри области $D$ и исчезает как только его траектории достигают границы*). Пусть $\psi(x)$ непрерывная функция на $\Gamma\cup\Gamma_0$. Если обозначить через $\tau$ первый момент достижения границы области $D$, то функция $u(x)=M_x\psi(x_\tau)$ удовлетворяет уравнению $Au=0$, где $A$ — производящий оператор процесса $X$. Принимая во внимание, что оператор $L$ не вырождается во внутренних точках, легко доказывается, что $u(x)\in C^2(D)$ и $Au=Lu$. Как объяснялось ранее, функция $u(x)$ принимает граничные значения в точках множества $\Gamma$, так как на $\Gamma$ оператор не вырождается.

---

*) Построение такого процесса производится не совсем так, как это делается в настоящем обзоре. С помощью стохастических уравнений строится процесс в любой подобласти области $D$, а затем делается предельный переход (см. Дынкин [24]).

В точках отрезка $\Gamma_0$ функция $u(x)$, вообще говоря, не принимает значений $\psi(x)$. Точку $x_0 \in \Gamma_1 \cup \Gamma_0$ мы назовем регулярной, если $\lim\limits_{x \to x_0} P_x \{x_{\tau_{U_\varepsilon(x)}} \in \Gamma \cap U_\varepsilon(x_0)\} = 1$, для любого $\varepsilon > 0$, где $U_\varepsilon(x)$ — $\varepsilon$-окрестность точки $x$, $\tau_{U_\varepsilon(x)}$ — первый момент достижения траекторией границы множества $U_\varepsilon(x)$. В [75] приводятся необходимые и достаточные условия регулярности граничных точек в терминах барьеров. Эти условия показывают, что введенное вероятностное понятие регулярности по существу совпадает с имеющимся в дифференциальных уравнениях понятием регулярности граничной точки. Если точка $x_0$ регулярна, то функция $u(x)$ принимает в $x_0$ значение $\psi(x_0)$. Это легко выводится из определения регулярности и непрерывности $\psi(x)$. В [75] приводятся достаточные условия регулярности в терминах коэффициентов. Эти условия близки к необходимым и перекрывают условия регулярности, полученные ранее другими методами. Для того чтобы сформулировать условие регулярности, введем вспомогательные функции

$$\underline{A}_2^{x_0}(y) = \min_{x_1 \in U(x_0)} \frac{a_{22}(x_1, y)}{a_{11}(x_1, y) + b_1(x_1, y)},$$

$$\overline{B}_2^{x_0}(y) = \max_{x_1 \in U(x_0)} \frac{b_2(x_1, y)}{a_{22}(x_1, y)}; \quad \overline{W}^{x_0}(y) = \exp\left\{\int_y^\varepsilon \overline{B}_2^{x_0}(z)\,dz\right\},$$

$$\overline{Z}^{x_0}(y) = \overline{W}^{x_0}(y) \int_y^\varepsilon \left[\overline{W}^{x_0}(z)\, \underline{A}_2^{x_0}(z)\right]^{-1} dz.$$

В [75] доказывается, что для регулярности точки $x_0$ достаточно, чтобы функция $\overline{Z}^{x_0}(y)$ была интегрируема в нуле. Если все точки отрезка $\Gamma_0$ регулярны, то $u(x)$ есть единственное решение задачи Дирихле. В [75] приводятся также условия, обеспечивающие единственность решения без задания каких-либо условий на $\Gamma_0$. Эти условия можно формулировать в терминах барьеров, а также в терминах коэффициентов уравнения. В [75] открыт новый эффект поведения решения при приближении к участку границы, на котором оператор вырождается. Оказывается, что в некоторых случаях на участке вырождения можно задавать только линейную функцию или постоянную. Если на этом участке граничных условий не задавать вообще, то нарушится единственность. Поведение функции вблизи $\Gamma_0$ является следствием определенного поведения траекторий процесса $X$. В частности, если на некоторый участок границы траектории не выходят ни из одной точки области, то на этом участке граничную функцию задавать не надо, если при $t \to \tau$ траектория приближается не к одной точке границы, а имеет целый отрезок $\gamma$

предельных точек, то на всем отрезке $\gamma_0$ граничная функция обязана равняться постоянной. Для получения достаточных условий в терминах коэффициентов Р. З. Хасьминский [75] использует соответствующие условия для одномерных процессов, полученные Феллером.

Перейдем теперь к общему случаю. Пусть оператор $L = \frac{1}{2}\sum a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ определен во всем пространстве и $\sum a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \geqslant 0$. Мы будем предполагать, что существует матрица $\sigma(x)$ с удовлетворяющими условию Липшица коэффициентами такая, что $\sigma(x)\sigma^*(x) = \{a_{ij}(x)\}$. Заметим, что в невырожденном случае* существование такой матрицы является следствием дифференцируемости коэффициентов матрицы $\{a_{ij}(x)\}$. Предположим также, что функции $b_i(x)$ тоже удовлетворяют условию Липшица, так что

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} |\sigma_{ij}(x) - \sigma_{ij}(y)|^2 + \sum |b_i(x) - b_i(y)|^2 \leqslant K\,\|x - y\|^2.$$

Построим процесс $X = \{x_t, P_x\}$, управляемый оператором $L$. При сделанных предположениях его траектории удовлетворяют стохастическому уравнению

$$x_t - x = \int_0^t \sigma(x_s)\,d\xi_s + \int_0^t b(x_s)\,ds. \tag{3.4}$$

Положим $\tau = \inf\{t : x_t \overline{\in} D\}$. Тогда функция $u(x) = M_x\psi(x_\tau)$ есть решение уравнения $Au = 0$, где $A$ — инфинитезимальный оператор процесса $\widetilde{X}$, полученного из $X$ остановкой на границе $\Gamma$ области $D$, в которой мы решаем задачу Дирихле. Предположим, что все граничные точки регулярны. В этом случае $u(x)$ принимает граничные значения: $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = \psi(x_0)$ и $u(x)$ естественно считать обобщенным решением задачи $Lu = 0$, $u(x)|_\Gamma = \psi(x)$ (так как классическое решение такой задачи, если оно существует, обязательно удовлетворяет уравнению $Au = 0$). Без дополнительных ограничений функция $u(x)$ не является единственным обобщенным решением.

В терминах процесса $X$ легко сформулировать необходимые и достаточные условия единственности обобщенного решения. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t\to\infty} P_x\{\tau < t\} = 1 \tag{3.5}$$

*) Если $a_{ij}(x) \in C^2(R^n)$ при всех $i$, $j$, то такая матрица $\sigma(x)$ существует без всяких предположений о виде вырождения.

при всех $x \in D$ (см. [66]). Там же приведены широкие достаточные условия единственности в терминах коэффициентов. Для единственности достаточно, например, чтобы при некотором $i$, $a_{ii}(x) > \alpha > 0$ в $D$, или чтобы $b_i(x) \neq 0$ при $x \in D \cup \Gamma$. Заметим, что, если рассматривать оператор $L' = L - c(x)$, где $c(x) > 0$ в $D \cup \Gamma$, то обобщенное решение будет единственным без дополнительных ограничений.

Скажем несколько слов о связи между вероятностным обобщенным решением задачи Дирихле и другими видами обобщенного решения. Предположим, что стремление к пределу в (3.5) происходит равномерно по $x \in D$ и все граничные точки регулярны (условие 1). Тогда с помощью методов, описанных в предыдущем параграфе, можно доказать, что обобщенное решение задачи Дирихле для оператора $L$ есть равномерный предел функций $u^\varepsilon(x)$ — решений задач $\varepsilon \Delta u^\varepsilon(x) + Lu^\varepsilon(x) = 0$, $u^\varepsilon(x)|_\Gamma = \psi(x)$. Таким образом, вероятностное обобщенное решение совпадает с обобщенным решением в смысле малого параметра. Можно доказать, что вероятностное обобщенное решение совпадает также с решением в смысле интегрального тождества. Выяснению связей вероятностного решения с другими типами обобщенных решений посвящена работа М. И. Фрейдлина [70].

Перейдем к изложению имеющихся результатов о локальных свойствах обобщенного решения задачи Дирихле.

Из равномерной сходимости $u^\varepsilon(x)$ к $u(x)$ следует непрерывность обобщенного решения $u(x)$. Это утверждение, при выполнении условия 1, впервые было доказано в [66]. Если от условия 1 отказаться, то решение может быть и разрывным. Оказывается, что решение при выполнении условия 1 будет не только непрерывным, но даже обязательно удовлетворяет некоторому условию Гёльдера. Сначала мы приведем пример [68], показывающий, что полученные оценки близки к точным. На примере можно также увидеть те идеи, которые используются в общем случае для исследования гладкости.

