V. V. Karachik, The biharmonic Neumann problem with double involution, *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz.*, 2024, Volume 16, Issue 3, 18–26

https://www.mathnet.ru/eng/vyurm603

УДК 517.956.223 DOI: 10.14529/mmph240303

БИГАРМОНИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА НЕЙМАНА С ДВОЙНОЙ ИНВОЛЮЦИЕЙ

В.В. Карачик
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: karachik@susu.ru

Аннотация. Исследуются вопросы разрешимости нового класса краевых задач с нелокальными условиями Неймана для бигармонического уравнения в шаре. Нелокальные условия задаются в виде связи значений искомой функции в различных точках границы. При этом граничный оператор определяется с помощью матриц отображений типа инволюции. Доказана теорема существования и единственности решения рассматриваемой задачи и найдено интегральное представление решения рассматриваемой задачи

Ключевые слова: нелокальная задача Неймана; бигармоническое уравнение; условия разрешимости; функция Грина.

Введение. Краевые задачи, заданные в виде связи значений искомой функции в различных точках области или границы, принято называть задачами типа Бицадзе–Самарского или нелокальными задачами. Задача такого типа впервые была исследована в работе [1], а более подробно возникновение таких задач при математическом моделировании некоторых процессов в плазме изложено в [2]. Методы решения и приложения нелокальных краевых задач типа Бицадзе–Самарского к прикладным задачам различных отраслей науки изложены в [3]. Нелокальные краевые задачи для различных дифференциальных уравнений исследованы в работах [4–8]. Отметим, что, наверное, впервые краевые задачи с преобразованными аргументами в двумерном случае были рассмотрены D. Przeworska-Rolewicz в [9]. Нелокальные краевые задачи с инволюциями в n-мерном случае были изучены в работах [10, 11]. В [12] исследовалась задача Неймана для бигармонического уравнения с простой инволюцией. В работах [13, 14] для нелокального уравнения Пуассона и нелокального бигармонического уравнения изучены основные краевые задачи с отображениями вида S^k, где S – ортогональная матрица. Настоящая работа является продолжением исследований, приведенных в работе [12] в случае двойной инволюции.

Пусть $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<1\}$ – единичный шар в $\mathbb{R}^n$, $n\ge 2$, а $\partial\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|=1\}$ – единичная сфера. Пусть также S_1,S_2 – две действительные коммутативные ортогональные $n\times n$ матрицы такие, что $S_i^{l_i}=I, l_i\in N, i=1,2$, где $l_1,l_2\in N\cup\{0\}$. Обозначим $\ell=l_2l_1$ и рассмотрим последовательность действительных чисел $a_0,\ldots,a_{l_1-1},a_{l_1},\ldots,a_{2l_1-1},\ldots,a_{(l_2-1)l_1-1},\ldots,a_{\ell-1}$, которую обозначаем через $\mathbf{a}$. Если записать индекс суммирования i в форме $i=(i_2,i_1)\equiv i_2l_1+i_1$, где $i_k=0,1,\ldots,l_k-1$, где $k=1,2$, тогда компоненты $\mathbf{a}$ могут быть записаны в виде

$$a_{(0,0)},\ldots,a_{(0,l_1-1)},a_{(1,0)},\ldots,a_{(1,l_1-1)},\ldots,a_{(l_2-2,l_1-1)},\ldots,a_{(l_2-1,l_1-1)}.$$

Ясно, что если $0\le i<\ell$, то тогда $i_1=\{i/l_1\}, i_2=[i/l_1]$, где [.] и {.} являются целыми и дробными частями числа соответственно. Далее последовательность $\mathbf{a}$ будем также рассматривать как вектор $\mathbf{a}=(a_0,a_1,\ldots,a_{\ell-1})$.

Замечание 1. Очевидно, что $|x|^2=(S_i^TS_ix,x)=(S_ix,S_ix)=|S_ix|^2$. Поэтому верны утверждения $x\in\Omega\Rightarrow S_ix\in\Omega$ и $y\in\partial\Omega\Rightarrow S_iy\in\partial\Omega$. Введем нелокальный оператор, образованный вектором $\mathbf{a}$:

$$B_{\mathbf{a}}u(x)=\sum_{(i_2,i_1)=0}^{(l_2-1,l_1-1)}a_{(i_2,i_1)}u\left(S_2^{i_2}S_1^{i_1}x\right),$$

где $x\in\partial\Omega$. Отметим, что в работах [15, 16] исследовались собственные функции для оператора Лапласа с двойной и множественной инволюцией.

Рассмотрим в Ω следующую краевую задачу.

Задача Неймана. Найти функцию $u(x)\in C^4(\Omega)\cap C^2(\partial\Omega)$, удовлетворяющую бигармоническому уравнению

$$\Delta^2 u(x) = f(x),\ x\in\Omega \tag{1}$$

и нелокальным граничным условиям

$$B_{\mathbf{a}}\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = h_0(x),\ B_{\mathbf{c}}\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\bigg|_{\partial\Omega} = h_1(x),\ x\in\partial\Omega, \tag{2}$$

где n – внешняя нормаль к единичной сфере $\partial\Omega$.

