

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Б. Ильинский, Обратная задача напорной фильтрации для основания с дренажем,
Тр. сем. по краев. задачам, 1966, выпуск 3, 47–52

<https://www.mathnet.ru/kukz606>

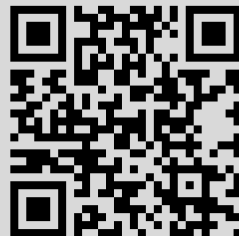
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.90

24 мая 2025 г., 10:19:52



ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА НАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ ОСНОВАНИЯ С ДРЕНАЖЕМ

Н. Б. Ильинский

Рассматривается задача построения подземного контура с дренажной галереей в основании гидротехнического сооружения при ограниченной глубине водопроницаемого слоя ($T < \infty$)¹. Предполагается, что грунт однородный и изотропный, жидкость несжимаема, течение установившееся и подчиняется закону Дарси.

Так как ширина дренажной галереи обычно бывает незначительна по сравнению с длиной подземного контура, то при теоретическом расчете плоской фильтрации дренаж можно заменить стоком обильности $2q$, где q — расход дренажа [2].

1. Построение подземного контура по эпюре напоров

Постановка задачи. Построить подземный контур гидросооружения по заданной вдоль ширины флютбета эпюре напоров

$$h = f(x) \quad (0 \leq x \leq l), \quad (1)$$

где l — ширина флютбета (рис. 1). Функция $f(x)$ в интервале $(0, x_1)$ монотонно убывает, в интервале (x_1, l) имеет один максимум и при $x = x_1$ (x_1 — абсцисса стока) имеет логарифмическую особенность; обратная функция $f^{-1}(h)$ удовлетворяет условию Гельдера. Глубина водопроницаемого слоя T и коэффициент фильтрации k известны; напор H , полный фильтрационный расход Q и расход дренажа q задаются заранее; $f(0) = H/2$, $f(l) = -H/2$. Подземный контур (за исключением стока) не проницаем.

Решение. В работе Н. Т. Мелещенко [2] выведена формула для напорной функции $h(u, v)$ в прямоугольнике $A'B'C'D'$,

¹ Случай $T = \infty$ несколько иным методом был разобран ранее (см., напр., [1]).

когда на стороне $B'C'$ в некоторой точке $\omega = u_1$ находится сток обильности $2q$ (рис. 2).

$$h = \frac{q}{2\pi k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(v-2nQ)}{kH} - \cos \frac{\pi(u-u_1)}{kH}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(v-2nQ)}{kH} + \cos \frac{\pi(u+u_1)}{kH}} - \frac{u}{k}. \quad (2)$$

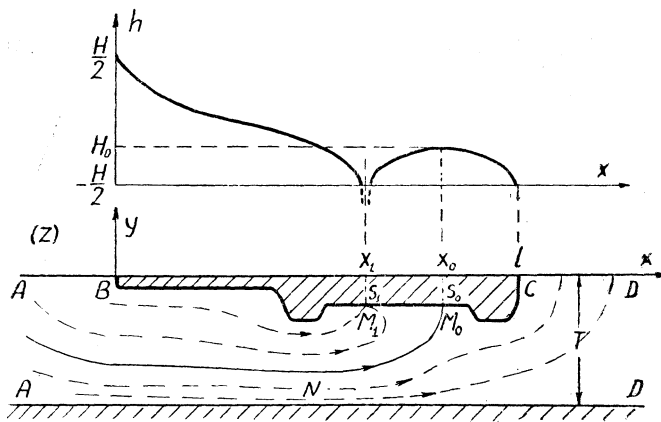


Рис. 1.

При помощи функции

$$\zeta = \operatorname{sn} \frac{2K}{kH} \omega,$$

где $K(\lambda)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, конформно отобразим прямоугольник на полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta < 0$ переменного $\zeta = \xi + i\eta$ так, что вершины B' , C' и A' , D' перейдут соответственно в $\zeta = \mp 1$ и $\zeta = \mp 1/\lambda$, а точка N' (середина основания $A'D'$) перейдет в $\zeta = \pm \infty$. Тогда соответствие между точками стороны $B'C'$ и отрезка $-1 \leq \xi \leq 1$ оси ξ определится по формуле

$$u = \frac{kH}{2K} F(\arcsin \xi, \lambda), \quad (3)$$

где F — эллиптический интеграл первого рода, модуль которого λ находится из соотношения

$$\frac{2Q}{kH} = \frac{K(\lambda')}{K(\lambda)} \quad (\lambda = \sqrt{1 - \lambda'^2}).$$

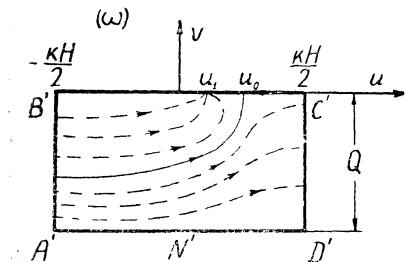


Рис. 2.