Пусть область $D$ есть квадрат $D = \{x; y: |x| < 1, |y| < 1\}$. Обозначим через $\varphi(x, y)$ бесконечно дифференцируемую, четную по $y$ функцию, равную нулю вне $\varepsilon$-окрестности границы $\Gamma$ квадрата $D$. Рассмотрим задачу Дирихле

$$Lu = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta y \frac{\partial u}{\partial y} + \varphi^2(x, y)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] = 0,$$

$$u(x, y)|_\Gamma \equiv y.$$

Оператор $L$ не вырождается в окрестности границы, $\alpha > 0$;

поэтому сформулированная задача имеет единственное обобщенное вероятностное решение $u(x, y)$. Это решение непрерывно в $D\cup\Gamma$. Легко проверить, что $u(x,y)=-u(x,-y)$, поэтому $u(x,0)=u(0,0)=0$. Из принципа максимума и регулярности граничных точек следует, что $\operatorname{sign} u(x,y)=\operatorname{sign} y$ и $u(x,y)>\frac{99}{100}\left(<\frac{99}{100}\right)$ при $1-y\leqslant\varepsilon$ $(1+y\leqslant\varepsilon)$ при достаточно малом $\varepsilon$. Обозначим через $z_t=(x_t, y_t)$ процесс, управляемый оператором $L$, и через $D_\varepsilon$ область, получающуюся из $D$ выкидыванием $\varepsilon$-окрестности границы. Тогда $u(x,y)=M_{xy}u(z_{\tau_\varepsilon})$, где $\tau_\varepsilon$—первый момент выхода из $D_\varepsilon$. Пусть $y_0>0$. Так как $P_{x,y_0}\{y_{\tau_\varepsilon}>0\}=1$, то

$$u(0,y)=M_{0,y}u(z_{\tau\varepsilon})\geqslant\frac{99}{100}P_{0,y_0}\{y_{\tau_\varepsilon}=1-\varepsilon\}. \tag{3.6}$$

Оценим $P_{0,y_0}\{y_{\tau_\varepsilon}=1-\varepsilon\}$. Движение по оси $y$ в $D$ детерминированное. Интегрируя уравнение $\frac{\partial y}{\partial t}=\beta y$, с условием $y_0=y(0)$, получим, что для достижения точки $y=1-\varepsilon$ понадобится время, равное $t(y_0)=\ln\left(\frac{1-\varepsilon}{y_0}\right)^{\frac{1}{\beta}}$. Заметим, что

$$P_{0,y_0}\{y_{\tau_\varepsilon}=1-\varepsilon\}=P_{0,y_0}\{\sup_{s<t(y_0)}|x_s|<1-\varepsilon\}.$$

Так как $x_s$ в $D$ есть одномерный марковский процесс с оператором $\alpha\frac{d^2}{dx^2}$, то функция

$$v(t,x)=P_x\{\sup_{s<t}|x_s|<1-\varepsilon\}$$

есть решение смешанной задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\quad v(t,x)|_{|x|=1-\varepsilon}=0,\quad v(0,x)=1. \tag{3.7}$$

Решая задачу (3.7) методом Фурье, убеждаемся, что

$$v(t,0)=c_1\exp\left(-\frac{\alpha t\pi^2}{(1-\varepsilon)^2}\right).$$

Отсюда

$$P_{0,y_0}\{\sup_{s<t(y_0)}|x_s|<1-\varepsilon\}=v(t(y_0),0)=$$

$$=c_1\exp\left\{-\frac{\alpha\pi^2}{(1-\varepsilon)^2}\ln\left(\frac{1-\varepsilon}{y_0}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right\}=c_2 y^{\frac{\alpha\pi^2}{\beta(1-\varepsilon)^2}},$$

где $c_1$, $c_2$ от $y_0$ не зависят. Сравнивая полученное равенство с (3.6), заключаем, что $u(0,y_0)>\frac{99}{100}c_2 y^{\frac{\alpha}{\beta}\frac{\pi^2}{(1-\varepsilon)^2}}$. Из последнего неравенства, если принять во внимание, что $u(0,0)=0$, следует, что функция $u(x,y)$ без дополнительных предположений о величине $\frac{\alpha}{\beta}$ может не иметь производных и для любого $\gamma>0$ можно указать столь малое $\frac{\alpha}{\beta}$, что функция $u(x,y)$ не будет удовлетворять условию Гёльдера с показателем $\gamma$.

Мы ввели в оператор $L$ член $\varphi^2(x, y)\Delta$ для того, чтобы исключить возможность нарушения гладкости за счет вырожденности на границе. Теперь мы будем считать, что $\varphi(x,y)\equiv 0$. Все оценки для $|u(0, y)-u(0, 0)|$ при этом сохранятся, надо лишь положить в них $\varepsilon=0$. Получим оценку сверху для $u(0, y)-u(0, 0)$. Так как при $\varphi(x, y)\equiv 0$ движение по оси $y$ детерминированное, то

$$|u(0, y_0)-u(0, 0)| = |u(0, y_0)| < M_{0,y_0}|y_\tau| = \\ =\int_0^\infty y_t(y_0)\, p_\tau(t)\, dt, \tag{3.8}$$

где $y_t(y_0)$—решение уравнения $\frac{dy}{dt}=\beta y$ с условием $y(0)=y_0$, а $p_\tau(t)$—плотность случайной величины $\tau=\inf\{t, |x_t(x,\omega)|=1\}$, при условии, что процесс исходит из точки $(0, 0)$. Из приведенных ранее формул следует, что

$$y_t(y_0)=y_0 e^{\beta t},\quad p_\tau(t)=-\frac{\partial v(0, t)}{\partial t}=c_3 e^{-\alpha\pi^2 t}.$$

Подставляя эти функции в (3.8), получим

$$|u(0, y_0)-u(0, 0)| < c_3 y_0\int_0^\infty e^{\beta t-\alpha\pi^2 t}dt. \tag{3.9}$$

Если $\beta-\alpha\pi^2<0$, то интеграл в (3.9) сходится и, следовательно, $u(x, y)$ в начале координат удовлетворяет условию Липшица. Если $\beta-\alpha\pi^2>0$, то $u(x, y)$ удовлетворяет условию Гельдера с любым показателем $\varkappa<\frac{\pi^2\alpha}{\beta}$. В самом деле, так как $|y_\tau|<1$, то при $\varkappa<1$ получаем

$$|u(0, y_0)-u(0, 0)| < |M_{0,y_0}y_\tau| \leqslant M_{0,y_0}|y_\tau|^\varkappa = \\ =\int_0^\infty y_t^\varkappa(y_0)p_\tau(t)\,dt = c_3 y_0^\varkappa\int_0^\infty e^{(\varkappa\beta-\pi^2\alpha)t}\,dt = c_3c_4y_0^\varkappa,$$

где

$$c_4=\int_0^\infty e^{(\varkappa\beta-\pi^2\alpha)t}\,dt.$$

Таким образом, $c_2 y^{\frac{\alpha\pi^2}{\beta}} < | u(0, y_0) - u(0, 0) | < c_3 c_4 y_0^{\varkappa}$, при $\varkappa < \frac{\pi^2\alpha}{\beta}$. Отметим, те качественные соображения, которые использовались в приведенном примере и переносятся на общий случай.

1) Траектории диффузионного процесса, коэффициенты которого удовлетворяют условию Липшица с постоянной $k$, разбегаются не быстрее, чем экспоненциально: $M \mid x_t(x, \omega) - x_t(y, \omega) \mid^2 \leqslant \mid x - y \mid^2 e^{ckt}$, где $x_t(y, \omega)$, $x_t(x, \omega)$ — траектории, начинающиеся в $y$ и $x$ соответственно, $c$—абсолютная постоянная. В нашем случае $c = 1$, $k = \beta$.

2) Если выполняется условие 1, то $P_x\{\tau > t\} \leqslant c(x) e^{-\gamma t}$, где $\gamma > 0$, $c(x) < \bar{c} < \infty$. В нашем примере $\gamma = \alpha\pi^2$. Заметим, что в качестве $\gamma$ можно взять наибольшее собственное значение задачи. Для $\gamma$ дается оценка снизу через коэффициенты и размеры области.

Как и в приведенном примере, в общем случае гладкость тем выше, чем больше разность $\gamma—ck$. Используя эти общие свойства, удается вывести условия [68] существования $k$-ой производной обобщенного решения в предположении, что граничная функция и коэффициенты достаточно гладкие. Без дополнительных предположений о величине $\gamma—ck$ решение обладает только непрерывностью по Гёльдеру.

Можно указать некоторый класс уравнений, для которых в определенном смысле $\gamma = \infty$ и гладкость внутри области зависит только от граничных оценок. Такие уравнения соответствуют диффузионным процессам, траектории которых с вероятностью 1 выходят из области за некоторое конечное время $T$. Этот класс можно описать в терминах коэффициентов. Примером такого уравнения может служить уравнение теплопроводности в ограниченной области.