Вспомогательные утверждения. Для изучения приведенной выше задачи (1), (2) нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения. Введем функцию

$$v(x) = B_{\mathbf{a}}u(x) = \sum_{(i_2,i_1)=0}^{(l_2-1,l_1-1)} a_{(i_2,i_1)} u(S_2^{i_2}S_1^{i_1}x), \tag{3}$$

где $x\in\Omega$ или $x\in\partial\Omega$, а суммирование ведется в порядке возрастания по индексу $i=(i_2,i_1)\equiv i_2\cdot l_1 + i_1$ в следующем порядке

$$(0,0),\ldots,(0,l_1-1),(1,0),\ldots,(1,l_1-1),\ldots,(l_2-2,l_1-1),\ldots,(l_2-1,l_1-1).$$

Из равенства (3), учитывая, что $S_2^{l_2} = S_1^{l_1} = I$, легко заключить, что функции вида $v(S_2^{j_2}S_1^{j_1}x)$, где $j=0,\ldots,\ell-1$, можно линейно выразить через функции $u(S_2^{i_2}S_1^{i_1}x)$. Если рассмотреть следующие векторы порядка ℓ

$$U(x) = \left(u(S_2^{i_2}S_1^{i_1}x)\right)^t_{i=0,\ldots,\ell-1},\quad V(x) = \left(v(S_2^{i_2}S_1^{i_1}x)\right)^t_{i=0,\ldots,\ell-1}, \tag{4}$$

то эта зависимость имеет вид $V(x) = \left(a_{i,j}\right)_{i,j=0,\ldots,\ell-1}U(x)$ и ее можно представить в матричном виде

$$V(x) = A_{(2)}U(x), \tag{5}$$

где $A_{(2)} = \left(a_{i,j}\right)_{i,j=0,\ldots,\ell-1}$ – соответствующая матрица порядка $\ell\times\ell$. Нижний индекс у $A_{(2)}$ означает, что матрица порождается двумя коммутативными инверсиями S_1, S_2. Из (3) следует (5). Верно и обратное, поскольку первая строка (5) и есть (3).

Для описания свойств матрицы $A_{(2)}$ рассмотрим операцию сложения индексов коэффициентов матрицы в следующем смысле:

$$i\oplus j = (i_2,i_1)\oplus(j_2,j_1)\equiv((i_2+j_2\bmod l_2),(i_1+j_1\bmod l_1)),$$

где (i_2,i_1) – это представление индекса i, как указано выше. Ясно, что $\oplus$ является коммутативной и ассоциативной операцией над $i\in\{0,\ldots,\ell-1\}$. Определим

$$i\ominus j = (i_2-j_2\bmod l_2, i_1-j_1\bmod l_1).$$

Например, если $l_1=2$, $l_2=3$, то $\ominus(2,1)=(1,1)$ или $\ominus 5 = 3$. Распространим операции $\oplus$ и $\ominus$ на все числа вида (i_2,i_1), полагая $(i_2,i_1)\equiv(i_2\bmod l_2, i_1\bmod l_1)$. Например, если $l_1=2$, $l_2=3$, то $(1,-1)=(1,1)$ и $(5,-3)=(2,1)$.

Теорема 1. [15, теорема 1]. Матрица $A_{(2)}$ из равенства (5) может быть представлена как

$$A_{(2)}\equiv\left(a_{i,j}\right)_{i,j=0,\ldots,\ell-1} = \left(a_{j\ominus i}\right)_{i,j=0,\ldots,\ell-1}. \tag{6}$$

Линейная комбинация матриц вида (6) является матрицей вида (6).

Нам будут необходимы следующие следствия из этой теоремы.

Следствие 1. Матрица $A_{(2)}$ однозначно определяется своей первой строкой $\mathbf{a} = \left(a_0,\ldots,a_{\ell-1}\right)$.

Следствие 2. Матрица $A_{(2)}$ имеет структуру матрицы, состоящей из $l_2\times l_2$ квадратных блоков, каждый из которых является матрицей размера $l_1\times l_1$ и типа $A_{(1)}$.

Если представить вектор $\mathbf{a}$ в виде векторов $\mathbf{a}=(\mathbf{a}_0,\ldots,\mathbf{a}_{l_2-1})$, где $\mathbf{a}_{j_2}=(a_{j_2l_1},\ldots,a_{(j_2+1)l_1-1})$ тоже вектор, и обозначить $A_{(1)}^{(j_2)}=A_{(1)}(\mathbf{a}_{j_2})$, тогда верно равенство

$$A_{(2)}(\mathbf{a})=A_{(1)}\left(A_{(1)}^{(0)},A_{(1)}^{(1)},\ldots,A_{(1)}^{(l_2-1)}\right)\equiv\begin{pmatrix} A_{(1)}^{(0)} & A_{(1)}^{(1)} & \ldots & A_{(1)}^{(l_2-1)} \\ A_{(1)}^{(l_2-1)} & A_{(1)}^{(0)} & \ldots & A_{(1)}^{(l_2-2)} \\ & \ldots & & \\ A_{(1)}^{(1)} & A_{(1)}^{(2)} & \ldots & A_{(1)}^{(0)} \end{pmatrix},$$

где блочная матрица повторяет структуру матрицы $A_{(1)}$ размера $l_2\times l_2$.

Следствие 3. Транспонированная матрица $A_{(2)}^t(\mathbf{a})$ имеет структуру матрицы $A_{(2)}^t$ и, кроме того, $A_{(2)}^t(\mathbf{a})=A_{(2)}(\mathbf{c})$, где $\mathbf{c}=(a_{(-j_2,-j_1)})_{(j_2,j_1)=0,\ldots,(l_2-1,l_1-1)}$, а обе компоненты $-j_2$ и $-j_1$ берутся по $\operatorname{mod} l_2$ и $\operatorname{mod} l_1$ соответственно.

Теорема 2. [15, теорема 2]. Произведение матриц вида (6) является снова матрицей вида (6) и верно равенство $A_{(2)}(\mathbf{a})A_{(2)}(\mathbf{d})=A_{(2)}(\mathbf{d})A_{(2)}(\mathbf{a})$.

Следующая теорема дает представление о собственных векторах и собственных значениях матриц вида $A_{(2)}$ из (6). Из [15, теорема 3] следует следующее утверждение.

