S. R. Treil', Hankel operators, embedding theorems and bases of co-invariant subspaces of the multiple shift operator,
Algebra i Analiz, 1989, Volume 1, Issue 6, 200–234

1989 АЛГЕБРА И АНАЛИЗ том 1, вып. 6

С. Р. Треиль

ОПЕРАТОРЫ ГАНКЕЛЯ, ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ И БАЗИСЫ ИЗ КОИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ ОПЕРАТОРА КРАТНОГО СДВИГА

Рассматриваются следующие теоремы вложения, соответствующие обобщенным задачам свободной интерполяции:

$$\int_{\Lambda} \| P_{\Theta_\lambda} f \|^2 d\mu(\lambda) \leqslant C \| f \|^2 \quad \forall f \in H^2;$$

здесь H^2 — пространство Харди в круге, $\{\Theta_\lambda\}_{\lambda \in \sigma}$ — некоторое измеримое семейство внутренних функций, а P_Θ — ортопроектор в H^2 на $K_\Theta \overset{\text{def}}{=} H^2 \ominus \Theta H^2$. Получено описание мер μ, для которых имеет место данное вложение. Это описание обобщает известную теорему вложения Карлесона; суть его состоит в том, что вложение достаточно проверять только для простейших рациональных дробей вида $\varphi_{z_0} = \frac{(1-|z|^2)^{1/2}}{1-\bar{z}_0 z}$. В первой главе полученное описание применяется к анализу условия Карлесона—Васюнина (CV), отвечающего за разрешимость обобщенных задач свободной интерполяции (безусловную базисность семейства подпространств K_Θ). Во второй главе исследуется базисность семейства коинвариантных подпространств кратного сдвига (векторных подпространств K_Θ). Доказано, что в случае конечной кратности безусловная базисность такого семейства равносильна его равномерной минимальности. Приведен анализ векторного условия Карлесона—Васюнина.

Введение

Вопросы, которым посвящена эта работа, восходят к классической задаче о свободной интерполяции в алгебре Харди H^∞, решенной Л. Карлесоном [1] в конце 50-х годов. Эта задача состояла в следующем: описать все (бесконечные) последовательности точек λ_n единичного круга $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, для которых интерполяционная задача

$$f(\lambda_n) = c_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Ключевые слова: свободная интерполяция, базисы из коинвариантных подпространств, операторы Ганкеля, теорема вложения.

имеет ограниченное, аналитическое в $\mathbb{D}$ решение f для любого ограниченного ($\sup\limits_n |c_n| < \infty$) набора данных интерполяции c_n. Свобода здесь понимается в том смысле, что на данные интерполяции не накладывается никаких условий, кроме простейшего (и естественного) $\sup\limits_n |c_n| < \infty$. Алгебра H^∞ всех ограниченных и аналитических в $\mathbb{D}$ функций называется алгеброй Харди.

Последовательности $\{\lambda_n\}$, для которых разрешима задача (1), называют интерполяционными, и в [1] было получено следующее их описание: последовательность $\{\lambda_n\}$ интерполяционна в том и только в том случае, когда

$$\inf_n \left| \prod_{k\neq n} b_{\lambda_k}(\lambda_n) \right| > 0; \tag{C}$$

здесь $b_\lambda = \frac{|\lambda|}{\lambda} \frac{\lambda - z}{1 - \bar{\lambda} z}$ — комформное отображение круга $\mathbb{D}$ на себя, называемое также преобразованием Мёбиуса или фактором Бляшке. Условие (C) известно в литературе как условие Карлесона.

Задачи, связанные со свободной интерполяцией, весьма существенны во многих разделах современного анализа (теория классов Харди, равномерные алгебры, функциональные модели линейных операторов, спектральная теория функций и т. д.), а сами интерполяционные последовательности используются в задачах весьма различного содержания (базисы из рациональных дробей и экспонент, максимальные идеалы алгебры H^∞), а также служат отправной точкой для различных обобщений. Причины такой популярности заключаются, по-видимому, в спектральной природе задачи свободной интерполяции, в связи интерполяционности со сходимостью спектральных разложений операторов в гильбертовом пространстве. Именно, еще в конце 60-х годов независимо (и примерно одновременно) В. Э. Кацнельсоном [2] и Н. К. Никольским и Б. С. Павловым [3] было замечено, что интерполяционность последовательности $\{\lambda_n\}$ равносильна безусловной базисности семейства рациональных дробей

$$\left\{ \frac{(1 - |\lambda_n|^2)^{1/2}}{1 - \bar{\lambda} z} \right\}_{n=1}^{\infty} \tag{2}$$

(в замыкании своей линейной оболочки) в пространстве Харди H^2, и эта связь в дальнейшем успешно эксплуатировалась в спектральной теории функций. Напомним, что пространство H^p состоит из всех аналитических в $\mathbb{D}$ функций f, для которых

$$\|f\|_p^p \stackrel{\text{def}}{=} \varlimsup_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} |f(r\zeta)|^p \, |d\zeta| < \infty$$

(ср. с определением H^∞), а пространство H^2 тем самым является гильбертовым. Дроби вида (2) являются собственными векторами оператора обратного сдвига S^*, $S^*f = (f - f(0))/z$, на основе которого строятся функциональные модели сжимающих операторов в гильбертовом пространстве. Безусловный базис (некоторого пространства) — это последовательность векторов $\{e_n\}$ такая, что любой элемент пространства может быть единственным образом представлен как сумма ряда вида $\sum\limits_{n\geq 1} a_n e_n$, $a_n \in \mathbb{C}$, и этот ряд сходится безусловно (неупорядоченно).

Одним из обобщений задачи о базисах из собственных векторов является задача о базисности семейства инвариантных подпространств оператора S^*. По известной теореме А. Бёрлинга (см. [4, 5]) каждое такое подпространство имеет вид

$$K_\Theta \overset{\mathrm{def}}{=} H^2 \ominus \Theta H^2,$$

где Θ — некоторая внутренняя функция из H^∞, т. е. $|\Theta(\zeta)| = 1$ п. в. на $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$. Упомянутая задача была решена В. И. Васюниным [6]. Им было показано, что для безусловной базисности семейства подпространств K_{Θ_n} необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие, известное в настоящее время как условие Карлесона—Васюнина:

$$\inf_{\substack{\lambda \in \mathbb{D} \\ n \in \mathbb{N}}} \left\{ |\Theta_n(\lambda)| + \prod_{k \neq n} |\Theta_k(\lambda)| \right\} = \delta > 0. \qquad \text{(CV)}$$

Задаче о безусловной базисности подпространств K_{Θ_n} соответствует следующая обобщенная задача свободной интерполяции: описать все наборы внутренних функций Θ_n, для которых интерполяционная задача

$$(f - f_n)/\Theta_n \in H^\infty, \ f_n \in H^\infty, \ \sup_n \|f_n\|_\infty < \infty \qquad (3)$$

имеет решение $f \in H^\infty$ для любого ограниченного $(\sup\limits_n \|f_n\|_\infty < \infty)$ набора данных интерполяции f_n, $f_n \in H^\infty$. Отметим, что такая постановка содержит и классическую задачу свободной интерполяции (1): для этого достаточно положить $\Theta_n = b_{\lambda_n}$, $b_n \equiv c_n$. В эту постановку также включается и задача кратной интерполяции

$$f^{(k)}(\lambda_n) = c_n^{(k)} \quad 0 \leqslant k \leqslant k_n - 1;$$

для этого достаточно положить $\Theta_n = b_{\lambda_n}^{k_n}$ и взять в качестве f_n какую-нибудь функцию из H^∞ (росток), для которой $f_n^{(k)}(\lambda_n) = c_n^{(k)}$, $0 \leqslant k \leqslant k_n - 1$. В этой записи, кстати, легко заметить, что «правильная» постановка задачи свободной кратной интерполяции — это интерполяция ростков f_n. Обобщенная интерполяционная задача (3) впервые рассматривалась В. И. Васюниным [6] (случай $f_n \equiv c_n$) и Н. К. Никольским [7] (общий случай). В работах [6—9] рассматривались также задача о базисах из инвариантных подпространств сжатий с одномерными дефектами и соответствующие интерполяционные задачи; в этих задачах речь идет уже не о внутренних функциях Θ_n, а о произвольных $\Theta_n \in H^\infty$, $\|\Theta_n\|_\infty \leqslant 1$, а сами постановки несколько усложнены по сравнению с (3).

Настоящая работа состоит из двух частей — «скалярной» и «векторной». Первая посвящена в основном анализу условия Карлесона—Васюнина (CV), а вторая — обобщению задачи о базисах на векторный случай, т. е. исследованию базисности семейств инвариантных подпространств сжатия класса C_0 с конечными дефектами. Поясним это подробнее.

Как хорошо известно (см. [4, 5]), условие Карлесона (C) допускает следующее геометрическое описание:

1. Последовательность λ_n должна быть редкой в гиперболической метрике, т. е. $\inf\limits_{n \neq k} |b_{\lambda_n}(\lambda_k)| > 0$.

2. Мера $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\lambda_n|^2) \delta_{\lambda_n}$ (δ_λ — единичная нагрузка в точке λ) должна быть карлесоновой, т. е. для нее должна выполняться следующая теорема вложения:

$$\int |f(\lambda)|^2 d\mu(\lambda) \leqslant C \|f\|^2 \quad \forall f \in H^2. \tag{4}$$

Карлесоновы меры, т. е. такие, для которых выполнено вложение (4), допускают следующее простое описание (см. [4, 5]). Именно, мера μ будет карлесоновой в том и только том случае, когда выполнено любое из двух эквивалентных условий

1. $\sup\limits_{\lambda \in \mathbb{D}} \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{1 - |\lambda|^2}{|1 - \bar{\lambda} z|^2} d\mu(z) \leqslant C < \infty.$

2. $\mu(\Delta_I) \leqslant C|I|$;

здесь I — дуга окружности $\mathbb{T}$, $|I|$ — ее длина, Δ_I — «квадрат» с основанием I, $\Delta_I = \left\{\lambda \in \mathbb{D} : \frac{\lambda}{|\lambda|} \in I, |\lambda| \geqslant 1 - |I|\right\}$.

Величину $C = \sup\limits_I \frac{1}{|I|} \mu(\Delta_I)$ называют интенсивностью меры μ.

В первой главе работы исследуются соответствующие обобщенной интерполяционной задаче (3) (задаче о базисности K_{Θ_n}) теоремы вложения вида

$$\int \|P_{\Theta_\lambda} f\|^2 d\mu(\lambda) \leqslant C \|f\|^2, \quad \forall f \in H^2, \tag{5}$$

где $\{\Theta_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — некоторое (измеримое) семейство внутренних функций, а P_{Θ_λ} означает ортопроектор в H^2 на K_Θ. На эту постановку указал автору Н. К. Никольский; она также приведена в его работе [8]. Там же отмечено, что если выполнено условие (CV) (т. е. подпространства K_{Θ_n} образуют базис), то имеет место вложение (5) (для считающей меры μ):

$$\sum \|P_{\Theta_n} f\|^2 \leqslant C \|f\|^2, \quad \forall f \in H^2,$$

а также, что если положить

$$\Theta_\lambda = b_\lambda, \ \lambda \in \mathbb{D}, \text{ то } \|P_{\Theta_\lambda} f\|^2 = \left(1 - |\lambda|^2\right) |f(\lambda)|^2$$

и задача сводится к теореме вложения Карлесона (4). Поэтому теорему вложения (5) можно рассматривать как обобщение последней.

Полученное в работе необходимое и достаточное для выполнения вложения (5) условие (см. теорему 2 ниже) применяется для анализа условия Карлесона—Васюнина. На этом пути удается несколько прояснить смысл условия Карлесона—Васюнина в общем случае. Для случая же, когда все функции Θ_n суть либо степени элементарных факторов Бляшке, $\Theta_n = b_{\lambda_n}^{k_n}$, либо элементарные сингулярные внутренние функции,

$$\Theta_n = \exp a_n \frac{z + \xi_n}{z - \xi_n}, \quad \xi_n \in \mathbb{T}, \ a_n > 0,$$

удается дать простые и наглядные критерии выполнения условия (CV) (сравнимые по простоте и наглядности с описанием интерполяционных последовательностей).

Операторы Ганкеля оказываются тесно связанными с теоремами вложения типа (3): оператор вложения имеет такие же метрические свойства, что и некоторый (векторный) оператор Ганкеля. На этом и базируется доказательство основного результата о теоремах вложения.

Прежде чем говорить о второй главе, отметим геометрическую интерпретацию теорем о свободной интерполяции. Именно нетрудно показать, что условие Карлесона (C) равносильно равномерной минимальности (см. опр. 7.2) семейства рациональных функций (2). Аналогично, условие Карлесона—Васюнина (CV) есть критерий равномерной минимальности семейства подпространств K_{Θ_n}. Поэтому теоремы о достаточности условий (C) и (CV) для разрешимости задач свободной интерполяции можно рассматривать как теоремы о том, что равномерная минимальность некоторого семейства подпространств влечет его безусловную базисность (вообще говоря, т. е. для общих последовательностей векторов или подпространств гильбертова пространства, равномерная минимальность есть гораздо более слабое свойство, чем базисность). Такая геометрическая интерпретация задачи свободной интерполяции была впервые отмечена Н. К. Никольским и Б. С. Павловым и в дальнейшем успешно использовалась в теории функций и спектральной теории. Равносильность безусловной базисности и равномерной минимальности была доказана для семейств инвариантных подпространств сжатия с одномерными дефектами (В. И. Васюнин [6]) и для семейств собственных подпространств сжатия с конечными дефектами (С. Р. Треиль [2]). В настоящей работе (гл. 2) такая равносильность доказывается для инвариантных подпространств сжатия T с конечными дефектами, характеристическая функция которого— внутренняя (т. е. для коинвариантных подпространств K_{Θ_n} оператора кратного сдвига).