Подставляя в формулу (2) значение u из (3) и $v=0$, получим функцию напора $h(\xi)$ по отрезку $-1 \leq \xi \leq 1$, $\eta=0$:

$$h = -\frac{H}{\pi} \sigma(\xi) + \frac{q}{2\pi k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \frac{\operatorname{ch} nA - \cos[\sigma(\xi) - \sigma(\xi_1)]}{\operatorname{ch} nA + \cos[\sigma(\xi) + \sigma(\xi_1)]}, \quad (4)$$

где $\xi_1 = \operatorname{sn} \frac{2K}{kH} u_1$ — точка на оси ξ , соответствующая положению стока M_1 на искомом контуре, $A = \frac{\pi K(\lambda')}{K(\lambda)}$, $\sigma(\xi) = \frac{\pi}{2K} F(\arcsin \xi, \lambda)$. Значение ξ_1 находится из системы

$$\begin{aligned} h(\xi_0) &= H_0, \\ V(\xi_0) &= 0, \end{aligned}$$

где ξ_0 — критическая точка на оси ξ , соответствующая точке разветвления потока M_0 на подземном контуре, H_0 — напор в точке M_0 , V — величина скорости фильтрации (рис. 1).

Сравнивая (1) и (4), установим зависимость

$$x = x(\xi) \quad (-1 \leq \xi \leq 1), \quad (5)$$

представляющую $\operatorname{Re} z(\zeta)$ на отрезке $-1 \leq \xi \leq 1$, $\eta=0$. На других участках оси ξ функция $z(\zeta)$ принимает следующие значения: $\operatorname{Im} z = 0$ при $1 < |\xi| < 1/\lambda$, $\operatorname{Im} z = -T$ при $1/\lambda < |\xi| < \infty$. Таким образом, определение аналитической в области $\operatorname{Im} \zeta < 0$ функции $z(\zeta)$, ограниченной на бесконечности, привелось к решению смешанной краевой задачи для нижней полуплоскости. Решение этой задачи записывается в виде [1, стр. 49]

$$z(\zeta) = \frac{i\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau-\zeta)\sqrt{1-\tau^2}} - \frac{2iT}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\lambda\sqrt{1-\zeta^2}}{\lambda'}. \quad (6)$$

Осуществляя в формуле (6) предельный переход при $\zeta \rightarrow \xi$ ($-1 \leq \xi \leq 1$) и разделяя действительную и мнимую части, получим параметрические уравнения искомого подземного контура.

Исследование найденного решения и определение необходимых фильтрационных характеристик проводится аналогично изложенному в работе [1, § 8].

2. Построение подземного контура по эпюре скоростей

Постановка задачи. Построить подземный контур гидросооружения по заданной на нем эпюре скоростей

$$V = \Phi(s) \quad (0 \leq s \leq L), \quad (7)$$

где L — длина искомого контура, s — дуговая абсцисса, отсчитываемая от точки B (рис. 1). Функция $\Phi(s)$ всюду при $0 \leq s \leq L$ положительна и удовлетворяет условию Гельдера, кроме точки

$s = s_1$ (s_1 — дуговая абсцисса стока), где она имеет полюс первого порядка, и, может быть, конечного числа точек, где она может обращаться в бесконечность интегрируемого порядка. Остальные предположения те же, что и в п. 1.

Решение. Функция напора h на искомом контуре определяется по формуле

$$h = \frac{H}{2} - \frac{1}{k} \int_0^s \overrightarrow{V}, \overrightarrow{ds}. \quad (8)$$

Так как значения h на AB и CD (рис. 1) отличаются на величину H , имеет место условие

$$\int_0^L (\overrightarrow{V}, \overrightarrow{ds}) = kH,$$

выполнение которого достигается путем соответствующего выбора L и $\Phi(s)$.