Теорема 3. Собственные векторы матрицы $A_{(2)}(\mathbf{a})$ можно выбрать в виде

$$\mathbf{e}_{\mathrm{k}}=\mathbf{e}_{(k_2,k_1)}=\left(\mathbf{e}_{k_1},\lambda_{k_2}\mathbf{e}_{k_1},\ldots,\lambda_{k_2}^{l_2-1}\mathbf{e}_{k_1}\right)^t,\quad \mathbf{e}_{k_1}=\left(1,\lambda_{k_1},\ldots,\lambda_{k_1}^{l_1-1}\right)^t,$$

где $\lambda_{k_1}=e^{\mathrm{i}2\pi\frac{k_1}{l_1}}$ – корень степени l_1 из единицы, $k_1=0,\ldots,l_1-1$ и $\lambda_{k_2}=e^{\mathrm{i}2\pi\frac{k_2}{l_2}}$ – корень степени l_2 из единицы, $k_2=0,\ldots,l_2-1$.

Обозначим $\boldsymbol{\lambda}_k^j\equiv\lambda_{(k_2,k_1)}^{(j_2,j_1)}=\lambda_{k_2}^{j_2}\lambda_{k_1}^{j_1}$. Тогда из теоремы 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 4. Собственный вектор матрицы $A_{(2)}(\mathbf{a})$ с номером $k=(k_2,k_1)=0,\ldots,\ell-1$, где $k_1=0,\ldots,l_1-1$, $k_2=0,\ldots,l_2-1$ можно представить в виде

$$\mathbf{e}_k=\left(\boldsymbol{\lambda}_k^j\right)_{j=0,\ldots,\ell-1}^t\equiv\left(\lambda_{k_2}^{j_2}\lambda_{k_1}^{j_1}\right)_{(j_2,j_1)=0,\ldots,(l_2-1,l_1-1)}^t, \tag{7}$$

а собственное число, соответствующее этому собственному вектору, определяется из равенства

$$\mu_k(\boldsymbol{a})=\sum_{j=0}^{\ell-1}a_j\boldsymbol{\lambda}_k^j=\sum_{(j_2,j_1)=0}^{(l_2-1,l_1-1)}a_{(j_2,j_1)}\lambda_{k_2}^{j_2}\lambda_{k_1}^{j_1}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_k^t. \tag{8}$$

Замечание 2. Если положить $\mathbf{S}^j=S_2^{j_2}S_1^{j_1}$, то оператор $B_{\mathbf{a}}$ можно переписать в виде

$$B_{\mathbf{a}}(u)(x)=\sum_{j=0}^{\ell-1}a_ju\left(\mathbf{S}^jx\right).$$

Теорема 4. Пусть $\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_k^t\neq0$ при $k=0,\ldots,\ell-1$, где собственные вектора $\mathbf{e}_k$ находятся из (7). Тогда существует матрица обратная к матрице $A_{(2)}(\mathbf{a})$ и она имеет вид

$$A_{(2)}^{-1}(\mathbf{a})=\frac{1}{\ell}\mathrm{M}\,\mathrm{diag}^{-1}(\mu_0,\ldots,\mu_{\ell-1})\overline{\mathrm{M}}, \tag{9}$$

где $\mathrm{M}=\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\mathbf{e}_{\ell-1}\right)$. Матрица M является симметричной и ортогональной.

Доказательство. Поскольку $\mathbf{e}_k$ – собственный вектор матрицы $A_{(2)}(\mathbf{a})$, то верно равенство $A_{(2)}(\mathbf{a})\mathrm{M}=\left(\mu_0\mathbf{e}_0,\ldots,\mu_{\ell-1}\mathbf{e}_{\ell-1}\right)$, и значит

$$A_{(2)}(\mathbf{a})\mathrm{M}\,\mathrm{diag}^{-1}(\mu_0,\ldots,\mu_{\ell-1})=\left(\mu_0\mathbf{e}_0,\ldots,\mu_{\ell-1}\mathbf{e}_{\ell-1}\right)\mathrm{diag}\left(\mu_0^{-1},\ldots,\mu_{\ell-1}^{-1}\right)=\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\mathbf{e}_{\ell-1}\right)=\mathrm{M}.$$

Отсюда следует, что

$$A_{(2)}(\mathbf{a})\mathrm{M}\,\mathrm{diag}\left(\mu_0^{-1},\ldots,\mu_{\ell-1}^{-1}\right)\overline{\mathrm{M}} = \mathrm{M}\overline{\mathrm{M}}\,.$$

Пусть $\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_{(j_2,j_1)}$ и $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{(i_2,i_1)}$ – два разных столбца матрицы M, т. е. $j \neq i$. Тогда из (7), используя равенства $\lambda_{j_2}\overline{\lambda}_{i_2} = \lambda_{j_2-i_2}$ и $\lambda_{j_1}\overline{\lambda}_{i_1} = \lambda_{j_1-i_1}$, запишем

$$\mathbf{e}_j\overline{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_{(j_2,j_1)}\cdot\overline{\mathbf{e}}_{(i_2,i_1)} = \left(\lambda_{j_2}^{k_2}\lambda_{j_1}^{k_1}\right)^t_{(k_2,k_1)=0,\ldots,(l_2-1,l_1-1)}\cdot\left(\overline{\lambda}_{i_2}^{k_2}\overline{\lambda}_{i_1}^{k_1}\right)^t_{(k_2,k_1)=0,\ldots,(l_2-1,l_1-1)} =$$

$$= \sum_{(k_2,k_1)=0}^{(l_2-1,l_1-1)}\lambda_{j_2}^{k_2}\lambda_{j_1}^{k_1}\overline{\lambda}_{i_2}^{k_2}\overline{\lambda}_{i_1}^{k_1} = \sum_{(k_2,k_1)=0}^{(l_2-1,l_1-1)}(\lambda_{j_2}\overline{\lambda}_{i_2})^{k_2}(\lambda_{j_1}\overline{\lambda}_{i_1})^{k_1} = \sum_{(k_2,k_1)=0}^{(l_2-1,l_1-1)}\lambda_{j_2-i_2}^{k_2}\lambda_{j_1-i_1}^{k_1} = \sum_{k_2=0}^{l_2-1}\lambda_{j_2-i_2}^{k_2}\sum_{k_1=0}^{l_1-1}\lambda_{j_1-i_1}^{k_1}.$$