Отметим, что если дефектные операторы $(I-T^*T)^{1/2}$, $(I-TT^*)^{1/2}$ сжатия T (даже с внутренней характеристической функцией) не являются операторами конечного ранга, а принадлежат классу Гильберта—Шмидта $\mathfrak{S}_2$, то равномерная минимальность семейства собственных подпространств не влечет его базисность (Н. К. Никольский, Б. С. Павлов [3]).

Основным шагом доказательства является, как и в [10], доказательство того, что равномерная минимальность влечет некоторую теорему вложения вида (5) (в [10] доказывалась карлесоновость некоторой меры). Можно сказать, что доказательство проводится по общей схеме из [10] с использованием теоремы вложения 2 из гл. 2 вместо теоремы вложения Карлесона.

В гл. 2 приведен также анализ векторного аналога условия Карлесона—Васюнина (CV), отвечающего за равномерную минимальность семейства подпространств K_{Θ_n} в векторном случае.

В работе используются следующие обозначения:

$\mathbb{C}$ — комплексная плоскость;

$\mathbb{D}$ — единичный круг, $\mathbb{D}=\{\xi\in\mathbb{C}:|\xi|<1\}$;

$\mathbb{T}$ — единичная окружность, $\mathbb{T}=\partial\mathbb{D}$;

H^p — пространство Харди, $H^p\overset{\text{def}}{=}\{f\in L^p(\mathbb{T}):\hat{f}(k)=0$ при $k<0\}$;[1] здесь $\hat{f}(k)$ — k-й коэффициент Фурье функции f;

---

[1] Отображение $\sum\limits_{k\geqslant 0} c_k(z\mid\mathbb{T})^k\to\sum\limits_{k\geqslant 0} c_k(z\mid\mathbb{D})^k$ позволяет отождествлять классы Харди H^p, $H^2(E)$, $H^\infty(E\to E_*)$ с пространствами аналитических в круге $\mathbb{D}$ функций, что мы и будем делать.

$H^2(E)$ (E — гильбертово пространство) — векторный класс Харди, $H^2(E) = \{f \in L^2(\mathbb{T}, E) : \hat{f}(k) = 0$ при $k < 0\}$; $H^2_-(E) = L^2(\mathbb{T}, E) \ominus \ominus H^2(E)$;

$L^\infty(E \to E_*)$ (E, E_* — гильбертовы пространства) — пространство ограниченных оператор-функций на окружности, $F(\xi) : E \to E_*$, $\xi \in \mathbb{T}$ с естественной sup-нормой;

$H^\infty(E \to E_*)$ — соответствующий класс Харди,

$$H^\infty(E \to E_*) = \{F \in L^\infty(E \to E_*) : \widehat{F}(k) = 0 \text{ при } k < 0\};$$

P_+, P_- — проекторы Рисса, $P_+f = \sum_{k \geqslant 0} \hat{f}(k) z^k$, $P_-f = \sum_{k<0} \hat{f}(k) z^k$, z — тождественное отображение $z(\xi) = \xi$ части комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (обычно $\mathbb{D}$ или $\mathbb{T}$) на себя, b_λ — элементарный фактор Бляшке, $b_\lambda = \frac{|\lambda|}{\lambda} \frac{\lambda - z}{1 - \bar{\lambda} z}$;

φ_λ — элементарная рациональная дробь $\varphi_\lambda = \frac{(1 - |\lambda|^2)^{1/2}}{1 - \bar{\lambda} z}$;

P_E — ортопроектор на подпространство E.

Автор считает своим принятым долгом выразить благодарность Н. К. Никольскому и В. И. Васюнину из их внимание к работе и многочисленные полезные замечания. Автор благодарен также В. А. Толоконникову, указавшему ему на один результат Бургейна [11], применение которого позволило значительно упростить доказательство.

Глава 1

ОПЕРАТОРЫ ГАНКЕЛЯ И ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ

§ 1. Постановка задачи

Пусть задано измеримое (относительно некоторой меры μ) семейство внутренних функций $\Theta_\lambda \in H^\infty$, занумерованное некоторым параметром $\lambda \in \Lambda$. Требуется узнать, для каких мер μ на Λ выполнена теорема вложения

$$\int_\Lambda \|P_{\Theta_\lambda} f\|^2 d\mu(\lambda) \leqslant C \cdot \|f\|^2 \quad \forall f \in H^2, \tag{1.1}$$

здесь P_Θ — ортопроектор в H^2 на $K_\Theta = H^2 \ominus \Theta H^2$.

Если $\Theta_\lambda = b_\lambda$, то $\|P_{\Theta_\lambda} f\|^2 = (1 - |\lambda|^2) |f(\lambda)|^2$ и вложение (1.1) выполнено в том и только том случае, когда мера $(1 - |\lambda|^2) d\mu(\lambda)$ есть мера Карлесона.

§ 2. Теоремы вложения

Описание мер μ, для которых выполнено вложение (1.1), дает следующая

2.1. Теорема. *Пусть $\{\Theta_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — измеримое (относительно меры μ) семейство внутренних функций. Следующие утверждения равносильны*

1. $\int \|P_{\Theta_\lambda} f\|^2 d\mu(\lambda) \leqslant C \cdot \|f\|^2 \quad \forall f \in H^2$;
2. $\sup_{z_0 \in \mathbb{D}} \int (1 - |\Theta_\lambda(z_0)|^2) d\mu(\lambda) < \infty$;

3. $\sup\limits_{z_0\in\mathbb{D}} \int \| P_{\Theta_\lambda}\varphi_{z_0}\|^2 d\mu(\lambda) < \infty$;

здесь $\varphi_{z_0} = \frac{(1-|z_0|^2)^{1/2}}{1-\bar{z}_0 z}$ *— элементарная рациональная дробь.*

Прежде чем доказывать теорему, отметим элементарные импликации. Так как $\|\varphi_{z_0}\|_2 = 1$, то очевидно, что $1 \Rightarrow 3$. Кроме того,

$$\|P_\Theta\varphi_{z_0}\|^2 = 1 - \|P_{\Theta H^2}\varphi_{z_0}\|^2 = 1 - \|\Theta\varphi_{z_0}\overline{\Theta}(z_0)\|^2 = 1 - |\Theta(z_0)|^2,$$

и поэтому очевидно, что $2 \Leftrightarrow 3$. Итак, для доказательства теоремы достаточно доказать, что вложение можно проверять только на дробях φ_{z_0}.

Доказательство основано на довольно известном факте о том, что ограниченность операторов Ганкеля можно проверять на рациональных дробях φ_{z_0}, $z_0\in\mathbb{D}$, поскольку оператор вложения есть по существу оператор Ганкеля.

§ 3. Операторы Ганкеля

Оператором Ганкеля (ганкелевым оператором) называют обычно оператор H, действующий из пространства H^2 в H^2_-, для которого выполнены коммутационные соотношения

$$Hzf = P_- zHf,\ f\in H^2; \tag{3.1}$$

последнее означает, что матрица оператора H относительно стандартных базисов в H^2 и H^2_- ($\{z^n\}_{n\geq 0}$, $\{z^n\}_{n<0}$) постоянна на диагоналях, перпендикулярных главной. Каждый такой оператор может быть реализован как проекция оператора умножения $H = H_\varphi$

$$H_\varphi f \overset{\text{def}}{=} P_-\varphi f,\ f\in H^2,$$

где φ — некоторая функция из L^∞ (так называемый символ оператора Ганкеля). Отметим, что символ φ определяется не однозначно, а с точностью до аналитического слагаемого и что его антианалитическая часть $P_-\varphi$ равна $H\cdot\mathbb{1}$. Напомним следующий известный результат (см. [12]).

3.1. Теорема. *Пусть H — ганкелев оператор, определенный по крайней мере на полиномах, $\varphi = H\cdot\mathbb{1}$ — антианалитическая часть символа этого оператора. Следующие утверждения равносильны.*

1. *H ограничен.*
2. $\varphi\in BMO$.
3. $\sup\limits_{z_0\in\mathbb{D}} \|H\varphi_{z_0}\| < \infty$; *здесь* $\varphi_{z_0} = (1-|z_0|^2)^{1/2}/(1-\bar{z}_0 z)$.

Кроме того, если утверждения 1—3 выполнены, то величины $\|H\|$, $\|\varphi\|_{BMO}$ и $\sup\limits_{z_0\in\mathbb{D}}\|H\varphi_{z_0}\|$ эквивалентны в смысле двусторонней оценки.

Доказательство. Равносильность $1 \Leftrightarrow 2$ является стандартным фактом теории операторов Ганкеля и следует из двойственности H^1 — BMO (см. [13, 5]). Докажем, что $1 \Leftrightarrow 3$. Очевидно, что для полинома $p\in H^2$

$$Hp = P_-\varphi p.$$

Поэтому

$$H\varphi_{z_0} = \varphi\varphi_{z_0} - P + \varphi\varphi_{z_0} = \varphi\varphi_{z_0} - \varphi(z_0)\varphi_{z_0},$$

и так как $H\varphi_{z_0}\in H^2_-$, $\varphi_{z_0}\in H^2$, $H^2 \perp H^2_-$, то

$$\|H\varphi_{z_0}\|^2 = \|\varphi\varphi_{z_0}\|^2 - \|\varphi(z_0)\varphi_{z_0}\|^2.$$

Вспоминая, что $|\varphi_{z_0}|^2 = \frac{1-|z_0|^2}{|1-\bar{z}_0 z|^2} = P_{z_0}(z)$ — ядро Пуассона для круга $\mathbb{D}$, легко посчитать, что

$$\|H\varphi_{z_0}\|^2 = |\varphi|^2(z_0) - |\varphi(z_0)|^2,$$

здесь $|\varphi|^2(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} |\varphi|^2 P_{z_0}|dz|$ — значение в точке z_0 гармонического продолжения в круг функции, равной $|\varphi|^2$ на окружности $\mathbb{T}$. Но величина $\sup\limits_{z_0}(|\varphi|^2(z_0) - |\varphi(z_0)|^2)$ есть квадрат эквивалентной нормы в BMO (так называемой нормы Гарсиа, см. [5]) и, следовательно, оператор H ограничен. ●

3.2. З а м е ч а н и е. Данная теорема переносится полностью и на случай операторов Ганкеля, действующих из пространства H^2 в векторное пространство $H^2_-(E)$ (E — сепарабельное гильбертово пространство). Символом оператора Ганкеля в этом случае будет оператор-функция φ со значениями в пространстве операторов из $\mathbb{C}$ в E, т. е. вектор-функция со значениями в E. Равносильность утверждений 1 и 2 следует из двойственности пространств H^1 и BMO функций со значениями в гильбертовом пространстве, а равносильность утверждений 2 и 3 проверяется так же, как и выше, в теореме 3.1.

3.3. З а м е ч а н и е. Очевидно также, что и у операторов Ганкеля, действующих из $H^2(E)$ в $H^2_-(E_*)$, $(\dim E < \infty)$ ограниченность можно проверять лишь на (векторных) рациональных дробях вида $\varphi_{z_0}e$, $z_0 \in \mathbb{D}$, $e \in E$, $\|e\| = 1$: именно ганкелев оператор H,

$$H : H^2(E) \to H^2_-(E_*), \ \dim E < \infty,$$

ограничен в том и только том случае, когда

$$\sup_{\substack{z_0 \in \mathbb{D} \\ e \in E, \|e\|=1}} \|H\varphi_{z_0}e\| < \infty.$$

Действительно, последнее условие влечет (см. предыдущее замечание) ограниченность оператора H на любом подпространстве вида $H^2 \cdot e$, $e \in E$. Выбрав произвольный ортонормированный базис $\{e_n\}_{n=1}^d$, $d = \dim E$ в E и заметив, что семейство подпространств $\{H^2 e_n\}_{n=1}^d$ образует ортогональный базис в $H^2(E)$, легко сделать вывод об ограниченности оператора H.

§ 4. Доказательство основной теоремы

Доказательство основной теоремы (теоремы 2.1) представляется в свете теоремы 3.1 и замечания 3.2 вполне элементарным. Прежде всего заметим, что для любой функции $f \in H^2$

$$\|P_\Theta f\| = \|\Theta P_- \bar{\Theta} f\| = \|H_{\bar{\Theta}} f\|.$$

Поэтому, если мы определим оператор H, действующий из H^2 в пространство $L^2(\mu, H^2_-)$ (пространство суммируемых с квадратом по мере μ функций со значением в H^2_-), следующим образом

$$Hf(\lambda) = H_{\Theta_\lambda} f, \quad f \in H^2, \quad \lambda \in \mathbb{D},$$

то доказательство теоремы 2.1 (импликация 3 ⇒ 1) сведется к доказательству ограниченности оператора H.