Если рассматривать уравнение $Lu—c(x)u(x) = 0$, где $c(x) > c_0 > 0$, то гладкость решений таких уравнений тем выше, чем больше $c_0$. Это и естественно: как указывалось выше гладкость повышается с увеличением абсолютной величины первого собственного значения.

Заметим, что приведенные оценки не носят характера локальных оценок, как это бывает в эллиптическом случае. Представляет несомненный интерес выделение тех классов вырождающихся эллиптических уравнений, которые обладают локальными оценками. Некоторые успехи в этом направлении имеются. Отметим работы А. М. Ильина [35, 38], а также упомянутую ранее работу И. М. Сонина.

После заметки [68] появился целый ряд работ, где похожие результаты получаются классическими методами.

Все изложенные выше результаты о задаче Дирихле справедливы, если выполнено условие 1. В заметке [73] изучается задача Дирихле, когда 1 не выполнено. В этом случае задание граничной функции в регулярных точках границы уже не обеспечивает единственности, появляется «внутренняя» граница, и постановка задачи Дирихле должна быть уточнена.

Пусть в ограниченной области $D$ с границей $\Gamma$ рассматривается уравнение $Lu=0$, где $L=\sum a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}+\sum b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ —эллиптический, быть может вырождающийся, оператор. Положим $l_i(x)=b_i(x)=\sum_j \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}$. Следуя [73], мы скажем, что гладкая кривая $\gamma=\{x(t)=(x^1(t),\ldots,x^n(t)\}$, соединяющая точки $a$ и $b$, проходима из $a$ в $b$, если $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$, где $\gamma_1=\left\{x:\sum a_{ij}(x_t)\frac{\partial x^i}{\partial t}\frac{\partial x^j}{\partial t}>0\right\}$, $\gamma_2$ — часть характеристики уравнения $\sum l_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}=0$, причем движение вдоль $\gamma_2$ направлено из $a$ в $b$ и $\inf\limits_{x\in\gamma_2}\sum l_i^2(x)>0$.

Поверхность $S$ назовем непроходимой из $a$ в $b$, если $S$ отделяет $a$ от $b$ в области $D$, $\sum a_{ij}(x)h_i(x)h_j(x)|_{x\in S}=0$, $\sum l_i(x)h_i(x)\geqslant 0$, где $\{h_i(x)\}$ — направляющие косинусы нормали к $S$, направленной в сторону $a$.

Обозначим через $\tilde{\Gamma}$ регулярную часть границы. Предположим, что в $D\cup(\Gamma\setminus\tilde{\Gamma})$ существует такое множество $\Pi$, что каждая точка $x\in D\cup(\Gamma\setminus\tilde{\Gamma})$ соединяется с некоторой точкой $a\in\Pi\cup\tilde{\Gamma}$ кривой, проходимой из $x$ в $a$, а любые точки множества $\Pi$ отделяются друг от друга и от точек $\tilde{\Gamma}$ некоторой поверхностью. Тогда оказывается, что для единственности и существования обобщенного в вероятностном смысле решения уравнения $Lu=0$ нужно задавать функцию $u(x)$ во всех точках множества $\Pi\cup\tilde{\Gamma}$ (Задача Л). Такое уточнение задачи Дирихле естественно, так как решение смешанной краевой задачи для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}=Lu$ при $t\to\infty$ стабилизируется как раз к решению некоторой задачи Л. Значение функции $u(x)$ на множестве $\Pi$ при этом вычисляется по начальной функции в смешанной задаче. Оказывается, что при некоторых дополнительных предположениях, множество $\Pi\cup\tilde{\Gamma}$ есть «полная» граница, в том смысле, что любое ограниченное, решение задачи $Lu=0$ получается как решение задачи Л с некоторой граничной функцией (см. § 5).

Некоторые новые эффекты возникают при рассмотрении вырождающихся уравнений в неограниченных областях. Эти вопросы рассматривались в [73].

Перейдем теперь к описанию имеющихся результатов о задаче с косой производной для вырождающегося уравнения. Вероятностному представлению решения задачи с косой производной посвящено несколько работ ([67, 107, 139]). Вырожденный случай специально исследовался в [65] и [67]. В этих работах предполагалось, что оператор $L$ не вырождается у границы области, во всяком случае в направлении, по которому задается граничное условие. Нетрудно результаты [67] перенести на случай, когда на части $\gamma$ границы $\Gamma$ диффузия по направлению отражения вырождается, причем вырождение таково, что множество $\gamma$ недостижимо (т. е. на $\gamma$ не надо задавать никаких условий).

Итак, пусть в ограниченной области $D$ с гладкой границей $\Gamma$ рассматривается задача

$$Lu=f(x), \quad \left.\frac{\partial u(x)}{\partial l(x)}\right|_{\Gamma}=0, \tag{3.10}$$

где $l(x)$ — гладкое некасательное к $\Gamma$ векторное поле на $\Gamma$, $f(x)$ и коэффициенты оператора достаточно гладкие.

Как и в невырожденном случае, задача (3.10) имеет решение не при любой правой части (если $c(x)=0$). Пусть $X=\{x_t, P_x\}$ есть процесс с отражением по направлению $l(x)$, управляемый оператором $L$ внутри области (см. § 1). Чтобы сформулировать условия разрешимости, рассмотрим оператор $A^*$ — оператор, сопряженный к $A$—инфинитезимальному оператору процесса $X$.

Оператор $A^*$ определен на мерах. Вероятностную меру $\mu(\cdot)$ мы назовем стационарной мерой процесса $X$, если $A^*\mu=0$. Если процесс не вырождается, то он имеет только одну стационарную меру [77]. В вырожденном случае это, вообще говоря, не так. Для того чтобы существовало обобщенное вероятностное решение задачи (3, 10), необходимо ($c(x)=0$), чтобы $\int\limits_D f(x)\,\mu(dx)=0$ для любого решения уравнения $A^*\mu=0$.

Следуя работе [67], мы скажем, что выполнено условие (II), если оператор $L$ не вырождается в окрестности границы и $\lim\limits_{t\to\infty} P_x\{\tau>t\}=0$ равномерно по $x\in D$; $\tau=\inf\{t: x_t\bar{\in} D\}$. Для выполнимости условия (II) даются простые достаточные условия в терминах коэффициентов. Если условие (II) выполнено, то ортогональности $f(x)$ любой стационарной мере достаточно, для разрешимости задачи (3.10); это решение непрерывно и задается формулой $u(x) = \int_0^\infty M_x f(x_s)\, ds$. В классе ограниченных непрерывных функций из $D_A$ оно единственно.

Из работы [67] следует также, что все сформулированные результаты сохраняются, если в оператор $L$ входит член $c(x)u(x)$ при достаточно малом по модулю положительном $c(x)$. Если $c(x) < c < 0$, то существование и единственность в задаче (3.10) будут без всяких дополнительных условий на правую часть. В [67] имеются также некоторые теоремы, которые вместе с результатами работы [68] позволяют судить о гладкости обобщенного решения. Там же рассматривается смешанная задача для параболического уравнения с условием $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$ на боковой границе и изучается вопрос о стабилизации в такой задаче.

## § 4. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В НЕОРГАНИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ И СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu = \Sigma a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Sigma b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}; \quad u(0, x) = f(x). \tag{4.1}$$

Оператор $L$ предполагается равномерно эллиптическим. Решение задачи (4.1) может быть записано в виде $u(t, x) = M_x f(x_t)$, где $x_t$ — траектории марковского процесса $X$, управляемого оператором $L$. Таким образом, поведение функции $u(t, x)$ при $t \to \infty$ тесно связано с распределением $x_t$ при $t \to \infty$. Вопрос о поведении траекторий при $t \to \infty$ всегда был в центре внимания теории марковских процессов, поэтому представляется совершенно естественным тот факт, что вероятностные методы оказались удобными для изучения стабилизации решений параболических уравнений.

Процесс $X = \{x_t, P_x\}$ назовем возвратным, если существует компакт $K$ такой, что с вероятностью 1, исходя из любой точки, траектории когда-нибудь побывают в множестве $K$.

Понятие возвратности тесно связано с постановкой внешней задачи Дирихле для оператора $L$ и с вопросом о стабилизации решений параболических уравнений. В [77] показано, что для возвратности процесса $X$, управляемого оператором $L$, необходимо и достаточно, чтобы задача Дирихле во внешности каждой ограниченной области имела единственное ограниченное решение. Например, винеровский процесс ($L=\Delta$) возвратен при $n=1, 2$ и невозвратен в остальных случаях. В соответствии с этим постановки внешней задачи Дирихле различны при $n=1, 2$ и при $n>2$. Этот результат является следствием более общего утверждения: для того чтобы краевая задача имела не более одного ограниченного решения, необходимо и достаточно, чтобы траектории соответствующего марковского процесса достигали границы области. Возвратность в данном случае гарантирует достижение границы. В работе [77] приведены некоторые достаточные условия возвратности в терминах коэффициентов оператора.