Пусть $j_2 - i_2 \neq 0$, тогда $\lambda_{j_2-i_2} \neq 1$, и по простому комбинаторному тождеству находим

$$\sum_{k_2=0}^{l_2-1}\lambda_{j_2-i_2}^{k_2} = \frac{\lambda_{j_2-i_2}^{l_2}-1}{\lambda_{j_2-i_2}-1} = 0\,.$$

Если же $j_2 - i_2 = 0$, тогда $\lambda_{j_2-i_2} = 1$, и значит, $\sum_{k_2=0}^{l_2-1}\lambda_{j_2-i_2}^{k_2} = l_2$. Поэтому

$$\mathbf{e}_j\cdot\overline{\mathbf{e}}_i = \sum_{k=0}^{\ell-1}\lambda_j^k\overline{\lambda}_i^{k} = \begin{cases} 0 & j\neq i \\ \ell & j = i\end{cases}. \tag{10}$$

Матрица M симметрична. Действительно, поскольку $\lambda_{i_2}^{j_2} = \lambda_{j_2}^{i_2}$ и $\lambda_{i_1}^{j_1} = \lambda_{j_1}^{i_1}$, то

$$\mathrm{M}^t = \left(\lambda_{j_2}^{i_2}\lambda_{j_1}^{i_1}\right)^t_{\substack{(i_2,i_1)=0,\ldots,(l_2-1,l_1-1)\\(j_2,j_1)=0,\ldots,(l_2-1,l_1-1)}} = \left(\lambda_{i_2}^{j_2}\lambda_{i_1}^{j_1}\right)_{\substack{(i_2,i_1)=0,\ldots,(l_2-1,l_1-1)\\(j_2,j_1)=0,\ldots,(l_2-1,l_1-1)}} =$$

$$= \left(\lambda_{j_2}^{i_2}\lambda_{j_1}^{i_1}\right)_{\substack{(i_2,i_1)=0,\ldots,(l_2-1,l_1-1)\\(j_2,j_1)=0,\ldots,(l_2-1,l_1-1)}} = \left(\lambda_j^i\right)_{i,j=0,\ldots,\ell-1} = \mathrm{M}\,.$$

Отсюда следует, что i-я строка матрицы M имеет вид $\mathbf{e}_i^t$. Это означает, что

$$\mathrm{M}\overline{\mathrm{M}} = \left(\mathbf{e}_i\cdot\overline{\mathbf{e}}_j\right)_{i,j=0,\ldots,\ell-1} = \ell I.$$

Используя полученное равенство, можно записать

$$A_{(2)}(\mathbf{a})\frac{1}{\ell}\mathrm{M}\,\mathrm{diag}^{-1}(\mu_0,\ldots,\mu_{\ell-1})\overline{\mathrm{M}} = \frac{1}{\ell}\ell I = I\,.$$

Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть матрица $A_{(2)}(\mathbf{a})$ не особенная, тогда обратная к ней матрица имеет вид $A_{(2)}^{-1}(\mathbf{a}) = A_{(2)}(\mathbf{b})$, где

$$b_j = \frac{1}{\ell}\sum_{k=0}^{\ell-1}\frac{\overline{\lambda}_k^{\,j}}{\mu_k},\ \ j = 0,\ldots,\ell-1\,. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть матрица $A_{(2)}(\mathbf{a})$ обратима, тогда ее собственные числа, находимые из (8), отличны от нуля, т. е. $\mu_k \neq 0$, и поэтому применима теорема 4. Обозначим элементы обратной матрицы как $b_{i,j} = \left(A_{(2)}^{-1}(\mathbf{a})\right)_{i,j}$ при $i,j = 0,\ldots,\ell-1$. Тогда по формуле (9), используя симметричность M, найдем

$$b_{i,j} = \frac{1}{\ell}\left(\mathrm{M}\,\mathrm{diag}^{-1}(\mu_0,\ldots,\mu_{\ell-1})\overline{\mathrm{M}}\right)_{i,j} = \frac{1}{\ell}\sum_{k=0}^{\ell-1}\frac{\lambda_i^k}{\mu_k}\lambda_j^{-k} = \frac{1}{\ell}\sum_{k=0}^{\ell-1}\frac{\lambda_{i-j}^k}{\mu_k} = \frac{1}{\ell}\sum_{k=0}^{\ell-1}\frac{\lambda_k^{i-j}}{\mu_k} = \frac{1}{\ell}\sum_{k=0}^{\ell-1}\frac{\overline{\lambda}_k^{\,j-i}}{\mu_k}\,.$$

Если воспользоваться обозначением (11), то имеем $b_{i,j} = b_{j\ominus i}$, где b_j определяется из (11). Значит, по теореме 1 $A_{(2)}^{-1}(\mathbf{a}) = \left(b_{j\ominus i}\right)_{i,j=0,\ldots,\ell-1} = A_{(2)}(\mathbf{b})$. При $i = 0$ получаем первую строку $A_{(2)}(\mathbf{b})$, что доказывает равенство (11). Теорема доказана.