По теореме Фубини $L^2(\mu, H^2_-) = H^2_-(L^2(\mu))$. Кроме того, нетрудно заметить, что оператор H является ганкелевым (выполняются коммутационные соотношения (3.1)). Поэтому (см. замечание 3.2) условие 3 теоремы влечет ограниченность оператора H. ●

4.1. Замечание. Аналогично, учитывая замечание 3.1, можно доказать, что для случая операторных внутренних функций $\Theta_\lambda \in H^\infty(E_\lambda \to E)$, $\dim E < \infty$, вложение (1.1) будет выполнено в том и только том случае, когда

$$\sup_{z_0 \in \mathbb{D}} \int \left(\|e\|^2 - \|\Theta_\lambda^*(z_0)e\|^2\right) d\mu(\lambda) \leqslant C\|e\|^2 \quad \forall e \in E$$

(см. об операторном случае п. 8 настоящей работы).

§ 5. Теорема вложения в геометрических терминах

Рассмотрим частный случай теоремы вложения (1.1), когда Λ есть счетное множество, а мера μ — считающая мера, т. е. теорему вложения вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|P_{\Theta_n} f\|^2 \leqslant C \cdot \|f\|^2 \quad \forall f \in H^2, \tag{5.1}$$

которая и соответствует обобщенной задаче интерполяции. Для этого случая теорема 2 допускает переформулировку в геометрических терминах, терминах лебеговых множеств $\mathcal{O}_n^\varepsilon \overset{\text{det}}{=} \{z : |\Theta_n(z)| < \varepsilon\}$. Здесь и далее $\{\Theta_n\}_{n=1}^\infty$ — семейство внутренних функций.

5.1. Лемма. *Пусть*

$$C = \sup_{z_0 \in \mathbb{D}} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\Theta_n(z_0)|^2),$$

и пусть ε — некоторое число, $0 < \varepsilon < 1$, и $\mathcal{O}_n^\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{D} : |\Theta_n(\lambda)| < \varepsilon\}$. Тогда любая точка $z_0 \in \mathbb{D}$ содержится не более чем в $C/(1-\varepsilon^2)$ множествах $\mathcal{O}_n^\varepsilon$.

Доказательство. Очевидно. ●

5.2. Следствие. *Пусть $0 < \varepsilon < 1$. Следующие утверждения равносильны:*

1. $\sup\limits_{z_0 \in \mathbb{D}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - |\Theta_n(z_0)|^2) < \infty.$

2. *Каждая точка $z_0 \in \mathbb{D}$ содержится не более чем в $N = N(\varepsilon)$ множествах $\mathcal{O}_n^\varepsilon$, и*

$$\sup_{z_0 \in \mathbb{D}} {\sum_{n=1}^{\infty}}' (1 - |\Theta_n(z_0)|^2) < \infty; \tag{5.2}$$

здесь штрих означает, что в сумму входят только те слагаемые, для которых $|\Theta_n(z_0)| > \varepsilon$.

5.3. Теорема. *Пусть $0 < \varepsilon < 1$, и γ_n — карлесонов контур для Θ_n, т. е. $\gamma_n = \partial\mathcal{V}_n$, где $\mathcal{V}_n$ — открытые множества, $\mathcal{O}_n^{\varepsilon'} \subset \mathcal{V}_n \subset \mathcal{O}_n^\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon' = \varepsilon'(\varepsilon)$, причем мера $|dz||\gamma_n$ (длина γ_n) есть мера Карлесона с интенсивностью, не превосходящей C (C не зависит от n). Следующие утверждения равносильны.*

1. *Выполнено вложение* (5.1).

2. *Мера* $\sum_{n=1}^{\infty} |dz||\gamma_n$ *(суммарная длина* γ*) — карлесонова.*

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$. Очевидно, что

$$P_{\Theta_n}\varphi_{z_0} = \varphi_{z_0} - \Theta_n\overline{\Theta}_n(z_0)\varphi_{z_0}.$$

Поэтому, так как $|\Theta_n||\gamma_n < \varepsilon$,

$$\int_{\gamma_n} |\varphi_{z_0}|^2 |dz| \leqslant \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} \int_{\gamma_n} |P_{\Theta_n}\varphi_{z_0}|^2 |dz| \leqslant \frac{C}{(1-\varepsilon)^2} \|P_{\Theta_n}\varphi_{z_0}\|^2,$$

поскольку $|dz||\gamma_n$ есть мера Карлесона. Суммируя по всем n, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma_n} |\varphi_{z_0}|^2 \cdot |dz| \leqslant \frac{C}{(1-\varepsilon)^2} \sum_{n>1}^{\infty} (1 - |\Theta_n(z_0)|^2) \leqslant C' < \infty,$$

откуда и следует карлесоновость $\sum_{n=1}^{\infty} |dz||\gamma_n$.

$2 \Rightarrow 1$. Пусть $f \in H^2$. Тогда

$$\|P_{\Theta_n}f\|^2 = \|H_{\overline{\Theta}}f\|^2 = \left(\sup_{g \in H^2,\ \|g\| \leqslant 1} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \Theta_n^{-1} fg\, dz \right|\right)^2 =^{2}$$

$$= \left(\sup_{g \in H^2,\ \|g\| \leqslant 1} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_n} \Theta_n^{-1} fg\, dz \right|\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon'} \sup_{g \in H^2,\ \|g\| \leqslant 1} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_n} |f|^2 |dz| \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_n} |g|^2 |dz| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{\varepsilon'} \int_{\gamma_n} |f|^2 |dz|.$$

Суммируя по n, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|P_{\Theta_n}f\|^2 \leqslant C\|f\|^2,$$

так как мера $\sum_{n=1}^{\infty} |dz||\gamma_n$ — карлесонова.

5.4. Замечание. При доказательстве импликации $2 \Rightarrow 1$ в 5.3 мы воспользовались равенством

$$\int_{\mathbb{T}} \Theta_n^{-1} fg\, dz = \int_{\gamma_n} \Theta_n^{-1} fg\, dz,$$

которое является следствием теоремы Коши. Однако классические формулировки этой теоремы не дают возможности применить ее сразу и непрерывным образом продеформировать окружность $\mathbb{T}$ в контур γ_n, и мы воспользуемся рассуждениями леммы 41 из обзора [9]. Для краткости письма индекс n будем опускать.

---

[2] Здесь мы воспользовались теоремой Коши (см. замечание 5.4).

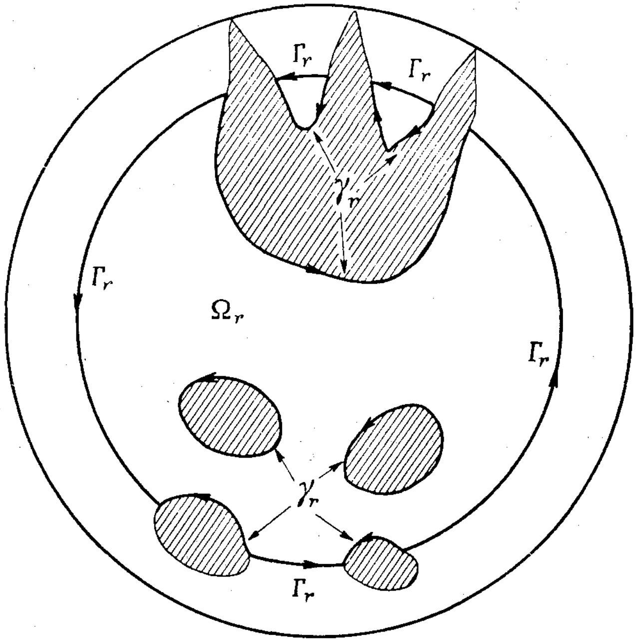

Рис. 1.

Пусть $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{D} \setminus \mathscr{V}$, $\Omega_r \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \cap \{\xi : |\xi| < r\}$. Тогда граница $\partial\Omega_r$ состоит из части $\gamma_r = \gamma \cap \{\xi : |\xi| \leqslant r\}$ контура γ и части Γ_r окружности $\mathbb{T}_r = \{\xi : |\xi| = r\}$, $\Gamma_r = \mathbb{T}_r \cap \Omega$, см. рис. 1.

По теореме Коши (классическая формулировка)

$$\int_{\gamma_r} \Theta^{-1} fg\,dz = \int_{\Gamma_r} \Theta^{-1} fg\,dz.$$

Пусть E_r — радиальная проекция Γ_r на окружность $\mathbb{T}$. Тогда

$$\int_{\Gamma_r} \Theta^{-1} fg\,dz = r \int_{\mathbb{T}} \Theta^{-1}(r\xi) f(r\xi) g(r\xi) \chi_{E_r}(\xi)\,d\xi.$$

Последний же интеграл стремится при $r \to 1$ к

$$\int_{\mathbb{T}} \Theta^{-1} fg\,dz$$

($|\Theta(r\xi)| \lessdot \varepsilon$ при $\xi \notin E_r$ и, следовательно, $\chi_{E_r}(\xi) \to 1$, п. в. на $\mathbb{T}$, так как $\lim\limits_{r\to 1} |\Theta(r\xi)| = 1$ п. в.). С другой стороны,

$$\int_{\gamma_r} \Theta^{-1} fg dz \underset{r\to 1}{\longrightarrow} \int_{\gamma} \Theta^{-1} fg\,dz$$

(можно воспользоваться теоремой Лебега о предельном переходе, так как $|\Theta^{-1}|\,|\gamma \leqslant \frac{1}{\varepsilon'}$, $f, g \in H^2$, а контур γ — карлесонов), что и доказывает нужное равенство. ●

5.5. Замечание. Как видно из следствия 5.2, вложение (5.1) влечет существование числа N такого, что каждая точка $z_0 \in \mathbb{D}$ покрыта не более чем N множествами $\mathcal{O}_n^{\varepsilon}$ (а значит, и $\mathscr{V}_n$). Однако при доказательстве импликации 2 $\Rightarrow$ 1 в теореме 5.3 это дополнительное условие нам не потребовалось, хотя далеко не очевидно, что это условие прямо следует из карлесоновости меры $\sum_{n=1}^{\infty} |dz|\,|\gamma_n$.

5.6. Частный случай. Теорема 5.3 кажется несколько надуманной и не очень полезной, поскольку ее условия выражены в терминах таких сложных объектов, как контуры Карлесона. Однако для частного случая, когда Θ_n есть степень фактора Бляшке

$$\Theta_n = b_{\lambda_n}^{k_n},$$

или Θ_n есть элементарная сингулярная функция

$$\Theta_n = \exp a_n \frac{z+\xi_n}{z-\xi_n}, \quad \xi_n \in \mathbb{T}, \quad a_n > 0,$$

в качестве контура Карлесона можно взять просто линию уровня $|\Theta_n| = \varepsilon$. Эти линии уровня являются окружностями (см. [4, 5]) с центром c_n и радиусом r_n, где

$$c_n = \frac{1-\varepsilon^{2/k_n}}{1-\varepsilon^{2/k_n}\cdot|\lambda_n|^2}\lambda_n, \quad r_n = \varepsilon^{1/k_n}\cdot\frac{1-|\lambda_n|^2}{1-\varepsilon^{2/k_n}\cdot|\lambda_n|^2}, \tag{5.3}$$

если $\Theta_n = b_{\lambda_n}^{k_n}$, и

$$c_n = \frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}\xi_n, \quad r_n = \frac{1}{1+\alpha_n}, \tag{5.4}$$

где $\alpha_n = \frac{1}{a_n}\log\frac{1}{\varepsilon}$,

если $\Theta_n = \exp a_n \frac{z+\xi_n}{z-\xi_n}$.

Проверить карлесоновость меры $\sum_{n=1}^{\infty} |dz|\,|\gamma_n$ в этом случае не представляет особого труда. Кажется полезной следующая теорема, выражающая карлесоновость этой меры в терминах центров c_n.

5.7. Теорема. *Пусть для каждого n функция Θ_n равна либо $b_{\lambda_n}^{k_n}$, либо $\exp a_n \frac{z+\xi_n}{z-\xi_n}$ (не обязательно, чтобы для всех n функции Θ_n были одного типа), и пусть D_n^ε $(0<\varepsilon<1)$ — круги радиусов r_n с центрами в точках c_n, где r_n и c_n определяются по формулам* (5.3), (5.4) *(в зависимости от типа функции), а T_n^ε — их границы, $T_n^\varepsilon = \partial D_n^\varepsilon$.*

Следующие утверждения равносильны.

1. *Выполнено вложение* (5.1).