Мера $\mu$, определенная на борелевских множествах, называется инвариантной для процесса $X$, если $\int P(t, x, \Gamma)\mu(dx) = \mu(\Gamma)$, где $P(t, x, \Gamma)$ — переходная функция процесса $X$. Это определение эквивалентно равенству $A^*\mu = 0$, где $A^*$ — инфинитезимальный оператор полугруппы, сопряженной с $T_t f(x) = M_x f(x_t)$. В работах [77] и [122] доказывается, что невырождающиеся возвратные процессы имеют единственную инвариантную меру. Если среднее время возвращения конечно, то эта мера имеет простой вероятностный смысл:

$$\mu(\Gamma) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \chi_\Gamma(x_s)\, ds -$$

доля времени, проведенная траекторией в множестве $\Gamma$; предел существует с вероятностью единица. Если коэффициенты оператора $L$ достаточно гладкие, то у меры $\mu(\cdot)$ существует плотность $m(x)$ по лебеговой мере. Функция $m(x)$ может быть найдена как единственное с точностью до постоянного множителя положительное решение уравнения $L^*m(x) = 0$. Мера $\mu(R_n)$ может быть бесконечной. Необходимые и достаточные условия конечности меры $\mu$ приведены в [77, 122].

В [77] доказывается, что если процесс возвратен и $\mu(R_n) < \infty$, то для любой ограниченной начальной функции $f(x)$ выполняется соотношение $\lim_{t\to\infty} u(t, x) = \frac{1}{\varphi}\int_R f(x)\,\mu\,(dx)$.

Если процесс возвратен и $\mu(R_n) = \infty$, то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t u(s, x)\, ds = 0$$

для любой финитной начальной функции $f(x)$.

Рассмотрим теперь оператор $L$, соответствующий невозвратному процессу. Для такого оператора внешняя задача Дирихле имеет неединственное ограниченное решение и для единственности необходимо задавать дополнительные условия. Так, например, если $L=\Delta$ и $n=3$, то для выделения единственного решения $u(x)$ достаточно потребовать, чтобы функция $u(x)$ имела заданный предел при $|x|\to\infty$. В случае произвольного $L$ оказывается, что на бесконечности имеется, вообще говоря, нетривиальная граница, т. е. вместо условия $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x)=c$ можно задавать разные пределы при различных способах стремления $|x|$ к бесконечности. Изучению бесконечно удаленной границы посвящены работы [72, 74]. Вопрос о стабилизации решения задачи Коши также приводит к изучению бесконечно удаленной границы, так как предельная функция будет решением уравнения $Lu=0$ с условиями на бесконечно удаленной границе, индуцированными начальной функцией.

В [72] рассматривается уравнение $Lu=\Delta u+\Sigma b_i(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ во всем пространстве или в неограниченной области. Предполагается, что при достаточно больших $|x|$ проекция вектора $b(x)=(b_1(x), \ldots, b_n(x))$ на радиус положительна и существует предел $\lim\limits_{r(x)\to\infty,\ \varphi(x)=\varphi_0} b_\varphi(x)=b(\varphi_0)$, где $(r(x), \varphi(x))$ — сферические координаты точки $x$; $\varphi(x)$ — точка на $(n-1)$-мерной единичной сфере $S_{n-1}$, $r(x)$ — расстояние от начала координат, $b_\varphi(x)$ — составляющая вектора $b(x)$ перпендикулярная радиусу-вектору точки $x$. Таким образом, мы получим векторное поле $\overline{b}(\varphi)$ на $S_{n-1}$. Приблизительно результат работы [72] можно сформулировать так. Пусть $V$ есть множество устойчивого равновесия поля $\overline{b}(\varphi)$ на $S_{n-1}$, $\rho_1, \ldots, \rho_m$ — устойчивые предельные циклы поля $\overline{b}(\varphi)$. Предположим, что, начинаясь из любой точки $x\in R_n$, за исключением точек неустойчивого равновесия (относительно структуры поля около последнего множества делаются некоторые предположения), интегральные кривые поля $\overline{b}(\varphi)$ входят в одну из точек множества $V$ или наматываются на устойчивый предельный цикл. Тогда во внешности ограниченной области $D$ с границей $\Gamma$ существует единственное решение следующей задачи:

$$Lu(x)=0, \text{ при } x\overline{\in}D,\quad u(x)|_\Gamma=\psi(x),$$

$$\lim_{\substack{r(x)\to\infty\\ \varphi(x)=\varphi_0\in V}} u(x)=g(\varphi),\quad \lim_{\substack{r(x)\to\infty\\ \varphi(x)\in\rho_k}} u(x)=c_k,\quad k=1, \ldots, m, \tag{4.2}$$

где $g(\varphi)$ — непрерывная функция на $V$, $c_k$ — постоянные. При определенных условиях каждое ограниченное решение имеет предел при приближении к точкам множества $V$. Если множество $D$ пусто, то задача (4.2) переходит в задачу во всем пространстве.

Предположим, что оператор $L$ в задаче (4.1) имеет вид $L=\Delta+\sum b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ и коэффициенты $\{b_i(x)\}$ удовлетворяют перечисленным выше условиям. В этом случае стабилизация в задаче (4.1) происходит уже не при любой начальной функции, и предельная функция уже не будет, вообще говоря, постоянной. В [72] приведены достаточные условия стабилизации. В частности, в задаче (4.1) происходит стабилизация, если функция $f(x)$ имеет предел при приближении к любой точке множества $V\cup\left(\bigcup_1^m\rho_k\right)$ и этот предел постоянен на каждом предельном цикле. Предельная функция при этом есть решение задачи (3.2) (множество $D$ пусто), где в качестве $g(\varphi)$ надо взять предельные значения начальной функции на точках множества $V$. Если начальная функция не имеет пределов при приближении к точкам равновесия, то стабилизации может и не быть. При некоторых условиях в последнем случае можно дать описание поведения $u(t, x)$ при $t\to\infty$ [72].

Работа [72] посвящена уравнениям довольно специального вида. Общий случай рассмотрен в [74]. Пусть

$$\mathfrak{L}=\alpha\sum\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)+\sum b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Предположим, что интегральные кривые векторного поля $b(x)$ уходят на бесконечность. Пусть среди этих кривых можно выделить конечное число $\gamma_1(t),\ldots,\gamma_m(t)$ устойчивых интегральных кривых, к которым стягиваются все интегральные кривые, за исключением сепаратрис. Тогда при некоторых предположениях о поведении поля $b(x)$ в окрестности особых кривых следующая задача во всем пространстве при не очень больших $\alpha$ имеет единственное решение

$$\mathfrak{L}u(x)=0,\ \lim_{t\to\infty}u(\gamma_i(t))=c_i\ \ i=1,\ldots,m \tag{4.3}$$

Постоянные $c_i$ выбираются произвольно, если устойчивые кривые при $t\to\infty$ расходятся достаточно быстро. В противном случае на «близких» кривых надо задавать одинаковые пределы. Оказывается, что при некоторых дополнительных предположениях любое ограниченное решение имеет предел вдоль кривых $\gamma_i(t)$. Если теперь рассмотреть задачу (4.1) при $L=\mathfrak{L}$, то ее решение стабилизируется к решению задачи (4.3) в предположении, что начальная функция имеет пределы вдоль каждой кривой $\gamma_i(t)$. Эти пределы и берутся в качестве граничных значений.

Стабилизация решения задачи Коши для параболического уравнения с коэффициентами зависящими от времени изучается в работах А. М. Ильина и Р. З. Хасьмынского [36, 37]. В неоднородном случае с задачей (4.1) естественным образом связан некоторый неоднородный по времени марковский процесс $X$.

Предположим, что процесс $X$ возвратен «равномерно» по $t$. Для этого достаточно, чтобы выполнялось следующее условие при достаточно больших $|x|$:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{ii}(t, x) + b_i(t, x) x_i) < -\delta < 0. \tag{4.4}$$

Условие (4.4) приблизительно означает, что перенос в процессе направлен к началу координат и в определенном смысле «сильнее» диффузии. Благодаря условию (4.4) траектории при достаточно больших значениях времени с большой вероятностью находятся в ограниченной части пространства. Это свойство обеспечивает стабилизацию решений задачи Коши. Условие (4.4) является достаточно точным; если сумма, стоящая слева, положительна при больших $|x|$, то распределение диффундирующей частицы с ростом $t$ «расплывается» и стабилизации, вообще говоря, не будет.

