В. А. Ватутин, Рецензия на книгу G. Geroge Yin, Qing Zhang "Continuous-Time Markov Chains and Applications: A Singular Perturbation Approach",
Теория вероятн. и ее примен., 1999, том 44, выпуск 2, 475–477

https://www.mathnet.ru/tvp786

ями. Предлагаемая книга дает представление о его творчестве и отражает его взгляд на современное состояние асимптотической теории для сумм независимых случайных величин. Заинтересованный читатель найдет в ней много интересных тем для собственных исследований. Перевод на русский язык этой оригинальной и полезной книги представляется весьма желательным.

В. М. Круглов

G. George Yin, Qing Zhang. **Continuous-Time Markov Chains and Application: A Singular Perturbations Approach.** Applications of Mathematics, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1997, xi+349 p.

С первого взгляда название рецензируемой книги наводит на мысль, что перед нами еще один более или менее стандартный курс по теории цепей Маркова. Но скромное пояснение: метод сингулярных возмущений быстро развеивает эти иллюзии. Перед нами глубокое и, что не совсем привычно для книг серии «Приложения математики», моментами монотонно скучное и кропотливое изложение результатов исследований цепей Маркова с непрерывным временем и большим числом состояний при помощи упомянутого метода.

Книга состоит из десяти глав, объединенных в три больших раздела, и приложения.

В первой главе объясняется замысел книги, а также дан обзор литературы, относящейся как к теории цепей Маркова, так и к теории сингулярных возмущений.

Вторая глава содержит основные понятия и факты, используемые в теории марковских цепей: уравнения Колмогорова–Чепмена, неприводимость, квазистационарность и ряд других. Для некоторых российских ученых приятным сюрпризом окажется тот факт, что в данной главе определение цепей Маркова дается при помощи мартингалов.

Широта возможных применений цепей Маркова продемонстрирована в главе 3, где собрано множество примеров популярных марковских моделей. В их числе процессы рождения и гибели, системы массового обслуживания (включая сингулярно возмущенные и системы со слабым и сильным взаимодействиями), марковские модели в теории надежности, теории риска, сингулярно возмущенные процессы Кокса, процессы эволюции и модели сезонного изменения погоды. В этой же главе читатель обнаружит разделы, посвященные постановке задач стохастической оптимизации и аппроксимации, а также задаче контроля линейных систем с марковскими возмущениями.

Главы 4–7, объединенные в раздел «Сингулярно возмущенные цепи Маркова», составляют ядро рецензируемой монографии.

В главе 4 основное внимание уделено решению следующей задачи. Пусть $Q(t) \in R^{m\times m}$ — генератор некоторой неоднородной цепи Маркова с пространством состояний $\mathscr{M}\{1,\dots,m\}$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, а $\alpha^{\varepsilon}(t)$ — цепь Маркова с пространством состояний $\mathscr{M}$ и генератором $Q^{\varepsilon}(t) = Q(t)/\varepsilon$. Спрашивается, каким будет асимптотическое разложение распределения

$$p^{\varepsilon}(t) = \bigl(\mathbf{P}(\alpha^{\varepsilon}(t)=1),\dots,\mathbf{P}(\alpha^{\varepsilon}(t)=m)\bigr)$$

по степеням ε при $\varepsilon \to 0$. Отметим, что основные трудности, возникающие при решении этой задачи, обусловлены необратимостью матрицы $Q(t)$, и авторы книги предлагают оригинальный метод, позволяющий преодолеть это препятствие. При этом основное внимание уделяется слабо неприводимым генераторам $Q(t)$, т.е. таким, для которых при каждом $t \geqslant 0$ система уравнений

$$v(t)\,Q(t) = 1, \qquad \sum_{i=1}^{m} v_i = 1$$

имеет единственное решение $v(t) = (v_1(t), \dots, v_m(t))$, удовлетворяющее условию $v(t) \geqslant 0$.

В главе 5 асимптотические свойства цепей Маркова $\alpha^\varepsilon(t)$, порожденных слабо неприводимыми генераторами, рассматриваются с несколько иной точки зрения, а именно, изучаются предельные распределения случайных процессов

$$Z_i^\varepsilon(t) = \int_0^t \big(I_{\{\alpha^\varepsilon\}(s)=1} - v_i(s)\big)\, \beta_i(s)\, ds, \tag{1}$$

где $\beta_i(s)$ — неслучайные ограниченные борелевские функции. Описываются условия, при которых функционалы такого вида сходятся при $\varepsilon \to 0$ по вероятности, при дополнительной нормировке вида $\sqrt{\varepsilon}$ — по распределению, к некоторому гауссовскому процессу. Доказаны также экспоненциальные оценки скорости сходимости к предельным процессам.