2. *Мера $\sum_{n=1}^{\infty} |dz|\,|\gamma_n$ — карлесонова.*

3. *Любая точка круга $\mathbb{D}$ покрывается не более чем $N = N(\varepsilon)$ кругами D и мера $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|c_n|^2)\,\delta_{c_n}$ (δ_λ — единичная нагрузка в точке λ) есть мера Карлесона.*

Доказательство. Равносильность 1 $\Leftrightarrow$ 2 была доказана выше (теорема 5.3). Кроме того, из условия 1 теоремы следует, что каждая

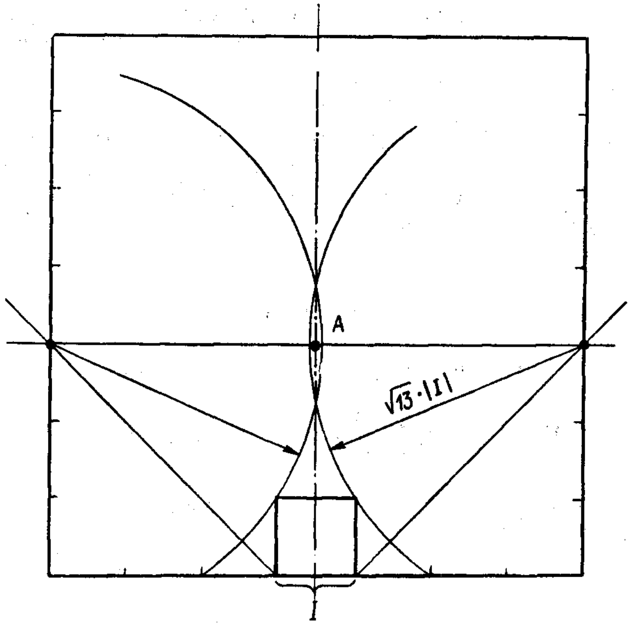

Рис. 2.

точка из $\mathbb{D}$ покрывается не более чем $N = N(\varepsilon)$ кругами D_n^ε (замечание 5.1). Докажем, что условие 2 теоремы влечет карлесоновость меры $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |c_n|^2)\, \delta_{c_n}$.

Действительно, рассмотрим произвольный «квадрат» $\Delta = \Delta_I = \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{z}{|z|} \in I, |z| \geqslant 1 - |I| \right\}$ с основанием на дуге I окружности $\mathbb{T}$. Очевидно, что если точка $c_n \in \Delta_n$, то по крайней мере четверть (любой) окружности $T \subset \mathbb{D}$ с центром c_n содержится в Δ_I. Поскольку при фиксированном ε

$$\varepsilon < \frac{r_n}{1 - |c_n|} \leqslant 1$$

(т. е. радиус каждой окружности T_n сравним с $1 - |c_n|$), то

$$\sum_{c_n \in \Delta} (1 - |c_n|) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \sum_{c_n \in \Delta} 2\pi r_n = \frac{4}{\varepsilon} \sum_{c_n \in \Delta} \frac{1}{2} \pi r_n.$$

Но последняя сумма не превосходит суммы длин дуг $T_n \cap \Delta$, где сумма берется по всем n таким, что $T_n \cap \Delta \neq \varnothing$, и так как мера $\sum_n |dz|\, |T_n$ карлесонова, то не превосходит $C \cdot |I|$. Следовательно, мера $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |c_n|)\, \delta_{c_n}$ — карлесонова.

Докажем импликацию $3 \Rightarrow 2$. Выберем произвольную дугу $I \subset \mathbb{T}$ и построим «квадрат» Δ_I с основанием I. Пусть $\tilde{I}$ — дуга длины $7 \cdot |I|$ с тем же центром. Легко показать, что любой круг $D_n \subset \mathbb{D}$ с центром c_n вне $\Delta_{\tilde{I}}$, задевающий Δ_I, обязательно содержит точку A, см. рис. 2. Следовательно, по условию 3 теоремы таких кругов может быть не более чем $N(\varepsilon)$ штук.

Для любой окружности T длина дуги $(T \cap \Delta_I)$ не превосходит периметра Δ, а значит, не превосходит $4\,|I|$. Поэтому суммарная длина дуг $T_n \cap \Delta_I$ окружностей T_n с центрами вне $\Delta_{\tilde{I}}$ не превосходит $4\cdot|I|\cdot N(\varepsilon)$. Что же касается остальных дуг $T_n \cap \Delta_I$, то их суммарная длина не больше, чем

$$\sum_{c_n\in\Delta_{\tilde{I}}} 2\pi r_n \leqslant \sum_{c_n\in\Delta_{\tilde{I}}} 2\pi(1-|c_n|) \leqslant C\,|\tilde{I}| = 7C\,|I|,$$

и, значит, мера $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |dz|\,|\,T_n$ — карлесонова.

§ 6. Анализ условия Карлесона—Васюнина

6.1. Определение. *Семейство внутренних функций* Θ_n *называется редким, если*

$$\inf_{n\neq k,\ \xi\in\mathbb{D}} (|\Theta_n(\xi)| + |\Theta_k(\xi)|) \overset{\text{def}}{=} 2\varepsilon > 0. \tag{R}$$

Редкость означает, что множества $\{z : |\Theta_n(z)| < \varepsilon\}$ дизъюнктны.

Напомним (см. Введение), что семейство функций Θ_n удовлетворяет условию Карлесона—Васюнина (CV), если

$$\inf_{\substack{n\\ z\in\mathbb{D}}} (|\Theta_n(z)| + \prod_{k\neq n} |\Theta_k(z)| > 0, \tag{CV}$$

и что это условие обеспечивает безусловную базисность семейства подпространств

$$K_{\Theta_n} = H^2 \ominus \Theta_n H^2.$$

6.2. Теорема. *Семейство функций* Θ_n *удовлетворяет условию Карлесона—Васюнина в том и только том случае, когда*

1. *Семейство* Θ_n *— редкое.*
2. *Выполнено вложение* (5.1).

Доказательство следует из теоремы 2 (для считающей меры) и неравенства $1 - t \leqslant -\log t \leqslant \left(2\log\frac{1}{\varepsilon}\right)(1-t)$, верного при $\varepsilon \leqslant t \leqslant 1$. ●

Используя эту теорему и теорему 5.6, легко получить следующие два утверждения.

6.3. Теорема. *Пусть* $\Theta_n = b_{\lambda_n}^{k_n}$. *Тогда семейство* Θ_n *удовлетворяет условию Карлесона—Васюнина в том и только том случае, когда*

1. $\inf\limits_{i\neq j} |b_{\lambda_i}(\lambda_j)|^{k_i k_j} > 0.$
2. *Мера* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-|c_n|^2)\,\delta_{c_n}$, *где* (*см.* (5.3))

$$c_n = \frac{1-\varepsilon^{2/k_n}}{1-\varepsilon^{2/k_n}\,|\lambda_n|^2}\,\lambda_n,$$

а δ_λ *— единичная нагрузка в точке* λ *— карлесонова при любом* (*каком-нибудь одном*) ε, $0<\varepsilon<1$.

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [4]), что условие 1 теоремы есть не что иное, как условие редкости семейства $\left\{b_{\lambda_n}^{k_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. По теореме 5.7 условие 2 теоремы вместе с условием

$$\left.\begin{array}{c}\text{каждая точка круга } \mathbb{D} \text{ покрывается на более чем}\\ N \text{ множествами } \mathcal{O}_n^{\varepsilon} = \{\lambda : |\theta_n(\lambda)| < \varepsilon\}\end{array}\right\} \qquad (6.1)$$

равносильно вложению (5.1), а по теореме 6.2 редкость и вложение равносильны условию Карлесона—Васюнина. Поэтому, чтобы доказать теорему, достаточно показать, что условия 1 и 2 (при некотором ε) влекут условие (6.1).

Хочется отметить, что это условие (6.1) выполнено при достаточно малых ε, когда множества $\mathcal{O}_n^{\varepsilon}$ просто не пересекаются, но мы предположим, что apriori нам дано, что условие 2 выполнено только при большем ε, когда возможны пересечения (иначе ничего доказывать не надо). Пусть ε_0 настолько мало, что множества $\mathcal{O}_n^{\varepsilon_0}$ не пересекаются.

Напомним некоторые необходимые для доказательства сведения. Гиперболическая метрика (метрика Лобачевского) ρ в круге $\mathbb{D}$ определяется как $\rho(\lambda, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \log\frac{1+|b_\lambda(\mu)|}{1-|b_\lambda(\mu)|}$ (и в действительности является метрикой, см., например, [5, 14]).

Множество $\mathcal{O}_n^{\varepsilon} = \left\{\xi : \left|b_{\lambda_n}(\xi)\right|^{k_n} < \varepsilon\right\}$ есть просто кружок в этой метрике с центром в точке λ_n и гиперболическим радиусом $\rho_n = \log\frac{1+\varepsilon^{1/k_n}}{1-\varepsilon^{1/k_n}}$. Пусть ρ_n^0 — гиперболический радиус кружка $\mathcal{O}_n^{\varepsilon_0}$. Рассмотрим разность

$$\rho_n - \rho_n^0 = \log\frac{1+\varepsilon^{1/k_n}}{1-\varepsilon^{1/k_n}} - \log\frac{1+\varepsilon_0^{1/k_n}}{1-\varepsilon_0^{1/k_n}}.$$

Это выражение имеет при $k_n \to \infty$ конечный предел $\left(\text{равный } \log\frac{\log\varepsilon_0}{\log\varepsilon}\right)$, и, значит,

$$\rho_n - \rho_n^0 \leqslant \rho = \rho(\varepsilon, \varepsilon_0) \ \forall n. \qquad (6.2)$$

Так как кружки $\mathcal{O}_n^{\varepsilon}$ и $\mathcal{O}_n^{\varepsilon_0}$ имеют общий гиперболический центр λ, а кружки $\mathcal{O}_n^{\varepsilon_0}$ дизъюнктны, то, учитывая (6.2), можно сделать вывод, что если точка $\lambda \in \mathbb{D}$ содержится в множестве $\mathcal{O}_n^{\varepsilon}$, то

$$\rho(\lambda, \mathcal{O}_n^{\varepsilon_0}) < \rho.$$

Но таких множеств может быть не более чем $\operatorname{sh}^2(\rho + 2\rho_0)/\operatorname{sh}^2\rho_0$ штук, где $\rho_0 = \log\frac{1+\varepsilon_0}{1-\varepsilon_0}$, ρ из неравенства (5.2).

Действительно, рассмотрим гиперболический круг D с центром в точке λ и радиусом ρ. Заменим каждый кружок $\mathcal{O}_n^{\varepsilon_0}$, пересекающийся с D, на кружок $D_n \subset \mathcal{O}_n^{\varepsilon}$ радиуса ρ_0 (напомним, что $\rho_0 \leqslant \rho_n^0$), тоже пересекающийся с D. Это можно сделать, например, потому что гиперболические кружки есть (см. [14]) не что иное, как обычные (евклидовы) круги (центр которых в общем случае смещен относительно гиперболического центра).

Кружки D_n дизъюнктны (так как дизъюнктны множества $\mathcal{O}_n^{\varepsilon_0}$) и содержатся в гиперболическом круге радиуса $\rho + 2\rho_0$. Вспомнив, что гиперболическая площадь круга радиуса ρ равна $\mathrm{sh}^2\rho$ (см. [14]), легко получаем требуемую оценку числа кругов $D_n(\mathcal{O}_n^\varepsilon)$. ●

6.4. Теорема. *Пусть* $\Theta_n = \exp a_n \frac{z+\xi_n}{z-\xi_n}$. *Тогда семейство* Θ_n *удовлетворяет условию Карлесона—Васюнина* (CV) *в том и только том случае, когда*

1. $\sup\limits_{i\neq j} \frac{a_i a_j}{|\xi_i-\xi_j|^2}<\infty$.
2. *Мера* $\sum (1-|c_k|^2)\,\delta_{c_k}$, *где*

$$c_k = c_k^\varepsilon = \frac{\alpha_k}{1+\alpha_k}\xi_k, \quad \alpha_k = \frac{1}{a_k}\log\frac{1}{\varepsilon}$$

является карлесоновой при всех (каком-нибудь одном) ε, $0<\varepsilon<1$.

Доказательство. Условие 1 равносильно редкости семейства $\{\Theta_n\}$ (см. [4], лекция X, следствие 2). По теореме 5.7, для того чтобы доказать вложение (5.1), а значит, и теорему, достаточно показать, что условие 2 выполнено при достаточно малом $\varepsilon=\varepsilon_0$ таком, что множества $\mathcal{O}_n^\varepsilon = \{z:|\Theta_n(z)|<\varepsilon\}$ (это круги с центрами c_n и радиусами r_n, где c_n и r_n даются формулами (5.4)) не пересекаются.

Пусть ε_0 настолько мало, что $\mathcal{O}_n^{\varepsilon_0}\cap\mathcal{O}_k^{\varepsilon_0}\neq\varnothing$ при $n\neq k$ (такое ε_0 существует, так как условие 1 равносильно редкости семейства Θ_n), и пусть нам apriori известно, что условие 2 выполнено при некотором $\varepsilon>\varepsilon_0$ (случай $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ тривиален). Заметим, что

$$1\leqslant\frac{1-|c_k^\varepsilon|}{1-|c_k^{\varepsilon_0}|}\leqslant\frac{\log\varepsilon_0}{\log\varepsilon},$$

и, значит, соответствующие меры

$$\sum(1-|c_k^\varepsilon|^2)\,\delta_{c_k^\varepsilon} \quad\text{и}\quad \sum(1-|c_k^{\varepsilon_0}|^2)\,\delta_{c_k^{\varepsilon_0}}$$

одновременно являются или не являются карлесоновыми. ●

Глава 2

БЕЗУСЛОВНЫЕ БАЗИСЫ ИЗ СОБСТВЕННЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ СЖАТИЙ С КОНЕЧНЫМИ ДЕФЕКТАМИ

§ 7. Геометрия семейств подпространств

7.1. Базис Рисса. Семейство подпространств $\mathscr{E}_n$ гильбертова пространства $\mathscr{H}$ называется *базисом Рисса* (*безусловным базисом*), если существует ограниченный обратимый оператор $\mathscr{J}$, переводящий его в некоторое ортогональное семейство подпространств. Такой оператор $\mathscr{J}$ называют *ортогонализатором* семейства подпространств $\mathscr{E}_n$. Среди всех ортогонализаторов удобно выделить операторы, изометрические на каждом подпространстве ε_n, и в дальнейшем мы будем рассматривать только такие ортогонализаторы (все они отличаются только унитарными множителями слева).