В работах [38], [40], изучается поведение траекторий при $t\to\infty$, когда одновременно в уравнении имеется малый параметр, стремящийся к нулю с ростом $t$. Остановимся подробнее на работе [38]. Рассмотрим задачу Коши для уравнения диффузии с инерцией

$$\frac{\partial u}{\partial t} = y\frac{\partial u}{\partial x} + F(x)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{A}{m}\left[\frac{T}{m}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\frac{\partial u}{\partial y}\right], \quad u(0, x) = f(x). \tag{4.5}$$

Уравнение (4,5) описывает броуновское движение в фазовом пространстве. Постоянные $m$, $T$, $A$ имеют простой физический смысл, $F(x)$ — поле внешних сил. В работе выясняется связь между уравнением (4.5) и обычным диффузионным уравнением в координатном пространстве. Доказывается, что при $\frac{m}{a} = \varepsilon\to 0$ и $t\sim\frac{1}{\varepsilon}$ решение задачи (4,5) асимптотически не отличается от $w(x+\varepsilon y, \varepsilon t)$, где $w(z, \tau)$ есть решение задачи Коши для диффузия в координатном пространстве

$$\frac{\partial m}{\partial \tau} = \frac{T}{m}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + F(z)\frac{\partial w}{\partial z}.$$

В качестве начальной функции нужно взять

$$w(0, z)=\sqrt{\frac{m}{2\pi T}}\int_{-\infty}^{\infty} f(z, y)\, e^{-\frac{my^2}{2T}}\,dy. \tag{4.6}$$

В работе [38] изучаются также следующие члены асимптотики.

Сформулированный результат можно интерпретировать как «перекачку» случайности с одной степени свободы (переменная $y$) на другую (переменная $x$). В самом деле, первоначальное уравнение (4.5) имело вторые производные только по переменным $y$. Следовательно соответствующий двумерный марковский процесс имел невырожденную диффузию только по направлению $y$, по оси $x$ диффузии не было. Однако скорость «детерминированного» движения по оси $x$ равна $y$, и, следовательно, случайным образом меняется во времени. Выбор соотношения между коэффициентом $\frac{A}{m}$ и временем сделан таким образом, что движение по оси $x$ со случайной скоростью переходит в диффузионный процесс. Результат этой работы обобщается на многомерный случай. Заметим, что задача о различных способах «перекачки» случайности с одной степени свободы на другую, об условиях возникновения диффузионного процесса представляет большой интерес и имеет много неизученных аспектов.

В заключение настоящего параграфа укажем на работы М. И. Фрейдлина [67, 73]. В первой из них изучается стабилизация в смешанной краевой задаче для вырождающегося уравнения с условием $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{\Gamma}=0$, где $l(x)$—некоторое неособое векторное поле на границе. Во второй изучается стабилизация первой смешанной краевой задачи для вырождающегося уравнения.

## § 5. ЗАДАЧА С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ. ГРАНИЦА МАРТИНА

Пусть на плоскости задана ограниченная область $D$ с гладкой границей $\Gamma$. Обозначим через $l(x)$ гладкое векторное поле определенное при $x\in\Gamma$. Рассмотрим следующую краевую задачу

$$Lu=0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{x\in\Gamma}=0. \tag{5.1}$$

Через $L$ мы обозначаем эллиптический невырождающийся в $D\cup\Gamma$ оператор 2-го порядка с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами.

Если поле $l(x)$ ни в одной точке не касается контура, то задача (5.1) по существу не отличается от задачи Неймана для оператора $L$: решение ее существует для функций удовлетворяющих единственному условию ортогональности (если $c(x)\equiv 0$), и единственно (с точностью до постоянной, если $c(x)\equiv 0$).

Предположим теперь, что поле $l(x)$ в некоторых точках касается контура $\Gamma$ так, что его проекция на внутреннюю нормаль меняет знак. В этом случае постановка задачи (5.1) должна быть уточнена. Задача (5.1), в случае вращающегося поля $l(x)$, изучалась во многих работах. Вероятностный подход к ней [46] оказался весьма плодотворным, достаточно, например, отметить, что на этом пути удалось существенно продвинуться в многомерном случае (в настоящее время некоторые результаты в многомерном случае получены также методами дифференциальных уравнений).

Обозначим через $S$ те точки множества $\Gamma$, в которых поле $l(x)$ касается $\Gamma$ таким образом, что проекция поля $l(x)$ на внутреннюю нормаль меняет знак. Рассмотрим поле $\tilde{l}(x)$, которое совпадает с $l(x)$ в тех точках $x$, в который $l(x)$ направлено внутрь области $D$, и с $-l(x)$, если $l(x)$ направлено наружу. Точки множества $S$ разделяются на две части. Мы скажем, что $x\in S_+$, если $x$ есть точка устойчивого равновесия поля $\tilde{l}(x)$, $S_-=S\setminus S_+$. Рассмотрим задачу

$$Lu=f(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{x\in\Gamma\setminus S}=0. \tag{5.2}$$

Оказывается, что для того чтобы задача (5.2) имела единственное решение, достаточно задать дополнительно значения функции $u(x)$ в точках множества $S_+$. Более того в каждой точке $a\in S_+$ можно задавать два значения $u_1(a)$, $u_2(a)$. Решение задачи (5.2) будет существовать, если при $a\in S_+$ потребовать, чтобы функция $u(x)$ принимала предельное значение $u_1(a)$ вдоль каждой кривой, входящей в $a$ и касающейся границы $\Gamma$ слева, и — значение $u_2(a)$ вдоль каждой кривой, касающейся границы справа. Если $u_1(a)\neq u_2(a)$, то функция $u(x)$ в точке $a$ имеет разрыв типа аргумента. В точках множества $S_-$ никаких условий задавать не надо и решение будет, вообще говоря, разрывно. Чтобы получить непрерывное в замкнутой области решение, необходимо на значения функций $u(x)$ на множестве $S_+$ наложить некоторые дополнительные условия. Число этих условий равно числу точек множества $S_-$. Непрерывное в замкнутой области решение удовлетворяет задаче (5.1).

Перечисленные результаты вероятностными методами получены М. Б. Малютовым ([46]). Скажем несколько слов об их вероятностном смысле. Для того, чтобы описать все ограниченные решения задачи (5.2), рассмотрим процесс $X=\{x_t, P_x\}$ и области $D$, управляемый оператором $L$ внутри области и претерпевающий отражение по направлению $\tilde{l}(x)$ на границе (при $x \in S$ процесс останавливается). Поле $\tilde{l}(x)$ в точках $x \in S$ касается границы. Это приводит к тому, что на границе на диффундирующую частицу действует перенос, обращающийся в бесконечность в точках $x \in S$. Если $a$—устойчивая точка поля $\tilde{l}(x)$, то перенос направлен к $a$. Обращение переноса в точке $a$ в бесконечность приводит к тому, что точка достигается с положительной вероятностью. Более того, траектория может войти в $a$ двумя способами: касаясь левой или правой стороны границы $\Gamma$ в окрестности точки $a$. В точки множества $S_-$ траектории не входят с вероятностью 1. Такое поведение траекторий приводит к тому, что функция $u(x)=M_x \psi(x_\tau)$, где $\psi(x)$—функция на $S'_+ \cup S''_+$, $x_\tau$— положение траектории в первый момент достижения $S_+$, удовлетворяет уравнению $Lu=0$, условию $\frac{\partial u}{\partial l}=0$ при $x \in \Gamma \setminus S$ и принимает граничные условия в $S_+$ (в каждой точке $a \in S_+$ задаются два условия—слева и справа). Выход траекторий в $S_+$ с вероятностью 1 влечет за собой единственность.

Если множество $S_+$ пусто, то решение существует, вообще говоря, не для любой правой части и единственно только с точностью до постоянной.

Аналогичная конструкция справедлива и в многомерном случае [47]. Особые кривые (где поле касается границы) естественным образом делятся на два класса — положительные и отрицательные. Задание условий на положительных кривых приводит к существованию и единственности. Более тонкие свойства задачи (5.2) (при $n=2$) изучены в работах С. Б. Дынкина [30, 31]. Там описано множество всех положительных (не только ограниченных) решений задачи (5.2). Оказывается, что с каждой точкой множества $S$ (не только $S_+$) связано базисное (минимальное) решение задачи (5.2). Остальные решения раскладываются по минимальным.

С каждой точкой $a \in S_+$ связано два ограниченных минимальных решения, соответствующих возможности задания в такой точке различных пределов слева и справа. Если поле $l(x)$ в точке $a \in S_+$ имеет касание порядка выше первого, то появляется дополнительно неограниченное решение, связанное с точкой $a$. Неограниченная минимальная функция связывается и с каждой точкой множества $S_-$.

Задача описания множества всех положительных решений краевой задачи впервые рассматривалась Мартином [120].