Из сравнения (8) и (4) находится зависимость

$$s = s(\xi) \quad (-1 \leq \xi \leq 1). \quad (9)$$

Далее рассматривается аналитическая в области $\text{Im } \zeta < 0$ функция

$$\chi(\zeta) = \alpha + i\beta = \ln \frac{dz}{d\zeta} + 2i \arcsin \zeta. \quad (10)$$

На отрезке $-1 \leq \xi \leq 1$, $\eta = 0$, используя (9), находится $\text{Re } \chi = \alpha(\xi) = \ln \frac{ds}{d\xi}$. На других участках оси ξ имеем: $\text{Im } \chi = 0$ при $1/\lambda < |\xi| < \infty$, $\text{Im } \chi = -\pi$ при $-1/\lambda < \xi < -1$, $\text{Im } \chi = \pi$ при $1 < \xi < 1/\lambda$. Решая полученную смешанную краевую задачу и учитывая (10), определим $z(\zeta)$ [1, стр. 88]:

$$z(\zeta) = \int_{-1}^{\zeta} \frac{(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})^2 (\zeta \lambda' + \sqrt{\zeta^2 - 1})^2}{1 - \lambda^2 \zeta^2} e^{\omega(\zeta)} d\zeta, \quad (11)$$

где

$$\omega(\zeta) = \frac{i\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\alpha(\tau) d\tau}{(\tau - \zeta) \sqrt{1-\tau^2}}.$$

Полагая в (11) $\zeta = \xi$ ($-1 \leq \xi \leq 1$) и выделяя действительную и мнимую части, нетрудно получить параметрические уравнения искомого подземного контура.

Дальнейшее исследование решения проводится аналогично изложенному в работе [1, § 16].

3. Определение ширины дренажной галереи

При реализации решения придется иметь дело не с точечным стоком, а с дренажной галереей определенной ширины. В связи с этим необходимо выяснить, какова должна быть ширина дренажной галереи, чтобы расход через нее был равен q^1 . Решение этой задачи в случае $T = \infty$ было дано М. Т. Нужиным (см., напр., [1, § 4, § 13]). Применим этот способ к случаю $T < \infty$.

При малой ширине дренажной галереи δ справедлива формула

$$\delta = \frac{ds}{d\xi}(\xi_1)(\xi'' - \xi'), \quad (12)$$

где $\xi' \leq \xi \leq \xi''$, $\eta = 0$ — отрезок в плоскости ζ , соответствующий искомому проницаемому участку в плоскости z . При помощи функции

$$\tilde{z} = \frac{T}{\pi} \ln \frac{1 + \lambda\zeta}{1 - \lambda\zeta} \quad (13)$$

конформно отобразим полуплоскость $\text{Im } \zeta < 0$ на полосу шириной T в плоскости $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$. Подземному контуру при этом будет соответствовать отрезок

$$-a \leq \tilde{x} \leq a, \quad \tilde{y} = 0 \quad \left(a = \frac{T}{\pi} \ln \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \right),$$

а проницаемому участку — отрезок шириной

$$\tilde{\delta} = \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{\xi}}(\xi_1)(\xi'' - \xi'). \quad (14)$$

Из формул (12) и (14), учитывая (13), получим

$$\delta = \frac{\pi \tilde{\delta} (1 - \lambda^2 \xi_1^2)}{2\lambda T} \frac{ds}{d\xi}(\xi_1).$$

Для приближенного определения ширины проницаемого участка $\tilde{\delta}$ плоского незаглубленного флюتبета при конечной глубине водопроницаемого слоя T по заданному расходу q целесообразно использовать формулы П. Ф. Фильчакова [3].

4. Случай $T = \infty$

При неограниченной глубине проницаемого слоя решение может быть получено из приведенных выше формул как частный случай. При $T \rightarrow \infty$ имеем $Q \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow 0$; вместо прямо-

¹ Дренажная галерея заменялась стоком лишь с целью упростить получение решения.

угольника в плоскости ω будет полуполоса. Формула (4) примет вид

$$h = -\frac{H}{\pi} \arcsin \xi + \frac{q}{2\pi k} \ln \frac{1 - \cos(\arcsin \xi - \arcsin \xi_1)}{1 + \cos(\arcsin \xi + \arcsin \xi_1)}$$

Осуществляя предельный переход в формулах (6) и (11) и учитывая, что $\lim_{T \rightarrow \infty} \lambda T = \text{const}$ [1, § 16], получим искомые решения.

Доложено на семинаре 21 мая 1965 года.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Т. Н у ж и н и Н. Б. И л ь и н с к и й. Методы построения подземного контура гидротехнических сооружений. Обратные краевые задачи теории фильтрации. Изд. КГУ, 1963.
2. Н. Т. М е л е щ е н к о. Расчет движения грунтовых вод под сооружениями, имеющими дренажные отверстия. Изв. НИИГ, т. 19, 1936.
3. П. Ф. Ф и л ь ч а к о в. Гидродинамический расчет дренированных флюэбетов II. Применение метода последовательных конформных отображений. УМЖ, т. 12, 1960, № 4.