Мерой неортогональности безусловного базиса $\{\mathscr{E}_n\}$ будем называть величину

$$C(\{\mathscr{E}_n\})\overset{\text{def}}{=}\|\mathscr{J}\|\cdot\|\mathscr{J}^{-1}\|,$$

где $\mathscr{J}$ — ортогонализатор семейства $\{\mathscr{E}_n\}$.

Замечание. Здесь и далее мы имеем в виду «базис в замыкании своей линейной оболочки», т. е. вопрос о полноте не обсуждается вообще.

7.2. Равномерная минимальность. Семейство подпространств $\{\mathscr{E}_n\}$ называется равномерно минимальным, если

$$\inf_n \inf_{\substack{e \in \mathscr{E}_n \\ \|e\|=1}} \operatorname{dist}(e, \operatorname{span}(\mathscr{E}_k : k \neq n)) \stackrel{\text{def}}{=} \delta > 0, \qquad \text{(UM)}$$

число $\delta = \delta(\{\mathscr{E}_n\})$ называется *константой равномерной минимальности* семейства $\{\mathscr{E}_n\}$.

Семейство подпространств

$$\mathscr{E}'_n \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{span}(\mathscr{E}_k : k \in \mathbb{N}) \ominus \operatorname{span}(\mathscr{E}_k : k \neq n)$$

называется *биортогональным* к $\{\mathscr{E}_n\}$, и если семейсто $\{\mathscr{E}_n\}$ равномерно минимально, то будет равномерно минимальным и семейство $\{\mathscr{E}'_n\}$, причем константы равномерной минимальности будут совпадать.

Хорошо известно следующее описание безусловных базисов (см., например, [4]).

7.3. Теорема. *Семейство подпространств $\mathscr{E}_n$ образует безусловный базис в том и только том случае, когда оно равномерно минимально и выполнены вложения:*

$$\sum_n \|P_{\mathscr{E}_n} f\|^2 \leqslant C \cdot \|f\|^2 \quad \forall f \in \operatorname{span}(\mathscr{E}_n : n \in \mathbb{N}), \qquad (7.1)$$

$$\sum_n \|P_{\mathscr{E}'_n} f\|^2 \leqslant C' \|f\|^2 \quad \forall f \in \operatorname{span}(\mathscr{E}_n : n \in \mathbb{N}). \qquad (7.1')$$

Более того, для меры неортогональности семейства $\{\mathscr{E}_n\}$ верна оценка $\|\mathscr{T}\| \|\mathscr{T}^{-1}\| \leqslant \sqrt{CC'}/\delta$, где δ — константа равномерной минимальности этого семейства.

Все сказанное выше, разумеется, относится и к важному частному случаю одномерных подпространств $\mathscr{E}_n$, $\mathscr{E}_n = \operatorname{span} f_n$. В этом случае обычно говорят о семействах векторов f_n не подпространств $\mathscr{E}_n$ (например, равномерно минимальное семейство векторов f_n, т. е. такое, что соответствующее семейство подпространств $\mathscr{E}_n$, $\mathscr{E}_n = \operatorname{span} f_n$ равномерно минимально).

§ 8. Геометрия коинвариантных подпространств

Каждое коинвариантное (т. е. инвариантное относительно сопряженного оператора) подпространство оператора сдвига S, $Sf = z \cdot f$ в векторном пространстве Харди $H^2(E)$ имеет вид (см. [15, 16])

$$K_\Theta \stackrel{\text{def}}{=} H^2(E) \ominus \Theta H^2(E'),$$

где Θ — некоторая *внутренняя* (т. е. изометрическая почти везде на окружности $\mathbb{T}$) оператор-функция из операторного пространства Харди $H^\infty(E' \to E)$; (E' — некоторое вспомогательное гильбертово пространство). С точностью до постоянного унитарного множителя слева оператор-функция Θ определяется однозначно, и, значит, существует взаимно однозначное соответствие между коинвариантными подпространствами и внутренними функциями.

Напомним также, что если $K_{\Theta_1} \subset K_\Theta$, $\Theta_1 \in H^\infty(E' \to E)$, $\Theta \in H^\infty(E'' \to E)$, то Θ_1 делит (слева) Θ, т. е. существует (единственная) внутренняя функция $\Theta_2 \in H^\infty(E'' \to E')$ такая, что $\Theta = \Theta_1 \Theta_2$, и наоборот.

8.1. Обозначения. Пусть K_{Θ_n} — коинвариантные подпространства в $H^2(E)$ и

$$K_\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{span}(K_{\Theta_n} : n \in \mathbb{N})$$

(предполагаем, что $K_\Theta \neq H^2(E)$). Введем функции Θ^n

$$K_{\Theta^n} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{span}(K_{\Theta_k} : k \neq n)$$

и рассмотрим факторизации:

$$\Theta = \Theta_n \cdot \widetilde{\Theta}^n, \tag{8.1}$$

$$\Theta = \Theta^n \cdot \widetilde{\Theta}_n, \tag{8.2}$$

которые однозначно определяют внутренние функции $\widetilde{\Theta}^n$ и $\widetilde{\Theta}_n$.

Нам потребуется следующий известный факт, см. [17, 18, 20].

8.2. Теорема. *Пусть заданы внутренние функции $\Theta_1 \in H^\infty(E_1 \to E)$, $\Theta_2 \in H^\infty(E_2 \to E)$. Тогда угол между подпространствами K_{Θ_1} и K_{Θ_2} отличен от нуля в том и только в том случае, когда найдутся функции $\Psi_1 \in H^\infty(E \to E_1)$, $\Psi_2 \in H^\infty(E \to E_2)$ такие, что*

$$\Theta_1\Psi_1 + \Theta_2\Psi_2 \equiv I,$$

и, более того, косой проектор $\mathcal{P}_{\Theta_1 \| \Theta_2}$ на K_{Θ_1} параллельно K_{Θ_2} вычисляется по формуле

$$\mathcal{P}_{\Theta_1 \| \Theta_2} f = P_+ (\Theta_2\Psi_2)^* f \quad \forall f \in K_\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{span}(K_{\Theta_1}, K_{\Theta_2});$$

норма этого проектора равна минимально возможной норме такого Ψ_2 (Ψ_1).

Если, кроме того, $\dim E = d < \infty$, то последнее условие равносильно следующему:

$$\inf_{\substack{\lambda \in \mathbb{D} \\ e \in E,\ \|e\|=1}} (\|\Theta_1(\lambda)^* e\| + \|\Theta_2(\lambda)^* e\|) \stackrel{\text{def}}{=} \delta > 0,$$

причем норма проектора $\mathcal{P}_{\Theta_1 \| \Theta_2}$ допускает оценку

$$\frac{1}{\delta} \leqslant \|\mathcal{P}_{\Theta_1 \| \Theta_2}\| \leqslant C = C(\delta, d).$$

8.3. Следствие. *Пусть $\dim E = d < \infty$. Семейство коинвариантных подпространств K_{Θ_n} будет равномерно минимальным в том и только том случае, когда (см. обозначения 8.1)*

$$\inf_n \inf_{\substack{\lambda \in \mathbb{D} \\ e \in E,\ \|e\|=1}} (\|\Theta_n(\lambda)^* e\| + \|\Theta^n(\lambda)^* e\|) > 0. \tag{8.3}$$

Доказательство сразу же следует из теоремы 8.2, если вспомнить, что синус угла между подпространствами E_1, E_2

$$\sin\langle E_1, E_2\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\substack{e \in E_1 \\ \|e\|=1}} \operatorname{dist}(e, E_2)$$

связан с нормой косого проектора $\mathcal{P}_{E_1 \| E_2}$ на E_1 параллельно E_2 следующим соотношением:

$$\sin\langle E_1, E_2\rangle = 1/\|\mathcal{P}_{E_1 \| E_2}\|. \quad \bullet$$

Условие (8.3) является матричным аналогом условия Карлесона—Васюнина (CV). В настоящей главе будет доказано, что в случае $\dim E < \infty$ это условие, так же как и в скалярном случае, обеспечивает безусловную базисность семейства подпространств K_{Θ_n}. Для доказательства нам потребуется следующее описание безусловных базисов K_{Θ_n}.

8.4. Теорема. *Пусть функции Θ_n — двусторонне внутренние, т. е. операторы $\Theta_n(\xi)$ есть унитарные операторы в E при почти всех $\xi \in \mathbb{T}$, и пусть $\dim E = d < \infty$. Тогда семейство подпространств K_{Θ_n} образует базис Рисса в том и только том случае, когда оно равномерно минимально и выполнены два условия:*

$$\sum_n (1 - \|\Theta_n(\lambda)^* e\|^2) \leqslant C < \infty \quad \forall e \in E, \quad \|e\| = 1, \ \forall \lambda \in \mathbb{D}, \tag{8.4}$$

$$\sum_n (1 - \|\widetilde{\Theta}_n(\lambda) e\|^2) \leqslant C < \infty \quad \forall e \in E, \quad \|e\| = 1, \quad \forall \lambda \in \mathbb{D}. \tag{8.4'}$$

Доказательство. Как видно из следствия 4.1, условие (8.4) равносильно вложению

$$\sum_n \left\| P_{K_{\Theta_n}} f \right\|^2 \leqslant C \cdot \|f\|^2 \quad \forall f \in H^2(E).$$

Покажем, что условие (8.4′) равносильно аналогичному вложению для биортогональной системы K'_{Θ_n}. Так как

$$K'_{\Theta_n} = K_\Theta \ominus K_{\Theta^n},$$

то из факторизации (8.2) следует, что под действием умножения на Θ^* это пространство переходит в подпространство

$$\overline{H}^2_-(E) \ominus \widetilde{\Theta}^*_n H^2_-(E).$$

Последнее же под действием оператора τ $(\tau f)(z) = \bar{z} f(\bar{z})$ переходит в подпространство $K_{\Theta_n^{\#}}$, где $\Theta_n^{\#}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\Theta}^*_n(\bar{z})$. Так как умножение на Θ^* и отображение τ суть унитарные операторы, то геометрия семейства K'_{Θ_n} совпадает с геометрией подпространств $K_{\Theta_n^{\#}}$. Условие же (8.4′) есть критерий вложения

$$\sum_n \left\| P_{K_{\Theta_n^{\#}}} f \right\|^2 \leqslant C \|f\|^2 \quad \forall f \in H^2(E).$$

8.5. Определение. *Функция $\varphi \in H^\infty$ называется аннулятором пространства K_Θ (оператор-функции Θ), если*

$$P_+ \bar{\varphi} K^{\sim}_{\Theta} = \{\mathbb{O}\}. \blacksquare$$

Внутренняя функция $m = m_\Theta$, являющаяся аннулятором Θ и делящая любой аннулятор φ ($\varphi/\Theta \in H^\infty$), называется минимальным аннулятором.

Отметим, что φ является аннулятором в том и только том случае, когда существует аналитическая ограниченная оператор-функция Ω такая, что $\Theta\Omega = \varphi I$. В частности, определитель $\det \Theta$ (если он существует) тоже является аннулятором. Отсюда нетрудно получить следующие оценки для m_Θ:

$$\inf_{\substack{e \in E \\ \|e\| = 1}} \|\Theta^*(\lambda) e\| \geqslant |m_\Theta(\lambda)| \geqslant |\det \Theta(\lambda)|. \tag{8.5}$$

8.6. Лемма. *Любое из условий*

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{D}} \sum_n \left(1-|m_{\Theta_n}(\lambda)|^2\right)<\infty, \tag{8.6}$$

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{D}} \sum_n \left(1-|\det\Theta_n(\lambda)|^2\right)<\infty \tag{8.7}$$

влечет выполнение условий (8.4) *и* (8.4′).