Мартином рассматривался случай оператора Лапласа. (На произвольные эллиптические операторы теория перенесена М. Г. Шуром [87, 88]). Им была предложена некоторая конструкция, с помощью которой каждое положительное решение представлялось как линейная комбинация (континуальная) базисных решений. Базисные решения естественным образом отождествляются с точками границы Мартина — пополнением области в специальной метрике, связанной с оператором, делающей область компактом. Конструкция Мартина оказалась чрезвычайно полезной и интересной для теории марковских процессов. Результат Е. Б. Дынкина [30, 31] есть как раз описание границы Мартина для задачи (5.2). Надо заметить, что до сих пор существует не очень много задач, в которых удается вычислить границу Мартина. В работах [26, 32] вычисляется граница Мартина для броуновского движения в пространстве эллипсоидов, т. е. в однородном пространстве всех неотрицательно определенных симметричных матриц с движениями, определяемыми заменой переменных в соответствующей квадратичной форме. Броуновское движение на этом пространстве определяется как марковский процесс, управляемый оператором Бельтрами—Лапласа этого многообразия. Граница Мартина для броуновского движения на общих симметрических пространствах изучалась Ф. И. Карпелевичем [39]. Результаты работ [26, 32], [42] основаны на замечательных алгебраических свойствах рассматриваемых задач.

Следует отметить работы [99], [106], [50], [119], где приводится конструкция Мартина для марковских цепей, а также работы [46, 74, 75], где делались определенные шаги в вычислении границы Мартина для различных краевых задач.

Задачи, связанные с теорией Мартина, и применения этой теории вызывают в последнее время большой интерес. В терминах этой теории многие понятия теории марковских процессов обрели свою естественную общность. В частности, очень естественным является вопрос о наиболее общих граничных условиях, которые можно ставить на границе Мартина. Такая задача исследовалась в работах [33], [60].

## БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Благовещенский Ю. Н.**, Некоторые теоремы о диффузионных процессах с малым коэффициентом диффузии и их приложение к параболическим уравнениям второго порядка с малым параметром, Докл. АН СССР, 1961, 138, № 6, 1259—1262 (РЖМат, 1962, 8В20)
2. —, Диффузионные процессы, зависящие от малого параметра, Теория

вероятностей и ее примен., 1962, **7**, № 2, 135—152 (РЖМат, 1962, 12В25)
3. —, Дифференциальные свойства диффузионных процессов, зависящих от малого параметра, и задачи Коши для вырождающихся параболических уравнений. Докл. АН СССР, 1963, **152**, № 5, 1027—1030 (РЖМат, 1964, 3Б331)
4. —, Задача Коши для вырождающихся квазилинейных параболических уравнений. Теория вероятностей и ее примен., 1964, **9**, № 2, 378—382 (РЖМат, 1964, 10Б235)
5. —, Фрейдлин М. И., Некоторые свойства диффузионных процессов, зависящих от параметра. Докл. АН СССР, 1961, **138**, № 3, 508—511 (РЖМат, 1962, 2В41)
6. **Вентцель А. Д.**, О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов. Теория вероятностей и ее примен. 1959, **4**, № 2, 172—185 (РЖМат, 1960, 13097)
7. —, Об абсолютной непрерывности переходных вероятностей для одномерного диффузионного процесса. Теория вероятностей и ее примен. 1961, 6, № 4, 439—446 (РЖМат, 1962, 6В21)
8. —, Об уравнениях теории условных марковских процессов. Теория вероятностей и ее примен. 1965, **10**, № 2, 390—393 (РЖМат, 1966, 1В60)
9. **Волконский В. А.**, Случайная замена времени в строго марковских процессах. Теория вероятностей и ее примен., 1958, 3, № 3, 332—350 (РЖМат, 1960, 635)
10. —, Построение неоднородных процессов с помощью случайной замены времени. Теория вероятностей и ее примен., 1961, **6**, № 1, 47—56 (РЖМат, 1961, 10В33)
11. **Гирсанов И. В.**, Сильно феллеровские процессы. Теория вероятностей и ее примен., 1960, **5**, № 1, 7—28 (РЖМат, 1961, 2В36)
12. —, О решении некоторых краевых задач для параболических и эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами, Докл. АН СССР, 1960, **135**, № 6, 1311—1313 (РЖМат, 1961, 8Б186)
13. —, О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры. Теория вероятностей и ее примен., 1960, **5**, № 3, 314—330 (РЖМат, 1961, 11В27)
14. —, Минимальные задачи в теории диффузионных процессов, Докл. АН СССР, 1961, **136**, № 4, 761—764 (РЖМат, 1964, 8В43)
15. —, О стохастическом интегральном уравнении Ито. Докл. АН СССР, 1361, 138, № 1, 18—21 (РЖМат, 1962, 2В40)
16. —, Стохастические уравнения Ито и некоторые их обобщения, «Тр. VI Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1960», Вильнюс, Гос. изд-во полит. и научн. лит. ЛитССР, 1962, 133—143 (РЖМат, 1963, 7В143)
17. —, Пример неединственности решения стохастического уравнения Ито. Теория вероятностей и ее примен., 1962, **7**, № 3, 336—342 (РЖМат, 1964, 7В64)
18. **Гихман И. И.**, К теории дифференциальных уравнений случайных процессов. Укр. матем. ж. 1950, **2**, № 4, 37—63, 1951, **3**, № 3, 317—339
19. —, Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М. 1965 г. (РЖМат, 1966, 7В30)
20. **Дуб Дж.**, Вероятностные процессы, М., И. Л., 1954 г. (РЖМат, 1957, 5755К)
21. **Дынкин Е. Б.**, Инфинитезимальные операторы марковских процессов. Теория вероятностей и ее примен., 1956, **1**, № 1, 38—52 (РЖМат, 1958, 3926)
22. —, Марковские процессы и полугруппы операторов. Теория вероятностей и ее примен., 1956, **1**, № 1, 25—37 (РЖМат, 1957, 8046)

23. —, Одномерные непрерывные строго марковские процессы. Теория вероятностей и ее примен., 1959, **4**, № 1, 3—54 (РЖМат, 1961, 8639)
24. —, Основания теории марковских процессов, М., Физматгиз, 1959 г. (РЖМат, 1963, 2В106К)
25. —, Марковские процессы и связанные с ними задачи анализа, Успехи матем. наук, 1960, **15**, № 2, 3—24 (РЖМат, 1962, 4В20)
26. —, Неотрицательные собственные функции оператора Лапласа — Бельтрами и броуновское движение в некоторых симметрических пространствах. Докл. АН СССР 1961, **141**, № 2, 288—291 (РЖМат, 1964, 4Б329)
27. —, Броуновское движение с убывающей мерой $\mu$ и мерой скорости $\nu$, Докл. АН СССР, 1962, **144**, № 3, 483—486 (РЖМат, 1963, 3В119)
28. —, Марковские процессы, 1963, М. (РЖМат, 1964, 4В33К)
29. —, Оптимальный выбор момента остановки для марковского процесса, Докл. АН СССР, 1963, **150**, № 2, 238—240 (РЖМат, 1964, 1В50)
30. —, Неотрицательные решения краевой задачи с наклонной производной, Докл. АН СССР, 1964, **157**, № 5, 1028—1030 (РЖМат, 1965, 4В262)
31. —, Границы Мартина и неотрицательные решения краевой задачи с наклонной производной, Успехи матем. наук, 1964, **19**, № 5, 3—50 (РЖМат, 1965, 12Б290)
32. —, Броуновское движение в некоторых симметрических пространствах и неотрицательные собственные функции оператора Лапласа — Бельтрами. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1966, **30**, № 2, 455—478
33. —, Общие дополнительные условия для краевой задачи с наклонной производной, Докл. АН СССР, 1966, **168**, № 4, 737—739 (РЖМат, 1966. 10В27)
34. —, Юшкевич А. А., Строго марковские процессы. Теория вероятностей и ее примен., 1961, **1**, № 1, 149—154 (РЖМат, 1957, 7201)
35. **Ильин А. М.**, Об одном классе ультрапараболических уравнений. Докл. АН СССР, 1964, **159**, № 6, 1214—1217
36. —, Хасьминский Р. З., Об эргодическом свойстве неоднородных диффузионных процессов, Докл. АН СССР, 1962, **145**, № 5, 986—988 (РЖМат, 1963, 7В41)
37. —, —, Асимптотическое поведение решений параболических уравнений и эргодическое свойство возвратных диффузионных процессов. Матем. сб., 1963, **60**, № 3, 366—393 (РЖМат, 1963, 10Б251)
38. —, —, Об уравнениях броуновского движения. Теория вероятностей и ее примен., 1964, **9**, № 3, 466—491
39. **Карпелевич Ф. И.**, Неотрицательные собственные функции оператора Бельтрами—Лапласа на симметрических пространствах неположительной кривизны. Докл. АН СССР, 1963, **151**, № 6, 1274—1276 (РЖМат, 1964, 5Б479)
40. **Кац М.**, О некоторых связях между теорией вероятностей и дифференциальными и интегральными уравнениями. «Математика». Период. сб. перев. ин. статей, 1957, **1**, № 2, 95—124 (РЖМат, 1961, 2В53)
41. **Коган Я. А.**, Применение стохастических уравнений к изучению второй задачи для параболических дифференциальных уравнений с малым параметром. Теория вероятностей и ее примен. 1965, **10**, № 2, 301—309 (РЖМат, 1966, 1В67)
42. **Колмогоров А. Н.**, Об аналитических методах в теории вероятностей. Успехи матем. наук, 1938, № 5, 5—41
43. **Крылов Н. В.**, Некоторые свойства квазидиффузионного процесса. Успехи матем. наук, 1966, **10**, № 2
44. —, О решении эллиптических уравнений второго порядка. Успехи матем. наук, 1966, **21**, 2
45. —, О квазидиффузионных процессах. Теория вероятностей и ее примен., 1966, **11**, № 2, 424—443

