



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. M. Gulevich, An estimation of deviation of fixed points from a nonconvex set, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1982, Volume 122, 13–16

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.80

February 6, 2025, 23:01:07



ОЦЕНКА ОТКЛОНЕНИЯ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ОТ
НЕВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА

Теорема I статьи [2] утверждает: если A непустое ограниченное замкнутое подмножество гильбертова пространства H , $f: \overline{CO} A \rightarrow H$ нерастягивающее отображение и $f(\partial A) \subset A$, то f имеет неподвижную точку в $\overline{CO} A$.

Здесь будет приведено количественное уточнение этого результата.

В дальнейшем мы придерживаемся обозначений, принятых в статье [2].

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ линейное нормированное пространство. Отклонением множества $B \subset X$ от множества $A \subset X$ называется величина $\delta(B, A) = \sup_{x \in B} \inf_{y \in A} \|x - y\|$ (см., например [7, стр. 156]). Величина $\lambda(A) = \delta(\overline{CO} A, A)$ называется мерой невыпуклости множества A (см. [4]). Величина $\tau(A) = \inf_{x \in X} \sup_{y \in A} \|x - y\|$ называется чебышевским радиусом множества A (см., например, [5, стр. 178]). Если существует наименьший шар в X , содержащий A , то его радиус равен $\tau(A)$. Через $B(x, \tau)$ обозначаем замкнутый шар в X с центром в точке $x \in X$ и радиусом $\tau \geq 0$, через $Fix f$ обозначаем множество неподвижных точек отображения f , $d(A)$ — диаметр множества A .

ТЕОРЕМА. Пусть A непустое ограниченное замкнутое подмножество гильбертова пространства H , $f: \overline{CO} A \rightarrow H$ нерастягивающее отображение и $f(\partial A) \subset A$. Тогда $\delta(Fix f, A) \leq 2^{-\frac{1}{2}} d(A)$, и эта оценка точная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме I из [2] множество $Fix f \neq \emptyset$. Так как $Fix f \subset \overline{CO} A$, $\delta(Fix f, A) \leq \lambda(A)$. Далее, можно показать, что в гильбертовом пространстве справедливо неравенство $\lambda(A) \leq \tau(A)$. Но по теореме Раутледжа [6] $\tau(A) \leq 2^{-\frac{1}{2}} d(A)$. Следовательно, $\delta(Fix f, A) \leq 2^{-\frac{1}{2}} d(A)$. Покажем, что

эта оценка точная, то есть найдутся ограниченное замкнутое множество A из H и нерастягивающее отображение $f: \overline{CO} A \rightarrow H$, $f(\partial A) \subset A$ такие, что $\delta(Fix f, A) = 2^{-\frac{1}{2}} d(A)$.

В качестве A возьмем ортонормированную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ из H (H считаем бесконечномерным). Тогда

да всякий элемент X из $\overline{CO} A$ представим в виде ряда $X = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$, $\lambda_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$. Определим нестягивающее отображение $f: \overline{CO} A \rightarrow H$ следующим образом: $f(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n X_{n+1}$, где $X = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n X_n$, $\lambda_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$. Тогда $f(A) \subset A$, $Fix f = \{0\}$ и легко убедиться, что $\delta(Fix f, A) = 2^{-\frac{1}{2}} d(A)$.

Теорема доказана.

По-видимому, представляет интерес более простое доказательство теоремы Раутледжа [6], которая утверждает, что для всякого ограниченного подмножества A гильбертова пространства H существует единственный наименьший шар в H , содержащий A , и его радиус $r(A) \leq 2^{-\frac{1}{2}} d(A)$, причем эта оценка точная. Приводимое нами доказательство не использует известной теоремы Юнга (см., например, [3, стр.28-30]).

Как заметил Кли [6], существование и единственность наименьшего шара в H , содержащего данное множество $A \subset H$, есть простое следствие равномерной выпуклости гильбертова пространства.