Доказательство. Условие (8.7) (если $\det\Theta_n$ имеет смысл) сильнее, чем (8.6), и поэтому достаточно проверить, что (8.6) $\Rightarrow$ (8.4) и (8.6) $\Rightarrow$ (8.4′). Первая импликация очевидна ввиду неравенства (8.5). Докажем вторую. Оператор $P_+\bar m_{\Theta_n}$ аннулирует подпространство K_{Θ_n}, и

$$P_+\bar m_{\Theta_n}K_{\Theta_k}\subset K_{\Theta_k},\quad k\neq n.$$

Следовательно,

$$P_+\bar m_{\Theta_n}K_\Theta\subset K_{\Theta^n}.$$

Очевидно также, что

$$P_+\Theta^{n*}K_\Theta=K_{\tilde\Theta_n}.$$

Поэтому

$$P_+\bar m_{\Theta_n}K_{\tilde\Theta_n}=P_+\bar m_{\Theta_n}\bar m P_+\Theta^{n*}K_\Theta=P_+\Theta^{n*}\bar m_{\Theta_n}K_\Theta\subset P_+\Theta^{n*}K_{\Theta^n}=\{\mathbb{O}\},$$

т. е. m_{Θ_n} является аннулятором $\tilde\Theta_n$. Но тогда

$$\inf_{e\in E,\ \|e\|=1}\|\tilde\Theta_n(\lambda)^*e\|\geqslant|m_{\Theta_n}(\lambda)|\quad\forall\lambda\in\mathbb{D},$$

что и доказывает лемму. ●

Нам также потребуется следующая простая

8.7. Лемма. *Пусть $\Theta\in H^\infty(E_*\to E)$ — внутренняя функция. Тогда*

$$\|\Theta(\lambda)^*e\|=\operatorname{dist}(\varphi_\lambda e,\ K_\Theta).$$

Доказательство:

$$\operatorname{dist}(\varphi_\lambda e,\ K_\Theta)=\|P_{\Theta H^2(E_*)}\varphi_\lambda e\|=\|P_+\Theta^*\varphi_\lambda e\|=\|\varphi_\lambda\Theta^*(\lambda)e\|=\|\Theta^*(\lambda)e\|.\ ●$$

§ 9. Основной результат

9.1. Теорема. *Пусть $\Theta_n\in H^\infty(E_n\to E)$, $\dim E<\infty$ — семейство внутренних функций. Тогда семейство подпространств K_{Θ_n} образует базис Рисса в том и только том случае, когда оно равномерно минимально, т. е.* (*см. следствие* 8.3) *когда*

$$\inf_n\ \inf_{\substack{\lambda\in\mathbb{D}\\ e\in E,\ \|e\|=1}}\left(\|\Theta_n(\lambda)^*e\|+\|\Theta^n(\lambda)^*e\|\right)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\delta>0.$$

9.2. Сведение к случаю двусторонних внутренних функций Θ_n. Из того, что $\Theta_n\in H^\infty(E_n\to E)$ является внутренней, следует, что $\dim E_n\leqslant\dim E$. Для доказательства теоремы нам достаточно будет рассмотреть случай $\dim E_n=\dim E$ $\forall n$, т. е. считать, что все Θ_n есть двусторонние внутренние функции из $H^\infty(E\to E)$, ($\Theta_n(\xi)$ есть унитарные операторы в E п. в. на $\mathbb{T}$).

Действительно, поскольку для $e\in E$

$$\|\Theta^*(\lambda)e\|=\operatorname{dist}(\varphi_\lambda e,\ K_\Theta)$$

(см. лемму 8.7), то $\varphi_\lambda e \in K_\Theta$ в том и только том случае, когда $\Theta^*(\lambda)\, e = 0$. Поэтому уже из линейной независимости семейства подпространств K_{Θ_n}, $\Theta_n \in H^\infty(E_n \to E)$ следует, что в любой точке $\lambda \in \mathbb{D}$ не более чем $d = \dim E$ операторов $\Theta_n^*(\lambda)$ имеют ненулевое ядро.

Поэтому, если семейство подпространств K_{Θ_n}, $\Theta_n \in H^\infty(E_n \to E)$, $\dim E = d < \infty$ равномерно минимально, то не более чем для d номеров n, $\dim E_n < d$, т. е. все функции Θ_n, за исключением, возможно, не более чем d штук, являются двусторонне внутренними. Отметим точности ради, что если семейство Θ_n состоит более чем из d функций, то можно утверждать, что не более $d - 1$ из них не являются двусторонне внутренними.

Нетрудно показать, что если к безусловному базису из подпространств добавить несколько новых подпространств так, чтобы полученная (расширенная) система оставалась равномерно минимальной, то эта расширенная система будет и безусловным базисом.

Из вышесказанного и следует, что для доказательства теоремы достаточно разобрать случай, когда все Θ_n есть двусторонние внутренние функции (т. е. $\Theta_n \in H^\infty(E \to E)\ \forall n$).

§ 10. Схема доказательства основного результата

Доказательство теоремы 9.1 происходит в основном по той же схеме, что и доказательство, приведенное в работе автора [10], посвященной случаю одномерных подпространств K_{Θ_n}. Так же как и в [10], в настоящей работе доказательство теоремы сводится к доказательству некоего вложения (в нашем случае вложения для определителей (8.7)). Для этого, как и в [10], семейство подпространств K_{Θ_n} разбивается на конечное число подсемейств, каждое из которых является «почти скалярным» (или малым возмущением некоторого скалярного семейства K_{Θ_n}, $\Theta_n \in H^\infty$ — точные формулировки см. ниже в § 11—13). Опираясь на результаты для скалярного случая (см. § 11), удается доказать теоремы вложения для каждого такого «почти скалярного» подсемейства.

Принципиально новыми (по сравнению с [10]) в настоящей работе являются следующие моменты.

1. Вместо теоремы вложения Карлесона используется теорема 2 (проверка условия (8.7)).

2. На «почти скалярные» семейства разбивается не само семейство K_{Θ_n}, а некоторое вспомогательное семейство, аппроксимирующее исходное.

Реализуем описанную выше программу.

§ 11. Скалярный случай

Приведем два хорошо известных результата, относящихся к скалярному случаю $\Theta_n \in H^\infty$, см., например, [6, 7, 4, 9].

11.1. Т е о р е м а (см. [4], лекция IX). *Пусть семейство подпространств* K_{Θ_n}, $\Theta_n \in H^\infty$ *(скалярному) равномерно минимально (т. е. выполнено условие Карлесона—Васюнина* (CV)) *с константой равномерной минимальности* δ. *Тогда это семейство будет безусловным базисом, и существует такая константа* CV (δ), *что мера неортогональности этого семейства допускает оценку*

$$\|\mathcal{T}\|\cdot\|\mathcal{T}^{-1}\| \leqslant \mathrm{CV}(\delta).$$

Замечание. В приведенной в [4] формулировке константа (которая приведена там в явном виде) зависит не от константы равномерной минимальности δ, а от величины

$$\delta' \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{n} \inf_{\lambda \in \mathbb{D}} \left\{ |\Theta_n(\lambda)| + \prod_{k \neq n} |\Theta_k(\lambda)| \right\},$$

однако можно легко перейти и к приведенной выше формулировке, используя, например, тот факт, что $\delta \leqslant \delta'$.

11.2. Теорема. *Пусть последовательность λ_k — редкая, т. е.*

$$\inf_{k \neq n} |b_{\lambda_k}(\lambda_n)| = \alpha > 0,$$

и пусть мера $\sum_n (1 - |\lambda_n|^2)\, \delta_{\lambda_n}$ — карлесонова с интенсивностью,[3] не превосходящей A. Тогда семейство $\{\varphi_{\lambda_k}\}_{k=1}^{\infty}$ (одномерных пространств) образует базис Рисса, причем мера неортогональности допускает оценку

$$\|\mathcal{T}\| \cdot \|\mathcal{T}^{-1}\| \leqslant C = C(A, \alpha).$$

§ 12. Аппроксимация подпространств K_{Θ_n}

Нам потребуется следующая лемма, несколько усиливающая известный результат о контуре Карлесона.

12.1. Лемма [11]. *Пусть Θ — внутренняя функция, $\varepsilon \in (0, 1)$. Существует число ε', $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, и открытое множество $\mathscr{V}$ со спрямляемой границей такое, что*

1. $|\Theta(\lambda)| < \varepsilon$ при $\lambda \in \mathscr{V}$ и $|\Theta(\lambda)| > \varepsilon'$ при $\lambda \notin \mathscr{V}$.

2. *Мера $|dz|\,|\,\partial\mathscr{V}$ (длина дуги) есть мера Карлесона, причем ее интенсивность не превосходит абсолютной (не зависящей от Θ и ε) константы C.*

Эта лемма была доказана в [11] для случая, когда Θ — произведение Бляшке. Используя теорему Фростмана (см. [4, 5]) о равномерной аппроксимации произвольной внутренней функции произведениями Бляшке, легко распространить этот результат на все внутренние функции (уменьшив сколь угодно незначительно величину ε').

12.2. Построение аппроксимирующего произведения Бляшке. Применим предыдущую лемму к внутренней функции $\det \Theta_n$ (как было сказано выше в п. 9.2, достаточно доказать теорему для случая, когда все Θ_n — двусторонние внутренние функции, а значит, $\det \Theta_n$ — скалярная внутренняя функция). Получим множество $\mathscr{V} = \mathscr{V}_n$ с карлесоновой границей такое, что

$$|\det \Theta_n(\lambda)| < \varepsilon^d, \ \lambda \in \mathscr{V}; \quad |\det \Theta_n(\lambda)| > \varepsilon'^d, \ \lambda \notin \mathscr{V}; \tag{12.1}$$

здесь, напоминаем, $d = \dim E$. (Нам удобнее обозначить ε и ε' из леммы как ε^d и ε'^d). Число ε будет выбрано чуть позже, см. п. 12.5.

Зафиксируем некоторое число α, $0 < \alpha < 1$, и разметим на контуре $\partial\mathscr{V}$ точки λ_k так, чтобы

$$\inf_{i \neq k} |b_{\lambda_k}(\lambda_i)| \geqslant \alpha \tag{12.2}$$

---

[3] Напомним, что интенсивностью карлесоновой меры μ называется величина $\sup_I \frac{1}{|I|} \mu(\Delta_I)$; здесь supremum берется по всем дугам I окружности $\mathbb{T}$, а Δ_I обозначает «квадрат» с основанием I, $\Delta_I \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \lambda \in \mathbb{D} : \frac{\lambda}{|\lambda|} \in I, \ |\lambda| \geqslant 1 - |I| \right\}$.

и чтобы для любой точки $\lambda \in \partial \mathscr{V}$

$$\inf_k |b_{\lambda_k}(\lambda)| < \alpha. \tag{12.3}$$

Это можно сделать, например, последовательно размещая на контуре $\partial\mathscr{V}$ точки λ_k так, чтобы каждая следующая точка не принадлежала бы гиперболическим кружкам радиуса $\rho = \log \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$ с центрами в уже построенных точках и чтобы эти кружки покрыли бы $\partial\mathscr{V}$. Последнего можно добиться, разбив круг на «слои» D_m, $D_m \overset{\text{def}}{=} \{\lambda \in \mathbb{D} : 1 - 2^{-m} \leqslant |\lambda| < 1 - 2^{-m-1}\}$, $(D_0 = \{\lambda : |\lambda| < 1/2\})$, и, размещая точки λ_k, переходить к $m+1$-му слою только тогда, когда следующую точку уже нельзя поместить в m-м слое, т. е. когда контур $\partial\mathscr{V} \cap D_m$ уже весь покрыт построенными кругами. Так как каждый слой D_m имеет конечную гиперболическую площадь, а гиперболические круги с центрами в λ_k и радиусом $\rho/2$ не пересекаются (и имеют площадь $\operatorname{sh}^2 \rho/2$), то каждый такой слой исчерпывается за конечное число шагов.

Очевидно, что мера $\sum_k (1 - |\lambda_k|^2)\,\delta_{\lambda_k}$ будет карлесоновой, причем интенсивность ее можно оценить константой, зависящей только от α (но не от ε или Θ). Последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ будет редкой (см. (12.2)), и, следовательно, по теореме 11.2 будет интерполяционной, т. е. семейство $\{\varphi_{\lambda_k}\}_{k=1}^{\infty}$ будет безусловным базисом, причем мера неортогональности его будет допускать оценку

$$\|\mathscr{T}\|\cdot\|\mathscr{T}^{-1}\| \leqslant C = C(\alpha) \tag{12.4}$$

(подчеркнем, что $C_{(\alpha)}$ не зависит от ε и Θ).

Пусть $B = B_n = \prod_{k=1}^{\infty} b_{\lambda_k}$ — произведение Бляшке, нулями которого являются построенные выше точки λ_k, $k = 1, 2, \ldots$ Отметим, что в силу условия (12.3) верна оценка

$$|B(\lambda)| < \alpha, \quad \lambda \in \partial\mathscr{V}. \tag{12.5}$$

Для построенных таким образом произведений B_n верна следующая

12.3. Лемма. *Если*

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |B_n(\lambda)|^2) < \infty,$$

то

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\det \Theta_n(\lambda)|^2) < \infty.$$

Доказательство. Достаточно показать (см. следствие 5.2), что выполнено условие

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \sum_{n=1}^{\infty}{}' (1 - |\det \Theta_n(\lambda)|^2) < \infty,$$

где $'$ означает, что в сумме берутся только те номера n, для которых $|\det \Theta_n(\lambda)| > \varepsilon^d$. Слегка ослабим это требование и будем считать, что в сумме участвуют только те номера n, для которых $\lambda \notin \mathscr{V}_n$ ($\mathscr{V}_n$ — множество с карлесоновой границей из п. 12.2).