46. **Малютов М. Б.**, Броуновское движение с отражением и задача с наклонной производной, Докл. АН СССР, 1964, **156**, № 6, 1285—1287 (РЖМат, 1964, 12В42)
47. —, О задаче с наклонной производной в трехмерном пространстве, Докл. АН СССР, 1967, **72**, 2
48. **Молчанов С. А.**, О гармонических функциях для обрывающихся марковских процессов. Вестн. Моск. ун-та, матем., механ., 1965, № 3, 44—46
49. —, Об одной задаче из теории диффузионных процессов. Теория вероятностей и ее примен., 1964, **9**, № 3, 523—528 (РЖМат, 1965, 2В72)
50. **Невельсон М. Б.**, О поведении инвариантной меры диффузионного процесса с малой диффузией на окружности. Теория вероятностей и ее примен., 1964, **9**, № 1, 139—146 (РЖМат, 1964, 9В25)
51. **Олейник О. А.**, Об одной задаче Г. Фикера. Докл. АН СССР, 1964, **157**, № 6, 1297—1300
52. —, О гладкости решения вырождающихся эллиптических и параболических уравнений, Докл. АН СССР, 1965, **163**, № 3, 577—580 (РЖМат, 1965, 12Б288)
53. **Скороход А. В.**, О дифференцируемости мер, соответствующих случайных процессам II. Марковские процессы. Теория вероятностей и ее примен., 1960, **5**, № 1, 45—53 (РЖМат, 1960, 14110)
54. —, О существовании и единственности решений стохастических уравнений. Сибирск. матем. ж., 1961, **2**, № 1, 129—137 (РЖМат, 1962, 3В33)
55. —, Об интегро-дифференциальных уравнениях, связанных с решениями стохастических уравнений, Доповіді АН УРСР, 1961, № 7, 854—858 (РЖМат, 1962, 5Б294)
56. —, О существовании решений стохастических уравнений. Доповіді АН УРСР, 1961, № 9, 1119—1122 (РЖМат, 1962, 5Б355)
57. —, Стохастические уравнения для процессов диффузии с границами. Теория вероятностей и ее примен. I, 1961, **6**, № 3, 287—298 (РЖМат, 1962, 4В21); II, 1962, **7**, № 1, 5—25 (РЖМат, 1962, 11В25)
58. —, Исследования по теории случайных процессов, Киев, Киевск. ун-т, 1961 (РЖМат, 1963, 4В111К)
59. —, Ветвящиеся диффузионные процессы. Теория вероятностей и ее применен., 1964, **9**, № 3, 492—497 (РЖМат, 1965, 2В74)
60. —, Граничные условия для некоторых марковских процессов. Теория вероятностей и ее примен. 1964, **9**, № 4, 644—655 (РЖМат, 1966, 2В33)
61. —, Процессы с независимыми приращениями, М., Физматгиз, 1965
62. —, О локальном строении непрерывных марковских процессов. Теория вероятностей и ее примен., 1966, **11**, № 3, 381—423
63. **Фрейдлин М. И.**, Смешанная краевая задача для эллиптических уравнений второго порядка с малым параметром. Докл. АН СССР, 1962, **143**, № 6, 1300—1303 (РЖМат, 1963, 12Б326)
64. —, Задача Дирихле для уравнения с малым параметром с разрывными коэффициентами. Докл. АН СССР, 1962, **144**, № 3, 501—504 (РЖМат, 1963, 12Б327)
65. —, Применение стохастических уравнений К. Ито к исследованию второй краевой задачи. Тр. VI Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике. Вильнюс, Гос. изд-во полит. и научн. лит. ЛитССР, 1962 (РЖМат, 1963, 11Б296)
66. —, О стохастических уравнениях Ито и вырождающихся эллиптических уравнениях. Изв. АН СССР Сер. матем., 1962, **26**, № 5, 653—676 (РЖМат, 1963, 5Б271)
67. —, Диффузионные процессы с отражением и задача с косой производной на многообразии с краем. Теория вероятностей и её примен., 1963, **8**, № 1, 80—88 (РЖМат, 1964, 10Б206)

68. —, Об априорных оценках решений вырождающихся эллиптических уравнений. Докл. АН СССР, 1964, 158, № 2, 281—283 (РЖМат, 1965, 1Б272).
69. —, Задача Дирихле для уравнения с периодическими коэффициентами, зависящими от малого порядка. Теория вероятностей и её примен., 1964, 9, № 1, 133—139
70. —, Замечание об обобщенном решении задачи Дирихле. Теория вероятностей и её примен., 1965, 10, № 1, 175—178 (РЖМат, 1965, 10Б176)
71. —, Диффузионные процессы и малый параметр в эллиптических уравнениях с разрывными коэффициентами. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965, 29, № 5, 1005—1036
72. —, Внешняя задача Дирихле в классе ограниченных функций. Теория вероятностей и её примен., 1966, 11, № 3, 463—471
73. —, О постановке граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений. Докл. АН СССР, 1966, 170, № 3
74. —, Об эллиптических уравнениях в неограниченных областях. Докл. АН СССР, 1967
75. **Хасьминский Р. З.**, Диффузионные процессы и эллиптические дифференциальные уравнения, вырождающиеся на границе области. Теория вероятностей и ее примен., 1958, 3, № 4, 430—451 (РЖМат, 1961, 4Б238)
76. —, О положительных решениях уравнения $\mathfrak{A}U+VU=0$. Теория вероятностей и ее примен., 1959, 4, № 3, 332—341 (РЖМат, 1960, 14112)
77. —, Эргодические свойства возвратных диффузионных процессов и стабилизация решений параболических уравнений. Теория вероятностей и её примен., 1960, 5, 2, 196—214 (РЖМат, 1961, 3В240)
78. —, Вероятностное представление решения некоторых дифференциальных уравнений. Тр. IV Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1960 г., Вильнюс, Гос. изд-во полит. и научн. лит. ЛитССР, 1962 (РЖМат, 1963, 7В145)
79. —, О некоторых дифференциальных уравнениях, встречающихся при исследовании колебаний с малыми случайными возмущениями, Докл. АН СССР, 1962, 142, № 3, 560—563 (РЖМат, 1962, 11Б198)
80. —, Об устойчивости траекторий марковских процессов. Прикл. матем. и мех., 1962, 26, № 6, 1025—1032 (РЖМат, 1963, 12В145)
81. —, Об одной оценке решения параболического уравнения и некоторых ее применениях. Докл. АН СССР, 1962, 143, № 5, 1060—1063 (РЖМат, 1963, 10Б248)
82. —, О принципе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией, Теория вероятностей и её примен., 1963, 8, № 1, 3—25 (РЖМат, 1964, 4В53)
83. —, О диффузионных процессах с малым параметром, Изв. АН СССР. Сер. Матем., 1963, 27, № 6, 1281—1300 (РЖМат, 1964, 4Б289)
84. —, О случайных процессах, определяемых дифференциальными уравнениями с малым параметром. Теория вероятностей и ее примен., 1966, 11, № 2, 240—259
85. —, Некоторые предельные теоремы для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью. Докл. АН СССР, 1966, 168, 4. 755—758 (РЖМат, 1966, 10В57)
86. **Шур М. Г.**, Гармонические и супергармонические функции, связанные с диффузионным процессом, Сибирск. матем. ж., 1960, 1, № 2, 277—296 (РЖМат, 1962, 4В22)
87. —, О границе Мартина для линейных эллиптических операторов, Докл. АН СССР, 1962, 144, 2, 290—292 (РЖМат, 964, 8Б272)
88. —, Граница Мартина для линейного эллиптического оператора второ-