Следствие 5. Нетрудно видеть, что согласно (10) и (11)

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_k^t=\sum_{i=0}^{\ell-1}\frac{1}{\ell}\sum_{j=0}^{\ell-1}\frac{\overline{\lambda}_j^i}{\mu_j}\lambda_k^i=\sum_{j=0}^{\ell-1}\frac{1}{\mu_j}\frac{1}{\ell}\sum_{i=0}^{\ell-1}\overline{\lambda}_j^i\lambda_k^i=\sum_{j=0}^{\ell-1}\frac{\delta_{j,k}}{\mu_j}=\frac{1}{\mu_k}.$$

Кроме того, вектор $\mathbf{b}$ можно найти по формуле $\mathbf{b}=\frac{1}{\ell}\boldsymbol{\mu}_-\overline{\mathrm{M}}$, где $\boldsymbol{\mu}_-=\left(\mu_k^{-1}\right)_{k=0,\ldots,\ell-1}$. Будем считать, что $\mathbf{a}*=\mathbf{b}$.

Следствие 6. Если матрица $A_{(2)}(\mathbf{a})$ не особенная, то собственные векторы матрицы $A_{(2)}^{-1}(\mathbf{a})$ равны $\mathbf{e}_k$, $k=0,\ldots,\ell-1$, а собственные значения имеют вид $\mu_k^{-1}(\mathbf{a})$.

Задача Неймана. Сформулируем основной результат. Обозначим через $G_4(x,\xi)$ функцию Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре [17] и $\Lambda u=\sum_{k=1}^n x_k u_{x_k}$.

Теорема 6. Пусть $h_0\in C^{2+\varepsilon}(\partial\Omega)$, $h_1\in C^{1+\varepsilon}(\partial\Omega)$, $f\in C^1(\overline{\Omega})$ и $\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_k^t\neq 0$, $\mathbf{c}\cdot\mathbf{e}_k^t\neq 0$ при $k=0,\ldots,\ell-1$, где собственные векторы $\mathbf{e}_k$ находятся из (7). Тогда решение задачи Неймана (1), (2) существует и единственно с точностью до константы при выполнении условия

$$\frac{1}{\mu_0(\mathbf{a})}\int_{\partial\Omega}h_0(\xi)\,ds_\xi-\frac{1}{\mu_0(\mathbf{c})}\int_{\partial\Omega}h_1(\xi)\,ds_\xi=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(|\xi|^2-1\right)f(\xi)\,d\xi. \qquad (12)$$

Это решение можно представить в виде $u(x)=\int_0^1 v(tx)\frac{dt}{t}$, где

$$v(x)=\frac{1+|x|^2}{2}B_{\mathbf{a}*}\hat{v}_0(x)+\frac{1-|x|^2}{2}\Lambda B_{\mathbf{a}*}\hat{v}_0(x)-\frac{1-|x|^2}{2}B_{\mathbf{c}*}\hat{v}_1(x)+\frac{1}{\omega_n}\int_\Omega G_4(x,\xi)(\Lambda+4)f(\xi)\,d\xi, \qquad (13)$$

а функции $\hat{v}_0(x)$, $\hat{v}_1(x)$ – гармонические в Ω и такие, что $\hat{v}_0\big|_{\partial\Omega}=h_0$, $\hat{v}_1\big|_{\partial\Omega}=h_1$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 5. Из нее вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. Граничные условия (2) могут быть преобразованы к виду

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=B_{\mathbf{a}*}h_0(x),\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{\partial\Omega}=B_{\mathbf{c}*}h_1(x),\ x\in\partial\Omega. \qquad (14)$$

Доказательство. В начале предыдущего раздела было установлено, что (3)$\Leftrightarrow$(5). Обозначим вектор $\mathbf{b}$, находимый по вектору $\mathbf{a}$ из следствия 5, как $\mathbf{b}=\mathbf{a}*$. Тогда, в соответствии с обозначениями из (4),

$$V(x)=A_{(2)}(\mathbf{a})U(x)\Rightarrow U(x)=A_{(2)}^{-1}(\mathbf{a})V(x)=A_{(2)}(\mathbf{b})V(x),$$

откуда следует, что $u(x)=B_{\mathbf{a}*}v(x)$ и значит, $v(x)=B_{\mathbf{a}}u(x)\Rightarrow u(x)=B_{\mathbf{a}*}v(x)$. Поэтому

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=B_{\mathbf{a}*}B_{\mathbf{a}}\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=B_{\mathbf{a}*}h_0(x), \qquad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{\partial\Omega}=B_{\mathbf{c}*}B_{\mathbf{c}}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{\partial\Omega}=B_{\mathbf{c}*}h_1(x).$$

Лемма доказана.

В соответствии с леммой 1 задача Неймана (1)–(2) сводится к задаче Неймана (1)–(14). Далее, как показано в [18, 19], задача Неймана (1)–(14) преобразуется к задаче Дирихле

$$\Delta^2 v(x)=(\Lambda+4)f(x),\ x\in\Omega, \qquad (15)$$

$$v\big|_{\partial\Omega}=B_{\mathbf{a}*}h_0(x),\ \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=B_{\mathbf{a}*}h_0(x)+B_{\mathbf{c}*}h_1(x),\ x\in\partial\Omega, \qquad (16)$$

причем решение $u(x)$ задачи Неймана (1)–(14) существует, только если $v(0)=0$ и это решение имеет вид $u(x)=\int_0^1 v(tx)\frac{dt}{t}$.