Из условия (12.5) следует, что для подходящего $N \in \mathbb{N}$ на контуре $\partial\mathscr{V}_n$

$$|B_n^N(\lambda)| < \varepsilon'^d \leqslant |\det \Theta_n(\lambda)|.$$

Поэтому, применяя принцип максимума модуля (см. 12.4) к функции $B_n^N/\det \Theta_n$, получаем

$$|B_n(\lambda)|^N \leqslant |\det \Theta_n(\lambda)|, \quad \lambda \in \mathbb{D} \setminus \mathscr{V}_n.$$

Поэтому из условия

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |B_n(\lambda)|^{2N}) < \infty$$

следует очевидным образом и заключение леммы. Осталось заметить, что последнее условие в силу неравенства

$$1 - \delta^N \leqslant N \cdot (1 - \delta)$$

следует из ее посылки. ●

12.4. Лемма. *Пусть Ω — открытое подмножество круга $\mathbb{D}$, и пусть f — функция непрерывная в $\mathbb{D} \cap \operatorname{clos} \Omega$, аналитическая в Ω и принадлежащая там классу В. И. Смирнова $D(\Omega)$ (т. е. для которой существуют ограниченные аналитические f_n такие, что $f_n(\xi) \to f(\xi)$, и $|f_n(\xi)| \uparrow |f(\xi)|$, $\xi \in \Omega$). Пусть, кроме того, $|f| \leqslant 1$ на $\partial\Omega \cap \mathbb{D}$,* и *$\overline{\lim}|f| = 1$ почти во всех точках окружности, которые являются угловыми пределами точек из Ω ($\overline{\lim}$ также означает угловой верхний предел). Тогда $\sup\limits_{\Omega} |f| \leqslant 1$.*

Утверждения подобного рода почти наверняка хорошо известны специалистам. Данная формулировка приведена в [9].

Отметим, что функция $f = B_n^N/\det \Theta_n$ и область $\Omega = \mathbb{D} \setminus \operatorname{clos} \mathscr{V}_n$ удовлетворяют условию леммы (f принадлежит классу В. И. Смирнова $D(\Omega)$, поскольку она аналитическая в Ω и ограничена там).

12.5. Выбор ε. Пусть δ — константа равномерной минимальности семейства подпространств K_{Θ_n}, и пусть $\mathrm{CV}(\delta/2)$ — константа из теоремы 11.1, и пусть $C = C(\alpha)$ — константа из (12.4) (см. п. 12.2; напомним, что константу мы зафиксировали). Выберем ε так, чтобы

$$\varepsilon \cdot C \cdot \mathrm{CV}(\delta/2) < \frac{\delta}{10}.$$

Выбор этот будет ясен ниже, см. § 14, п. 14.2.

§ 13. Выделение «почти скалярного» случая

Итак, в предыдущем пункте мы показали, что для доказательства теоремы достаточно убедиться (см. лемму 12.3 и условие (8.7)) в выполнении условия

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \sum_{n} (1 - |B_n(\lambda)|^2) < \infty$$

для построенных выше произведений Бляшке B_n.

Если λ_k^n — какой-нибудь корень произведения Бляшке B_n, то по построению B_n

$$|\det \Theta_n(\lambda_k^n)| < \varepsilon^d,$$

и, значит, найдется такой вектор $e_k^n \in E$, $\|e_k^n\| = 1$, что

$$\|\Theta_n^*(\lambda_k^n) e_k^n\| < \varepsilon. \tag{13.1}$$

Построим такие векторы e_k^n, $\|e_k^n\| = 1$ для всех корней λ_k^n всех произведений Бляшке B_n.

Пусть $e^1, e^2, \ldots, e^N$, $e^k \in E$, $\|e^k\| = 1$ — конечная ε-сеть (ε — из п. 12.5) на единичной сфере в E. Разобьем множество σ — множество нулей произведения Бляшке B_n на N частей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N$, $\bigcup\limits_{i=1}^{N} \sigma_i = \sigma$, $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$, $i \neq j$, так, чтобы из условия $\lambda_k^n \in \sigma_i$ (λ_k^n — какой-нибудь корень B_n) следовало, что соответствующий вектор e_k^n близок к e^i:

$$\|e_k^n - e^i\| < \varepsilon. \tag{13.2}$$

Пусть B_n^i — произведение Бляшке с множеством нулей σ_i. Очевидно, что $B_n = \prod\limits_{i=1}^{N} B_n^i$ (некоторые B_n^i могут равняться 1 — этому соответствует случай $\sigma_i = \varnothing$). Разобьем точно также произведения B_n при всех n (полагая e^i одинаковыми для всех n).

Отметим, что из условий (13.1) и (13.2) следует, что если λ — корень B_n^i, то

$$\|\Theta_n^*(\lambda) e^i\| < 2\varepsilon. \tag{13.3}$$

13.1. Лемма. *Если для всех i, $1 \leqslant i \leqslant N$,*

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |B_n^i(\lambda)|^2) < \infty, \tag{13.4}$$

то

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |B_n(\lambda)|^2) < \infty.$$

Доказательство. Эта лемма допускает и простое геометрическое доказательство (на языке теорем вложения), но мы воспользуемся следующим простым неравенством:

$$1 - \alpha_1\alpha_2 = \alpha_2(1 - \alpha_1) + (1 - \alpha_2) \leqslant (1 - \alpha_1) + (1 - \alpha_2),$$

верным для $0 \leqslant \alpha_1, \alpha_2 \leqslant 1$. Отсюда по индукции получаем

$$1 - \alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_N \leqslant (1 - \alpha_1) + (1 - \alpha_2) + \cdots + (1 - \alpha_N)$$

при $0 \leqslant \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N \leqslant 1$, что и доказывает лемму. ●

Итак, мы свели доказательство теоремы к проверке условия (13.4), т. е. к разбору «почти скалярного» случая. Теорема вытекает из следующей основной леммы.

§ 14. Основная лемма

Лемма. *Пусть заданы: равномерно минимальное семейство подпространств K_{Θ_n} в $H^2(E)$, δ — его константа равномерной минимальности; семейство интерполяционных произведений Бляшке B_n таких, что мера неортогональности каждого семейства векторов $\{\varphi_\lambda : \lambda \in B_n^{-1}(0)\}$ ($B_n^{-1}(0)$ — нули B_n) не превосходит C; число ε такое, что*

$$C \cdot \mathrm{CV}(\delta/2) \cdot \varepsilon < \frac{\delta}{10}$$

(CV — *из теоремы* 11.1). *Пусть, кроме того, существует вектор $e \in E$, $\|e\| = 1$ такой, что*

$$\|\Theta_n(\lambda)^* e\| < 2\varepsilon \quad \forall \lambda \in B_n^{-1}(0), \ \forall n.$$

Тогда семейство подпространств K_{B_n} будет равномерно минимальным, причем константа равномерной минимальности этого семейства будет не меньше $\delta/2$.

Теорема следует из этой леммы, поскольку равномерная минимальность семейства K_{B_n} равносильна условию Карлесона—Васюнина (CV), а значит (см. п. 6.2), $\sup\limits_{\lambda\in\mathbb{D}} \sum(1-|B_n(\lambda)|^2)<\infty$.

Эта лемма по существу есть просто модификация основной леммы из работы автора [10]. Идея ее доказательства очень проста. Мы предположим, что константа равномерной минимальности семейства K_{B_n} меньше, чем $\delta/2$, и, значит, для некоторого вектора $f_n \in K_{B_n}$ $\|f_n\|=1$ и $f_k \in K_{B_k}$, $\|f_n-\sum\limits_{k\neq n} f_k\|<\delta/2$. Используя эту аппроксимацию и тот факт, что подпространства $K_{B_n}\cdot e$ близки к подпространствам K_{Θ_n}, мы получим аналогичную аппроксимацию

$$\left\|\tilde{f}_n-\sum_{k\neq n}\tilde{f}_k\right\|<\delta,\quad \tilde{f}_k\in K_{\Theta_k},\quad \|\tilde{f}_n\|=1,$$

которая будет противоречить тому, что константа равномерной минимальности семейства подпространств K_{Θ_n} равна δ. Основная хитрость здесь в том, что для аппроксимации надо взять не слишком много слагаемых $\tilde{f}_k$ с тем, чтобы суммарная ошибка, вызванная отклонением от скалярного случая, не испортила более чем на $\delta/2$ полученную для этого случая оценку. Количественно это «не слишком много» выражается следующей леммой (см. аналог в [10]).

Здесь и далее $\delta(\{\mathscr{E}_n\})$ — константа равномерной минимальности семейства подпространств $\{\mathscr{E}_n\}$.

14.1. Лемма. *Пусть $\delta(\{\mathscr{E}_n\})<\delta<1$.*[4] *Найдется такое конечное подмножество индексов $\mathscr{N}$, что*

$$\delta\left(\{\mathscr{E}_n\}_{n\in\mathscr{N}}\right)<\delta, \tag{14.1}$$

но

$$\delta\left(\{\mathscr{E}_n\}_{n\in\mathscr{N}\setminus\{k\}}\right)\geqslant\delta \tag{14.2}$$

для любого номера $k\in\mathscr{N}$.

Доказательство. Выберем конечное множество $\mathscr{N}$, удовлетворяющее (14.1) (такой выбор возможен, поскольку $\delta(\{\mathscr{E}_n\})<\delta$). Если $\mathscr{N}$ удовлетворяет условию (14.2), то лемма доказана. В противном случае удалим из множества $\mathscr{N}$ номер k, для которого $\delta\left(\{\mathscr{E}_n\}_{n\in\mathscr{N}\setminus\{k\}}\right)<\delta$, опять проверим выполнение условия (14.2) и т. д. Очевидно, что в конце концов мы получим искомое множество $\mathscr{N}$, так как для одноточечного множества $\mathscr{N}$ $\delta\left(\{\mathscr{E}_n\}_{n\in\mathscr{N}}\right)=1$.

14.2. Доказательство основной леммы. Допустим, что лемма неверна и $\delta\left(\{K_{B_n}\}\right)<\delta/_2$. Применим к семейству подпространств $\{K_{B_n}\}$ лемму 14.1 с константой $\delta/2$. Получим конечное множество индексов $\mathscr{N}$ такое, что

$$\delta\left(\{K_{B_k}\}_{k\in\mathscr{N}}\right)<\delta/2, \tag{14.3}$$

$$\delta\left(\{K_{B_k}\}_{k\in\mathscr{N}\setminus\{n\}}\right)\geqslant\delta/2\quad\forall n\in\mathscr{N}. \tag{14.4}$$

[4] Мы полагаем, что $\delta(\{\mathscr{E}_n\})=0$, если семейство подпространств $\mathscr{E}_n$ не является равномерно минимальным.

В силу условия (14.3) некоторый вектор $f_n \in K_{B_n}$, $\|f_n\| = 1$ $(n \in \mathcal{N})$ можно приблизить вектором f^n вида

$$f^n = \sum_{k \in \mathcal{N} \setminus \{n\}} f_k, \quad f_k \in K_{B_k},$$

так, чтобы

$$\|f_n - f^n\| < \delta/2.$$

Пусть σ_k — множество нулей произведения Бляшке B_k. Тогда $f_k \in K_{B_k}$ можно представить в виде

$$f_k = \sum_{\lambda \in \sigma_k} c_\lambda \varphi_\lambda, \quad \varphi_\lambda = (1 - |\lambda|^2)^{1/2}/(1 - \bar{\lambda} z).$$

По условию леммы система векторов $\{\varphi_\lambda^k\}_{\lambda \in \sigma_k}$ образует безусловный базис в K_{B_k} с мерой неортогональности не более чем C. Семейство же подпространств $\{K_{B_k}\}_{k \in \mathcal{N} \setminus \{n\}}$ образует в силу условия (14.4) (см. теорему 11.1) безусловный базис в своей линейной оболочке с мерой неортогональности не больше, чем CV $(\delta/2)$. Поэтому семейство векторов $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \sigma}$, $\sigma = \bigcup_{k \in \mathcal{N} \setminus \{n\}} \sigma_k$ образует безусловный базис в span $(K_{B_k} : k \in \mathcal{N} \setminus \{n\})$, причем

$$\|\mathcal{F}\| \cdot \|\mathcal{F}^{-1}\| \leqslant C \cdot \mathrm{CV}\,(\delta/2); \tag{14.5}$$

здесь $\mathcal{F}$ — ортогонализатор этого семейства.

Пусть $f_k = \sum_{\lambda \in \sigma_k} c_\lambda^k \varphi_\lambda$, $k \in \mathcal{N}$ — разложения векторов f_k по базисам $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \sigma_k}$. Тогда

$$f^n = \sum_{\lambda \in \sigma} c_\lambda \varphi_\lambda.$$[5]

Пусть $K_{\Theta^n} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{span}\,(K_{\Theta_k} : k \in \mathcal{N} \setminus \{n\})$. Положим

$$\tilde{f}_n = P_{K_{\Theta_n}} f_n e, \qquad \tilde{f}^n = P_{K_{\Theta_n}} f^n e,$$

здесь e — вектор из формулировки леммы. По неравенству треугольника

$$\|\tilde{f}_n - \tilde{f}^n\| \leqslant \|\tilde{f}_n - f_n e\| + \|\tilde{f}_n - f^n e\| + \|f_n e - f_n e\|.$$

Последнее слагаемое равно

$$\|f_n - f^n\| < \delta/2.$$

Первые два слагаемых также легко оцениваются. Оценим, например, второе:

$$\|\tilde{f}^n - f^n e\| = \|P_{\Theta^n H^2(E)} f^n e\| = \left\| P_+ \Theta^{n*} \sum_{\lambda \in \sigma} c_\lambda \varphi_\lambda e \right\| = \left\| \sum_{\lambda \in \sigma} c_\lambda \varphi_\lambda \Theta^n(\lambda)^* e \right\|.$$

Так как по условию леммы при $\lambda \in \sigma_k$

$$\|\Theta_k(\lambda)^* e\| < 2\varepsilon$$

и

$$\|\Theta^*(\lambda) e\| = \mathrm{dist}\,(\varphi_\lambda e, K_\Theta),$$

то

$$\|\Theta^n(\lambda)^* e\| < 2\varepsilon \qquad \forall \lambda \in \sigma.$$

---

[5] Так как семейство подпространств $\{K_{B_k}\}_{k \in \mathcal{N} \setminus \{n\}}$ образует безусловный базис, то множества нулей σ_k не пересекаются, и индекс k у c_λ^k мы будем опускать.