го порядка, Изв. АН СССР, Сер. матем., 1963, **27**, № 1, 45—60 (РЖМат, 1964, 8Б271)
89. —, О функциях супергармонических для марковского процесса, Теория вероятностей и её примен., 1964, **9**, № 1, 125—133 (РЖМат, 1965, 1В28)
90. **Юшкевич А. А.**, К определению строго марковского процесса, Теория вероятностей и ее примен., 1960, **5**, № 2, 237—243 (РЖМат, 1961, 3В38)
91. **Blumenthal R.**, An extended Markoff property. Trans. Amer. Math. Soc., 1957, **85**, № 1, 52—75
92. **Brelot M.**, Doob J. L., Limites angulaires et limites fines, Ann. Inst. Fourier. 1963, **13**, № 2, 395—415 (РЖМат, 1965, 5Б137)
93. **Doob J. L.**, Seme-martingales and subharmonic functions. Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **77**, № 1, 86—121 (РЖМат, 1957, 664)
94. —, Martingales and one dimensional diffusion. Trans. Amer. Math. Soc., 1955 **78**, № 1, 168—208 (РЖМат, 1960, 1905)
95. —, A probabilistic approach to the heat equation. Trans Amer. Math. Soc., 1955, **80**, № 1, 216—280 (РЖМат, 1961, 8В43)
96. —, Brownian motion on a Green space. Теория вероятностей и её примен., 1957, **2**, № 1, 3—33 (РЖМат, 1960, 6761)
97. —, Conditional Brownian motion and the boundary limites of harmonic functions, Bull. Soc. Math. France, 1957, **85**, 431—458
98. —, Boundary limit theorem for a halfspace, J. Math. pures et appl., ser 9, 1958, **37**, № 4, 385—392 (РЖМат, 1960, 7530)
99. —, Discrete potential theory and boundaries, J. Math. Mech., 1959, **8**, № 3, 433—468 (РЖМат, 1962, 9В30)
100. —, Boundary properties of functions with finit Dirichlet integrales, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 1962, **12**, 573—622 (РЖМат, 1964, 5Б291)
101. **Feller W.**, Diffusion processes in one dimension, Trans. Amer. Math Soc., 1954, **77**, № 1, 1—31, Одномерные диффузионные процессы, Математика (сб. переводов), 1958, **2**, № 2, 120—146
102. —, Generalized second order differential operators and their lateral conditions, Illinois J. Math., 1957, **1**, № 4, 459—504 (РЖМат, 1961, 4Б521)
103. —, Differential operators with positive maximum propert. Illinois J. Math, 1959, **3**, № 2, 182—186 (РЖМат, 1961, 4Б493)
104. **Harris T. E.**, The existence of stationary measures for certain Markov processes, 3 rd Berkely Sympos. Math Statistics and Probability, v. **2**, 1956, Berkely — Los Angeles, 113—124 (РЖМат, 1958, 5928)
105. **Hunt G.**, Markoff processes and potentials, I—III, Illinois J. Math. 1957, **1**, № 1, 44—93, **1**, № 3, 316—369, 1958, **2**, № 2, 151—213 (РЖМат, 1961, 4В15, 11В28, 12В33) Марковские процессы и потенциалы, 1959, М., И. Л.
106. —, Markoff chains and Martin boundary, Illinois J. Math, 1960, **4**, № 3, 313—340 (РЖМат, 1961, 9В68)
107. **Ikeda N.**, On the construction of two-dimensional diffusion processes satisfying Wentzell's boundary conditions and its aplications to boundary value problem, Mem. coll. Sci. Univ. Kyoto, 1961, **A23**, № 3, 368—427 (РЖМат, 1964, 1В56)
108. —, Nagasawa M., Sato K., A time reversion of a Markov processes with Killing, Kodai Math. Sem. Repts, 1964, **16**, № 2, 88—97 (РЖМат, 1966, 2В34)
109. **Ito K.**, On a formula concerning stochastic differentials, Nagoya Math. J., 1951, **3**, № 1, 55—65 Об одной формуле касающейся стохастических дифференциалов. Математика (сб. переводов), 1959, **3**, № 5, 131—141
110. —, Stochastic differential equation on a differentiable manifold, I, Nagoya Math J., 1950, **1**, № 1, 35—47; II, — Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1953, **A28**, № 1, 81—85 (РЖМат, 1960, 1903)

111. —, On stochastic differential equations, Mem. Amer. Math. Soc., № 4, 1951. О стохастических дифференциальных уравнениях, Математика (сб. переводов), 1957, 1, № 1, 78—116
112. —, McKean H. P., Potential and random walk, Illinois J. Math. 1960, 4, № 1, 119—132 (РЖМат, 1962, 3В21)
113. —, —, Brownian motion in a half line, Illinois J. Math, 1963, 7, № 2, 181—231 (РЖМат, 1964, 4В39)
114. —, —, Diffusion prosesses and their sample paths, Berlin, Heidelberg—New York, Springer, 1965 (РЖМат, 1966, 7В39)
115. **Ito S.**, Foundamental solutions of a parabolic differential equations and boundary value problems, Japan J. Math., 1957, 27, № 1, 55—102
116. **Kakutani S.** Markoff process and Dirichle problem, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1945, 21, 227—233
117. **Knight F.**, On the random walk and Brownian motion, Trans. Amer. Math. Soc., 1962, 103, № 2, 218—228 (РЖМат, 1963, 7В124)
118. —, Randon walks and a sojourn density process of Brownian motion, Trans. Amer. Math. Soc. 1963, 107, № 1, 56—86 (РЖМат, 1964, 7В48)
119. **Kunita H.**, Watanabe T., Markov processes and Martin boundaries, Illinois J. Math., 1965, 9, № 3, 485—526 (РЖМат, 1966, 8В41)
120. **Martin R. S.**, Minimal positive harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc., 1941, 49, № 1, 137—172
121. **Maryama G.**, Continuous Markov processes and stochastic equations, Rend. Circolo mat. Palermo, 1955, 4, 143—178 Непрерывные марковские процессы и стохастические уравнения, Математика (сб. переводов), 1957, 1, № 2, 117—141
122. —, Tanaka H., Ergodic property of $n$-dimensional Markoff processes., Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 1959, 13, № 2, 157—172 (РЖМат, 1961, 1В29)
123. **McKean H. P.**, A Holder condition for Brownian local time, J. Math. Kyoto Univ., 1962, 1, № 2, 195—201 (РЖМат, 1962, 11В15)
124. —, A Scorohod's stohastic integral equation for a refflecting barrier diffusion, J. Math. Kyoto Univ., 1963, 3, № 1, 85—88 (РЖМат, 1965, 1В33)
125. —, Ray D. B., Spectral distribution of a differential operator, Duke Math. J., 1962, 29, № 2, 281—292 (РЖМат, 1963, 9Б431)
126. **Nagasawa M.**, The adjoint process of diffusion with reflecting barrier, Kodai Math. Sem. Repts, 1961, 13, № 4, 235—248 (РЖМат, 1962, 10В44)
127. **Petrovski I. G.**, Über das Irrfahrproblem, Math. Ann., 1934, 109, 425—444
128. **Ray D. B.**, On spectra of second-order differential operators, Trans. Amer. Math. Soc., 1954, 77, № 2, 299—321 (РЖМат, 1956, 3021)
129. —, Stationary Markov processes with continuons time, Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 82, № 4, 452—439 (РЖМат, 1958, 6965)
130. —, Pesolvents, transitions functions and strongly Markovian processes, Ann. Math., 1959, 70, № 1, 43—72 (РЖМат, 1960, 11880)
131. —, Sojourn times on diffusion process. Illinois J. Math. 1963, 7, № 4, 615—630 (РЖМат, 1965, 1В39)
132. **Sato K.**, Time change and Rilling for multi—dimensional reflecting diffusion, Proc. Japan Acad., 1963, 39, № 2, 69—73 (РЖМат, 1964, 3В48)
133. —, Tanaka H., Lokal times on the boundary for multi—dimensional refflecting diffusion, Proc. Japan Acad., 1962, 38, № 10, 699—702 (РЖМат, 1964, 3В48)
134. —, Ueno T., Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary, J. Math. Kyoto Univ., 1965, 4, № 3, 529—605 (РЖМат, 1967, 2В48)
135. **Tanaka H.**, Certain limit theorems conserning one-dimensional diffusion processes, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 1958, A12, № 1, 1—11
136. Existence of diffusions with continuous coefficients, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 1964, A18, № 1, 89—103 (РЖМат, 1965, 4Б464)

137. **Ueno T.**, On recurrent Markov processes, Kodai Math. Sem. Repts, 1960, **12**, № 3, 109—142 (РЖМат, 1961, 9В69)
138. —, The diffusion satisfying Wentzell's boundary conditions and the Markov process on the boundary, Proc. Japan Acad., 1960, **36**, № 9, 533—538 (РЖМат, 1963, 10В111)
139. **Watanabe H.**, Potential operator of a recurrent strong Feller process in the strict sense and boundary value problem, J. Math. Soc. Japan, 1964, **16**, № 2, 83—96 (РЖМат, 1965, 5В28)
140. **Watanabe T.**, On the theory of Martin boundaries induced by countable Markov process. Mem. coll. Sci. Kyoto Univ., 1960, **A33**, № 1, 39—108 (РЖМат, 1963, 11В156)