Лемма 2. Решение следующей нелокальной задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u=0,\ x\in\Omega, \quad u\big|_{\partial\Omega}=B_{\mathbf{a}}g(x),\ x\in\partial\Omega \qquad (17)$$

записывается в виде $u(x)=B_{\mathbf{a}}\hat{u}(x)$, где $\hat{u}(x)$ – решение обычной задачи Дирихле

$$\Delta\hat{u}=0,\ x\in\Omega,\quad \hat{u}\big|_{\partial\Omega}=g(x),\ x\in\partial\Omega. \tag{18}$$

Доказательство. Обозначим ядро Пуассона задачи Дирихле (18) в шаре Ω как

$$P(x,\xi)=\frac{1}{\omega_n}\frac{1-|x|^2}{|x-\xi|^n}.$$

С учетом замечания 1 имеем $|\mathbf{S}^j x-\mathbf{S}^j\xi|=|\mathbf{S}^j(x-\xi)|=|S_2^{j_2}S_1^{j_1}(x-\xi)|=|S_1^{j_1}(x-\xi)|=|x-\xi|$, а поэтому $P\left(\mathbf{S}^j x,\mathbf{S}^j\xi\right)=P(x,\xi)$. В силу [15, лемма 4.1] справедливо равенство $\int\limits_{\partial\Omega} g(\mathbf{S}^j\xi)\,ds_\xi=\int\limits_{\partial\Omega} g(\xi)\,ds_\xi$. Тогда решение задачи (17) записывается в виде

$$u(x)=\int\limits_{\partial\Omega}P(x,\xi)B_{\mathbf{a}}g(\xi)\,ds_\xi=\sum_{(i_2,i_1)=0}^{(l_2-1,l_1-1)}a_{(i_2,i_1)}\int\limits_{\partial\Omega}P(x,\xi)g\left(\mathbf{S}^i\xi\right)ds_\xi=$$

$$=\sum_{(i_2,i_1)=0}^{(l_2-1,l_1-1)}a_{(i_2,i_1)}\int\limits_{\partial\Omega}P\left(\mathbf{S}^i x,\mathbf{S}^i\xi\right)g\left(\mathbf{S}^i\xi\right)ds_\xi=\sum_{(i_2,i_1)=0}^{(l_2-1,l_1-1)}a_{(i_2,i_1)}\int\limits_{\partial\Omega}P\left(\mathbf{S}^i x,\xi\right)g(\xi)\,ds_\xi=B_{\mathbf{a}}\hat{u}(x).$$

Лемма доказана.

В силу [12, 20], поскольку $h_0\in C^{2+\varepsilon}(\partial\Omega)$, $h_1\in C^{1+\varepsilon}(\partial\Omega)$, $f\in C^1(\bar{\Omega})$, то $B_{\mathbf{a}*}h_0\in C^{2+\varepsilon}(\partial\Omega)$, $B_{\mathbf{c}*}h_1\in C^{1+\varepsilon}(\partial\Omega)$, а значит, решение задачи Дирихле (15)–(16) можно представить в форме

$$v(x)=v_0(x)+\frac{1-|x|^2}{2}\Lambda v_0(x)-\frac{1-|x|^2}{2}v_1(x)+\frac{1}{\omega_n}\int_\Omega G_4(x,\xi)(\Lambda+4)f(\xi)\,d\xi,$$

где $v_0(x),v_1(x)$ – решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа при граничных условиях $v_0\big|_{\partial\Omega}=B_{\mathbf{a}*}h_0(x)$, $v_1\big|_{\partial\Omega}=B_{\mathbf{a}*}h_0(x)+B_{\mathbf{c}*}h_1(x)$, а $G_4(x,\xi)$ – функция Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре [17]. В силу леммы 2

$$v_0(x)=B_{\mathbf{a}*}\hat{v}_0(x),\ v_1(x)=B_{\mathbf{a}*}\hat{v}_0(x)+B_{\mathbf{c}*}\hat{v}_1(x),$$

где гармонические функции $\hat{v}_0(x)$, $\hat{v}_1(x)$ такие, что $\hat{v}_0\big|_{\partial\Omega}=h_0$, $\hat{v}_1\big|_{\partial\Omega}=h_1$. Поэтому функция $v(x)$ примет вид (13). Найдем значение $v(0)$. Нетрудно видеть, что

$$v_0(0)=B_{\mathbf{a}*}\hat{v}_0(x)=\sum_{(i_2,i_1)=0}^{(l_2-1,l_1-1)}a*_{(i_2,i_1)}\int\limits_{\partial\Omega}P(0,\xi)h_0(\xi)\,ds_\xi=$$

$$=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial\Omega}h_0(\xi)\,ds_\xi\sum_{(i_2,i_1)=0}^{(l_2-1,l_1-1)}a*_{(i_2,i_1)}=\frac{\mu_0(\mathbf{a}*)}{\omega_n}\int\limits_{\partial\Omega}h_0(\xi)\,ds_\xi=\frac{1}{\mu_0(\mathbf{a})\omega_n}\int\limits_{\partial\Omega}h_0(\xi)\,ds_\xi,$$

поскольку по формуле (8) имеем

$$\mu_0(\mathbf{a})=\sum_{j=0}^{\ell-1}a_j\lambda_0^j=\sum_{(j_2,j_1)=0}^{(l_2-1,l_1-1)}a_{(j_2,j_1)}\lambda_0^{j_2}\lambda_0^{j_1}=\sum_{(j_2,j_1)=0}^{(l_2-1,l_1-1)}a_{(j_2,j_1)}$$

и по следствию 5 $\mu_0(\mathbf{a}*)=\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_0^t=1/\mu_0(\mathbf{a})$. Кроме того, $\Lambda\left(B_{\mathbf{a}*}\hat{v}_0\right)(0)=0$, поскольку гармоническая функция $\Lambda B_{\mathbf{a}*}\hat{v}_0(x)$ не имеет в своем разложении в окрестности нуля свободного члена. Аналогично найдем значение $v_1(0)$. Таким образом, находим

$$v(0)=\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0(\mathbf{a})\omega_n}\int_{\partial\Omega}h_0(\xi)\,ds_\xi-\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0(\mathbf{c})\omega_n}\int_{\partial\Omega}h_1(\xi)\,ds_\xi+\frac{1}{\omega_n}\int_\Omega G_4(0,\xi)(\Lambda+4)f(\xi)\,d\xi.$$