Глава 6 посвящена сингулярно возмущенным цепям Маркова со слабым и сильным взаимодействиями, которые имеют генераторы вида

$$Q^\varepsilon(t) = \frac{\widetilde{Q}(t)}{\varepsilon} + \widehat{Q}(t), \tag{2}$$

где $\widetilde{Q}(t)$ соответствует быстро меняющейся составляющей, а $\widehat{Q}(t)$ — медленно меняющейся составляющей рассматриваемых цепей Маркова. При этом авторы отказываются от требования неприводимости матрицы $\widetilde{Q}(t)$, и предполагают, что она имеет блочно-диагональный вид. В начальных параграфах главы 6 для цепей Маркова с конечным числом состояний решаются те же задачи, которые обсуждались в главах 4 и 5 в более простых ситуациях. А именно, получены асимптотические разложения вероятностей $p^\varepsilon(t)$ по степеням ε (с оценками остаточных членов) в случаях, когда все состояния возвратны, а также при наличии поглощающих и невозвратных состояний. В заключительных параграфах этой главы аналогичные задачи обсуждаются для цепей Маркова со счетным числом состояний.

В главе 7 для цепей Маркова с конечным числом состояний и генераторами вида (2), в которых блочно-диагональная матрица $\widetilde{Q}(t)$ состоит лишь из неприводимых блоков, исследуются свойства процессов (1). При этом одним из основных методов исследования является метод укрупнения состояний соответствующей цепи. Установлена асимптотическая нормальность процессов вида (1), получены экспоненциальные оценки скорости сходимости.

В главе 8 рассмотрены марковские процессы принятия решений в ситуации, когда множество состояний контролируемого процесса можно разбить на группы, переходы из состояния в состояние внутри каждой из которых осуществляются более часто, чем переходы между состояниями различных групп. В такой ситуации оказывается удобным объединять состояния, принадлежащие одной группе в одно «большое» состояние, что значительно снижает размерность рассматриваемой задачи. Авторы показывают плодотворность данной идеи для некоторых достаточно широких классов проблем, находя оптимальные (в определенном смысле) решения для упрощенных задач и строя на этой основе асимптотически оптимальные решения для исходных процессов.

Глава 9 посвящена стохастическому управлению динамических систем. А именно, рассматриваются динамические системы $x^\varepsilon(t)$ со значениями в $\mathbf{R}^n$ и управлением $u(t) \in \Gamma \subset \mathbf{R}^{n_1}$, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{dx^\varepsilon(t)}{dt} = f\big(x^\varepsilon(t), u(t), \alpha^\varepsilon(t)\big), \quad x^\varepsilon(0) = 0,\ t \geqslant 0,$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, а $\alpha^\varepsilon(t)$ — цепь Маркова, допускающая укрупнение состояний. При заданном начальном значении $\alpha = \alpha^\varepsilon(0)$, фиксированном $\rho > 0$ и известной функции стоимости $G(x, u, \alpha)$ требуется найти процесс управления $u(t)$ (как функцию от $x^\varepsilon(t)$ и $\alpha^\varepsilon(t)$, $s \leqslant t$), который минимизирует функционал

$$J^\varepsilon(x, u(\cdot), \alpha; T) = \mathbf{E} \int_0^T e^{-\rho t} G(x^\varepsilon(t), u(t), \alpha^\varepsilon(t))\, dt$$

либо для $T = \infty$, либо для фиксированного $T \in (0, \infty)$.

Идеология исследования описанных динамических систем в данной главе та же, что и в главах 6–8: строится оптимальный процесс управления для некоторой вспомогательной динамической системы, в которой соответствующая цепь Маркова имеет меньшее число состояний, а затем показывается, как можно построить асимптотически оптимальное управление для исходной задачи.

В заключительном разделе, озаглавленном «Численные методы для процессов управления и оптимизации», описан ряд приемов численной реализации процедур нахождения процессов управления близких к оптимальным.

Монография завершается списком литературы, содержащим 205 названий. Как утверждают в предисловии авторы, они дают ссылки лишь на основные работы, непосредственно связанные с материалом монографии. Несмотря на это, русскоязычный читатель будет, по-видимому, несколько озадачен отсутствием в списке литературы монографии [1], в которой в ряде случаев исследуются (в рамках теории полумарковских процессов) даже более общие «возмущенные» процессы, чем те, которые рассматриваются в рецензируемой монографии.

В целом книга оставляет приятное впечатление, хотя для читателя, не очень озабоченного прикладными аспектами теории вероятностей, она может показаться несколько однообразной и затянутой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. Киев, Наукова Думка, 1976, 184 с.

В. А. Ватутин