Далее, не теряя в общности, можно считать, что шар $B(0,1)$ является наименьшим шаром в H , содержащим множество A . Покажем, что $d(A) \geq \sqrt{2}$. Допустим, что это не так. Следовательно найдется число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $d(A) < \sqrt{2} - \varepsilon_0$. Отметим, что $d(A)$ не может быть меньше 1. Иначе найдется шар $B(X_1, 1)$, $X_1 \neq 0$, содержащий множество A , что противоречит единственности наименьшего шара в H .

Рассмотрим сначала случай, когда в A имеется элемент X_0 такой, что $\|X_0\| = 1$. Тогда A содержится в шаре $B(X_0, \sqrt{2} - \varepsilon_0)$.

Следовательно $A \subset B(0,1) \cap B(X_0, \sqrt{2} - \varepsilon_0) = A_1$. Покажем, что множество A_1 содержится в шаре $B(\lambda_0 X_0, \sqrt{1 - \lambda_0^2})$, где $\lambda_0 = 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{2} - \varepsilon_0)^2 \in (0, \frac{1}{2}]$. Действительно, для всякого X из A_1 имеем $\|X - \lambda_0 X_0\|^2 = \|X\|^2 - 2\lambda_0(X, X_0) + \lambda_0^2 \leq \|X\|^2 + \lambda_0[(\sqrt{2} - \varepsilon_0)^2 - \|X\|^2 - 1] + \lambda_0^2$, здесь мы воспользовались тем, что $-2(X, X_0) = \|X - X_0\|^2 - \|X\|^2 - 1 \leq (\sqrt{2} - \varepsilon_0)^2 - \|X\|^2 - 1$. Далее, $\|X\|^2 + \lambda_0[(\sqrt{2} - \varepsilon_0)^2 - \|X\|^2 - 1] + \lambda_0^2 = \|X\|^2 + \lambda_0[2(1 - \lambda_0) - \|X\|^2 - 1] + \lambda_0^2 = (1 - \lambda_0)\|X\|^2 + 2\lambda_0(1 - \lambda_0) - \lambda_0 + \lambda_0^2 = (1 - \lambda_0)\|X\|^2 + \lambda_0 - \lambda_0^2 \leq 1 - \lambda_0 + \lambda_0 - \lambda_0^2 = 1 - \lambda_0^2$.

Таким образом $A \subset A_1 \subset B(\lambda_0 X_0, \sqrt{1 - \lambda_0^2})$.

Теперь рассмотрим случай, когда $A \cap \partial B(0,1) = \emptyset$. Тогда, так как $B(0,1)$ наименьший шар в H , содержащий A , для всякого $\varepsilon \in (0,1)$ найдется элемент $X_\varepsilon \in A$ такой, что $1 - \varepsilon \leq \|X_\varepsilon\| < 1$. Но по предположению $1 \leq d(A) \leq \sqrt{2} - \varepsilon_0$, поэтому $A \subset B(X_\varepsilon, \sqrt{2} - \varepsilon_0)$ для всякого $\varepsilon \in (0,1)$. Тем более A лежит в шаре $B(\frac{X_\varepsilon}{\|X_\varepsilon\|}, \sqrt{2} - \varepsilon_0 + 1 - \|X_\varepsilon\|)$, $\varepsilon \in (0,1)$. При $\varepsilon = \nu = \frac{\varepsilon_0}{2}$ имеем $\sqrt{2} - \varepsilon_0 + 1 - \|X_\nu\| \leq \sqrt{2} - \frac{\varepsilon_0}{2}$, поэтому $A \subset B(0,1) \cap B(\frac{X_\nu}{\|X_\nu\|}, \sqrt{2} - \frac{\varepsilon_0}{2})$. Тогда, точно так же, как это было сделано раньше, доказывается, что $A \subset B(\lambda_1, \frac{X_\nu}{\|X_\nu\|}, \sqrt{1 - \lambda_1^2})$, где $\lambda_1 = 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{2} - \frac{\varepsilon_0}{2})^2 \in (0, \frac{1}{2}]$.

Таким образом, если $d(A) \leq \sqrt{2} - \varepsilon_0$, $0 < \varepsilon_0 \leq \sqrt{2} - 1$, то $\nu(A) \leq \sqrt{1 - \lambda_1^2} < 1$. Получили противоречие. Следовательно, $d(A) \geq \sqrt{2}$.