В силу [12, лемма 3] справедливо равенство

$$\int_\Omega G_4(0,\xi)(\Lambda+4)f(\xi)\,d\xi=\int_\Omega\frac{1-|\xi|^2}{4}f(\xi)\,d\xi$$

и значит,

$$v(0)=\frac{1}{2\omega_n}\left(\frac{1}{\mu_0(\mathbf{a})}\int\limits_{\partial\Omega}h_0(\xi)\,ds_\xi-\frac{1}{\mu_0(\mathbf{c})}\int\limits_{\partial\Omega}h_1(\xi)\,ds_\xi+\frac{1}{2}\int_\Omega\left(1-|\xi|^2\right)f(\xi)\,d\xi\right).$$

Поэтому условие разрешимости $v(0)=0$ задачи (15), (16), а значит, и задачи (1), (2) принимает вид (12). Само решение записывается в виде $u(x)=\int_0^1 v(tx)\frac{dt}{t}$, где функция $v(x)$ находится из (13). Теорема доказана.

Литература

1. Бицадзе, А.В. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач / А.В. Бицадзе, А.А. Самарский // Докл. АН СССР. – 1969. – Т. 185, № 4. – С. 739–740.
2. Самарский, А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений / А.А. Самарский // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 11. – С. 1925–1935.
3. Skubachevskii, A.L. Nonclassical Boundary-Value Problems I / A.L. Skubachevskii // J. Math. Sci. – 2008. – Vol. 155. – P. 199–334.
4. Solvability and Volterra Property of Nonlocal Problems for Mixed Fractional-Order Diffusion-Wave Equation / N. Adil, A.S. Berdyshev, B.E. Eshmatov, Z.D. Baishemirov // Bound. Value Probl. – 2023. – Vol. 2023. – Article number: 47.
5. Ashyralyyev, C. On the Stable Difference Scheme for Source Identification Nonlocal Elliptic Problem / C. Ashyralyyev // Math Meth Appl Sci. – 2023 – Vol. 46, Iss. 2. – P. 2488–2499.
6. Assanova, A.T. Solution of a nonlocal problem for hyperbolic equations with piecewise constant argument of generalized type / A.T. Assanova, R. Uteshova // Chaos, Solitons & Fractals. – 2022. – Vol. 165, Part 2. – p. 112816.
7. Zhou, L. Error Estimate of a High Accuracy Difference Scheme for Poisson Equation with two Integral Boundary Conditions / L. Zhou, H. Yu // Adv. Differ. Equ. – 2018. – Article number: 225.
8. Li, C. Uniqueness of a Nonlinear Integro-Differential Equation with Nonlocal Boundary Condition and Variable Coefficients / C. Li // Bound Value Probl. – 2023. – Vol. 2023. – Article number: 26.
9. Przeworska-Rolewicz, D. Some Boundary Value Problems with Transformed Argument / D. Przeworska-Rolewicz // Comment. Math. Helv. – 1974. – no. 17. – P. 451–457.
10. Karachik, V. Solvability of one Nonlocal Dirichlet Problem for the Poisson Equation / V. Karachik, B. Turmetov // Novi Sad J. Math. – 2020. – Vol. 50, no. 1. – P. 67–88.
11. Turmetov, B. Solvability of Nonlocal Dirichlet Problem for Generalized Helmholtz Equation in a Unit Ball / B. Turmetov, V. Karachik // Complex Var. Elliptic Equ. – 2023. – Vol. 68, no. 7. – P. 1204–1218.
12. Турметов, Б.Х. Задача Неймана для нелокального бигармонического уравнения / Б.Х. Турметов, В.В. Карачик // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2022. – Т. 14, № 2.– С. 51–58.
13. Karachik, V.V. On the Solvability of the Main Boundary Value Problems for a Nonlocal Poisson Equation / V.V. Karachik, A.M. Sarsenbi, B.K. Turmetov // Turk. J. Math. – 2019. – Vol. 43. – P. 1604–1625.
14. Turmetov, B. On a Boundary Value Problem for the Biharmonic Equation with Multiple Involution / B. Turmetov, V. Karachik // Mathematics. – 2021. – Vol. 9, Iss. 17. – 2020.
15. Turmetov, B. Construction of Eigenfunctions to One Nonlocal Second-Order Differential Operator with Double Involution / B. Turmetov, V. Karachik // Axioms. – 2022. – Vol. 11, no. 10. – 543.
16. Turmetov, B. On Eigenfunctions and Eigenvalues of a Nonlocal Laplace Operator with Multiple Involution / B. Turmetov, V. Karachik // Symmetry. – 2021. – Vol. 13, no. 10. – 1781.
17. Karachik, V.V. On Green's Function of the Dirichlet Problem for the Polyharmonic Equation in the Ball / V.V. Karachik // Axioms. – 2023. – Vol. 12, no. 6. – 543.
18. Карачик, В.В. Достаточные условия разрешимости одного класса задач типа Неймана для полигармонического уравнения / В.В. Карачик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2021. – Т. 61, № 8. – С. 1295–1308.
19. Карачик, В.В. Об условиях разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре / В.В. Карачик // Сиб. журн. индустр. матем. – 2013. – Т. 16, № 4. – С. 61–74.
20. Карачик, В.В. Представление решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре через функцию Грина / В.В. Карачик // Челябинский физико-математический журнал. – 2020. – Т. 5, № 4-1. – С. 391–399.

Поступила в редакцию 16 марта 2024 г.

Сведения об авторе

Карачик Валерий Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Математический анализ и методика преподавания математики», старший научный сотрудник, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: karachikvv@susu.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2024, vol. 16, no. 3, pp. 18–26

DOI: 10.14529/mmph240303

THE BIHARMONIC NEUMANN PROBLEM WITH DOUBLE INVOLUTION

V.V. Karachik
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: karachik@susu.ru

Abstract. This paper studies the solvability of a new class of boundary value problems with nonlocal Neumann conditions for a biharmonic equation in a sphere. Non-local conditions are specified in the form of a connection between the values of the desired function at different points of the boundary. In this case, the boundary operator is determined using matrices of involution-type mappings. The theorem of existence the and uniqueness of the solution is proved and the integral representation of the solution to the problem under consideration is found.

Keywords: nonlocal Neumann problem; biharmonic equation; solvability conditions; Green's function.

References

1. Bitsadze A.V., Samarskii A.A. Some Elementary Generalizations of Linear Elliptic Boundary Value Problems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1969, Vol. 185, no. 4, pp. 739–740. (in Russ.).

2. Samarskii A.A. Some Problems of the Theory of Differential Equations. *Differ. Uravn.*, 1980, Vol. 16, no. 11, pp. 1925–1935. (in Russ.).

3. Skubachevskii A.L. Nonclassical Boundary-Value Problems I. *J. Math. Sci.*, 2008, Vol. 155, pp. 199–334. DOI: 10.1007/s10958-008-9218-9

4. Adil N., Berdyshev A.S., Eshmatov B.E., Baishemirov Z.D. Solvability and Volterra Property of Nonlocal Problems for Mixed Fractional-Order Diffusion-Wave Equation. *Bound Value Probl.*, 2023, Vol. 2023, Article number: 47. DOI: 10.1186/s13661-023-01735-0

5. Ashyralyyev C. On the Stable Difference Scheme for Source Identification Nonlocal Elliptic Problem. *Math Meth Appl Sci.*, 2023, Vol. 46, Iss. 2, pp. 2488–2499. DOI: 10.1002/mma.8656

6. Assanova A.T., Uteshova R. Solution of a Nonlocal Problem for Hyperbolic Equations with Piecewise Constant Argument of Generalized Type. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2022, Vol. 165, Part 2, p. 112816. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112816

7. Zhou, L., Yu, H. Error Estimate of a High Accuracy Difference Scheme for Poisson Equation with Two Integral Boundary Conditions. *Adv. Differ. Equ.*, 2018, Article number: 225.

8. Li C. Uniqueness of a Nonlinear Integro-Differential Equation with Nonlocal Boundary Condition and Variable Coefficients. *Bound Value Probl.*, 2023, Vol. 2023, Article number: 26. DOI: 10.1186/s13661-023-01713-6

9. Przeworska-Rolewicz D. Some Boundary Value Problems with Transformed Argument. *Comment. Math. Helv.*, 1974, no. 17, p. 451–457.

10. Karachik V., Turmetov B. Solvability of One Nonlocal Dirichlet Problem for the Poisson Equation. *Novi Sad J. Math.*, 2020, Vol. 50, no. 1, pp. 67–88. DOI: 10.30755/NSJOM.08942

11. Turmetov B., Karachik V. Solvability of Nonlocal Dirichlet Problem for Generalized Helmholtz Equation in a Unit Ball. *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2023, Vol. 68, no. 7, pp. 1204–1218. DOI: 10.1080/17476933.2022.2040021

12. Turmetov B.Kh., Karachik V.V. Neumann Boundary Condition for a Nonlocal Biharmonic Equation. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2022, Vol. 14, no. 2, pp. 51–58. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmph220205

13. Karachik V.V., Sarsenbi A.M., Turmetov B.K. On the Solvability of the Main Boundary Value Problems for a Nonlocal Poisson Equation. *Turk. J. Math.*, 2019, Vol. 43, pp. 1604–1625. DOI: 10.3906/mat-1901-71

14. Turmetov B., Karachik V. On a Boundary Value Problem for the Biharmonic Equation with Multiple Involution. *Mathematics*, 2021, Vol. 9, Iss. 17, 2020. DOI: 10.3390/math9172020

15. Turmetov B., Karachik V. Construction of Eigenfunctions to One Nonlocal Second-Order Differential Operator with Double Involution. *Axioms*, 2022, Vol. 11, no. 10, 543. DOI: 10.3390/axioms11100543

16. Turmetov B., Karachik V. On Eigenfunctions and Eigenvalues of a Nonlocal Laplace Operator with Multiple Involution. *Symmetry*, 2021, Vol. 13, no. 10, 1781. DOI: 10.3390/sym13101781

17. Karachik V.V. On Green's Function of the Dirichlet Problem for the Polyharmonic Equation in the Ball. *Axioms*, 2023, Vol. 12, no. 6, p. 543. DOI: 10.3390/axioms12060543

18. Karachik, V.V. Sufficient Conditions for Solvability of One Class of Neumann-Type Problems for the Polyharmonic Equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2021, Vol. 61, no. 8, pp. 1276–1288. DOI: 10.1134/s0965542521040059

19. Karachik V.V. On Solvability Conditions for the Neumann Problem for a Polyharmonic Equation in the Unit Ball. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2014, Vol. 8, no. 1, pp. 63–75. DOI: 10.1134/S1990478914010074

20. Karachik V.V. Presentation of Solution of the Dirichlet Problem for Biharmonic Equation in the Unit Ball through the Green Function. *Chelyab. Fiz.-Mat. Zh.*, 2020,Vol. 5, no. 4(1), pp. 391–399. (in Russ.).

Received March 16, 2024

Information about the author

Karachik Valeriy Valentinovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical Analysis and Methods of Teaching Mathematics Department, Senior Staff Scientist, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: karachikvv@susu.ru.