В завершение доказательства отметим, что если в качестве множества A взять ортонормированную последовательность $\{X_n\}_{n=1}^\infty$, $X_n \in H$ (H бесконечномерно), то будет выполняться равенство: $\nu(A) = 2^{-\frac{1}{2}} d(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если в формулировке теоремы множество A содержится в конечномерном (сдвинутом) подпространстве H_1 и $\dim H_1 = n$, то по теореме Юнга получаем оценку:

$$\delta(\text{Fix } f, A) \leq \sqrt{\frac{n}{2n+2}} d(A).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В доказательстве теоремы отмечалось, что для ограниченного множества A из H справедливо неравенство $\lambda(A) \leq \nu(A)$. Можно доказать следующее утверждение:

для линейного нормированного пространства X эквивалентны условия:

- 1) X есть гильбертово пространство или X двумерно;
- 2) $\lambda(A) \leq \nu(A)$ для всякого ограниченного множества $A \subset X$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Нетрудно доказать также следующее утверждение: пусть X строго выпуклое линейное нормированное пространство, A компакт в X , $F = \{f_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ произвольное семейство нестягивающих отображений, $f_\alpha: \overline{\text{co}} A \rightarrow X$, $f_\alpha(A) \subset A$ для всех $\alpha \in \Omega$ и пусть все отображения из F коммутируют на множестве A . Тогда $\bigcap_{\alpha \in \Omega} \text{Fix } f_\alpha \neq \emptyset$.

Применяя нашу теорему и замечания 1,2, можно получить следующие оценки:

- а) если $X = H$, то $\delta(\bigcap_{x \in \Omega} \text{Fix } f_x, A) \leq 2^{-\frac{1}{2}} d(A)$,
 в) если $X = R^n$, то $\delta(\bigcap_{x \in \Omega} \text{Fix } f_x, A) \leq \sqrt{\frac{n}{2n+2}} d(A)$,
 с) если $X = M^2$ (двумерное нормированное пространство),
 то $\delta(\bigcap_{x \in \Omega} \text{Fix } f_x, A) \leq \frac{2}{3} d(A)$.

Добавим, что в с) мы воспользовались неравенством $r(A) \leq \frac{2}{3} d(A)$, если $A \subset M^2$ (см. [1, стр.92]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Наше доказательство теоремы Раутледжа автоматически переносится на случай комплексного гильбертова пространства.

Литература

1. Б у р а г о Ю.Д., З а л г а л л е р В.А. Геометрические неравенства. Л., 1980.
2. Г у л е в и ч Н.М. О существовании неподвижных точек не-растягивающих отображений, удовлетворяющих условию Роте.- В наст.сб.
3. Д а н ц е р Л., Г р я н б а у м Б., К л и В. Теорема Хел-ли. М., 1968.
4. E i s e n f e l d J., L a k s h m i k a n t h a m V. On a measure of nonconvexity and applications. - Yokohama Math., J., 1976, v.24, N 1-2, p.133-140.
5. Н о л м е с R.B. A course on optimization and best approximation. Lecture Notes in Math., v.257, Springer-Verlag, 1972.
6. R o u t l e d g e N.A. A result in Hilbert space. - Quart. J.Math., Oxford Second Series. 1952, v.3, N 9, p.12-18.
(см. также реферат на эту статью: Кли В. - Math.Rev.1952, v.13, N 7, p.661.
7. S i n g e r I. Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces. - Grundlehren math.Wissen, B.171. Springer-Verlag, 1970.

Gulevič N.M. An estimation of deviation of fixed points from a nonconvex set.

In this notes the estimation $\delta(\text{Fix } f, A) \leq 2^{-\frac{1}{2}} d(A)$ is given, where A is an nonvoid closed bounded nonconvex set in a Hilbert space H , $f: \overline{CO} A \rightarrow H$ is a nonexpansive mapping and $f(\partial A) \subset A$, $\delta(\text{Fix } f, A)$ is the deviation of the fixed point set of a mapping f from the set A , $d(A)$ is the diameter of the set A , ∂A is the boundary of the set A in H .