Поэтому, см. лемму 14.3 ниже и (14.5)

$$\|\tilde f_n - f_n e\| \leqslant 2\varepsilon \|\mathcal{Y}\|\cdot\|\mathcal{Y}^{-1}\| \leqslant 2\varepsilon\cdot C\cdot \mathrm{CV}(\delta/2) \leqslant \delta/5,$$

здесь $\mathcal{Y}$ — ортогонализатор семейства векторов $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\sigma}$; последнее неравенство верно ввиду выбора ε. Аналогично можно оценить

$$\|\tilde f_n - f_n e\| \leqslant 2\varepsilon\cdot C \leqslant 2\varepsilon\cdot C\cdot \mathrm{CV}(\delta/2) \leqslant \delta/5$$

(среднее неравенство верно, так как мера неортогональности всегда не меньше 1). Собирая вместе оценки всех трех слагаемых, имеем

$$\|\tilde f_n - \tilde f^n\| < \frac{9}{10}\delta,$$

$$\|\tilde f_n\| = (1 - \|\tilde f_n - f_n e\|^2)^{1/2} \geqslant \left(1 - \left(\frac{\delta}{5}\right)^2\right)^{1/2} > \sqrt{\frac{24}{25}} > \frac{9}{10},$$

и поэтому

$$\left\| \frac{\tilde f_n}{\|\tilde f_n\|} - \frac{1}{\|\tilde f_n\|}\tilde f^n \right\| < \delta,$$

что противоречит определению δ, поскольку $\tilde f_n \in K_{\Theta_n}$, $\tilde f^n \in$ $\in \operatorname{span}(K_{\Theta_k} : k \neq n)$. ●

Приведем лемму, которую мы использовали для оценки $\|\tilde f^n - f^n e\|$, и тем самым завершим доказательство.

14.3. Лемма. *Пусть множество σ таково, что семейство векторов $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\sigma}$ образует базис Рисса. Пусть $\mathcal{Y}$ — ортогонализатор этого семейства, $f \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{\lambda\in\sigma} c_\lambda\varphi_\lambda$ и $\tilde f = \sum_{\lambda\in\sigma} c_\lambda\varphi_\lambda e_\lambda$, $e_\lambda \in E$, $\|e_\lambda\| \leqslant \varepsilon$ (c_λ для f и $\tilde f$ одинаковые). Тогда*

$$\|\tilde f\| \leqslant \|\mathcal{Y}\|\cdot\|\mathcal{Y}^{-1}\|\cdot\varepsilon\cdot\|f\|.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что поскольку ортогонализатор $\mathcal{Y}$ переводит семейство $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\sigma}$ в ортонормированное, то

$$\sum_\lambda |c_\lambda|^2 = \|\mathcal{Y} f\|^2 \leqslant \|\mathcal{Y}\|^2\cdot\|f\|^2.$$

Пусть h_k — какой-нибудь ортонормированный базис в E. Тогда

$$\|\tilde f\|^2_{H^2(E)} = \sum_k \|(\tilde f, h_k)_E\|^2_{H^2} = \sum_k \Big\| \sum_{\lambda\in\sigma} c_\lambda (e_\lambda, h_k)\varphi_\lambda \Big\|^2_{H^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k \|\mathcal{Y}^{-1}\|^2 \sum_{\lambda\in\sigma} |c_\lambda|^2 |(e_\lambda, h_k)|^2 = \|\mathcal{Y}^{-1}\|^2 \sum_{\lambda\in\sigma} |c_\lambda|^2 \|e_\lambda\|^2 \leqslant \varepsilon^2 \|\mathcal{Y}\|^2 \|\mathcal{Y}^{-1}\|^2 \|f\|^2. \quad ●$$

§ 15. Анализ векторного условия Карлесона—Васюнина

Настоящий параграф посвящен анализу условия (8.3), которое в случае $\dim E < \infty$ равносильно равномерной минимальности семейства K_{Θ_n}, а значит, в силу только что доказанной теоремы 9.1 и безусловной базисности этого семейства. Условие (8.3) может рассматриваться как векторный аналог условия Карлесона—Васюнина (CV). Мы постараемся выразить это условие в более удобных, аддитивных терминах.

15.1. Лемма. *Пусть семейство подпространств K_{Θ_n} из $H^2(E)$, $\dim E = d < \infty$ равномерно минимально с константой равномерной ми-*

нимальности δ, *и пусть* $0<\varepsilon<\delta^2/6d$. *Тогда для всякой точки* $\lambda \in \mathbb{D}$ *векторы* $e_n \in E$, $\|e_n\|=1$, *для которых*

$$\|\Theta_n^*(\lambda)e_n\|<\varepsilon,$$

образуют равномерно минимальную систему, [6] *с константой равномерной минимальности не меньше, чем* $\delta/2$.

Доказательство. Пусть лемма неверна и константа равномерной минимальности семейства векторов $\{e_n\}$ из леммы меньше $\delta/2$. Применим лемму 14.1 и получим конечное подсемейство этого семейства $\{e_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ такое, что

$$\delta\left(\{e_k\}_{k\in\mathcal{N}}\right)<\delta/2, \tag{15.1}$$

$$\delta\left(\{e_k\}_{k\in\mathcal{N}\setminus\{n\}}\right)\geqslant\delta/2 \qquad \forall\, n\in\mathcal{N}. \tag{15.2}$$

Отметим, что $\operatorname{card}\mathcal{N}\leqslant d+1$. В силу условия (15.1) найдутся номер $n\in\mathcal{N}$ и числа c_k такие, что

$$\Big\|e_n-\sum_{k\in\mathcal{N}\setminus\{n\}}c_ke_k\Big\|<\delta/2.$$

Обозначим $f=\sum_{k\in\mathcal{N}\setminus\{n\}}c_ke_k$. В силу (15.2)

$$|c_k|\leqslant\|f\|/\delta\leqslant\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\Big/\delta\leqslant\frac{3}{2\delta}.$$

Положим $\tilde e_n=P_{K_{\Theta_n}}\varphi_\lambda e_n$, $\tilde f=P_{K_\Theta}f$, $K_\Theta\overset{\mathrm{def}}{=}\operatorname{span}\left(K_{\Theta_k}:k\in\mathcal{N}\setminus\{n\}\right)$. По неравенству треугольника

$$\|\tilde e_n-\tilde f\|\leqslant\|\tilde e_n-\varphi_\lambda e_n\|+\|\tilde f-\varphi_\lambda f\|+\|e_n-f\|.$$

Но $\|e_n-f\|<\delta/2$. Оценим оставшиеся слагаемые.

$$\|\tilde f-\varphi_\lambda f\|=\|P_{\Theta H^2(E)}\varphi_\lambda f\|=\|P+\Theta^*\varphi_\lambda f\|=\|\varphi_\lambda\Theta^*(\lambda)f\|=\|\Theta^*(\lambda)f\|.$$

Так как $\|\Theta_k^*(\lambda)e_k\|<\varepsilon$ и $\|\Theta^*(\lambda)e\|=\operatorname{dist}(\varphi_\lambda e,K_\Theta)$, то $\|\Theta^*(\lambda)e_k\|<\varepsilon$, и поэтому

$$\|\Theta^*(\lambda)f\|\leqslant\sum_{k\in\mathcal{N}\setminus\{n\}}|c_k|\cdot\varepsilon<\frac{3}{2\delta}\cdot d\cdot\varepsilon<\frac{\delta}{4}.$$

Аналогично получим

$$\|\tilde e_n-\varphi_\lambda e_n\|<\varepsilon<\frac{\delta}{6}.$$

Итого $\|\tilde e_n-\tilde f\|<\frac{11}{12}\delta$. Так как $\|\tilde e_n\|=(1-\|\tilde e_n-\varphi_\lambda e_n\|^2)^{1/2}\geqslant\left(1-\left(\frac{\delta}{6}\right)^2\right)^{1/2}\geqslant\left(\frac{35}{36}\right)^{1/2}>\frac{11}{12}$,

то

$$\left\|\frac{\tilde e_n}{\|\tilde e_n\|}-\frac{\tilde f_n}{\|\tilde e_n\|}\right\|<\delta,$$

что противоречит определению δ, поскольку $\tilde e_n\in K_{\Theta_n}$, $\tilde f\in\operatorname{span}\left(K_{\Theta_k}:k\neq n\right)$. ●

Как видно из доказательства, эту лемму можно считать «пространственным» аналогом основной леммы 14 (в отличие от нее в лемме 15.1 «спектральная» часть φ_λ фиксированна и меняется «пространственная»

---

[6] Очевидно, что таких векторов может быть не более чем d штук.

часть — векторы e_n). Доказательство же обеих лемм в принципе однотипно.

15.2. Лемма. *Пусть* $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ — *упорядоченный набор внутренних функций*, $\Theta_k \in H^\infty\ (E_k \to E)$, *и пусть* $K_\Theta = \operatorname{span}(K_{\Theta_k}, k = 1, \ldots, n)$, $\Theta \in H^\infty(E_* \to E)$. *Тогда* Θ *допускает представление*

$$\Theta = \Theta_1 \widetilde{\Theta}_2 \widetilde{\Theta}_3 \ldots \widetilde{\Theta}_n,$$

здесь $\widetilde{\Theta}_k$ — *внутренние оператор-функции, для которых произведение имеет смысл, и такие, что минимальный аннулятор* m_{Θ_k} *функции* Θ_k *является аннулятором* $\widetilde{\Theta}_k$.

Доказательство. Положим

$$K_{\widetilde{\Theta}_2} = P_+ \Theta_1^* K_{\Theta_2}.$$

Очевидно, что

$$P_+ \bar{m}_{\Theta_2} K_{\widetilde{\Theta}_2} = P_+ \bar{m}_{\Theta_2} \Theta_1^* K_{\Theta_2} = P_+ \Theta_1^* P_+ \bar{m}_{\Theta_2} K_{\Theta_2} + \{\mathbb{0}\}.$$

Положим

$$K_{\widetilde{\Theta}_3} = P_+ \widetilde{\Theta}_2^* \Theta_1^* K_{\Theta_3},$$

$$K_{\widetilde{\Theta}_4} = P_+ \widetilde{\Theta}_3^* \widetilde{\Theta}_2^* \Theta_1^* K_{\Theta_4}$$

и т. д. ...

Утверждение про аннуляторы проверяется аналогично. ●

Следующая лемма дает нам «аддитивную» версию векторного условия Карлесона—Васюнина и сводит задачу к описанию конечных (не более чем из $d = \dim E$ элементов) равномерно минимальных семейств подпространств K_{Θ_n}.

15.3. Лемма. *Семейство подпространств* $K_{\Theta_n} bH^2(E)$, $\dim E = d < \infty$, *равномерно минимально в том и только том случае, когда*

1. $\sup\limits_{\lambda \in \mathbb{D}} \sum\limits_n (1 - |\det \Theta_n(\lambda)|^2) < \infty.$

2. *Существуют такие* $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, *что для любой точки* $\lambda \in \mathbb{D}$ *неравенство* $|\det \Theta_n(\lambda)| < \varepsilon$ *выполняется не более чем для* d *номеров, и соответствующие подпространства* K_{Θ_n} *образуют (конечную) равномерно минимальную систему с равномерной минимальностью не меньше, чем* δ.

Замечание. Мы полагаем, что $\det \Theta_n = 0$, если Θ_n не является двусторонней внутренней, и считаем, что $\Theta_n \in H^\infty\ (E \to E)$ в противном случае.

Доказательство леммы. Необходимость условия следует из доказательства теоремы (9.1); в ней как раз и доказывалось, что равномерная минимальность K_{Θ_n} влечет такое условие. Правда, там мы разбирали случай, когда все Θ_n — двусторонние внутренние функции. Однако, очевидно, что, конечно, число (не более чем d, см. п. 9.2) функций, не являющихся двусторонне внутренними, не испортят неравенство 1. Необходимость условия 2 следует из леммы 15.1.

Проверим достаточность. Мы будем доказывать лемму для конечного (сколь угодно большого) числа функций Θ_n; общий случай получится отсюда предельным переходом. Нам надо доказать, что

$$\inf_{\substack{\lambda \in \mathbb{D} \\ e \in E,\ \|e\| = 1}} (\|\Theta_n(\lambda)^* e\| + \|\Theta^n(\lambda^*) e\|) \geqslant \varepsilon' > 0. \qquad (15.3)$$

Выберем $\lambda \in \mathbb{D}$. Пусть $\| \theta_n^* (\lambda) e \| < \varepsilon$, $\|e\| = 1$. Очевидно, что тогда $| \det \Theta_n (\lambda) | < \varepsilon$. Возьмем остальные функции Θ_k, для которых $| \det \Theta_k (\lambda) | < \varepsilon$, и пусть

$$K_{\Theta_{\varepsilon, \lambda}} \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname{span} (K_{\Theta_k} : | \det \Theta_k (\lambda) | < \varepsilon, \quad k \neq n).$$

В силу условия 2

$$\| \Theta_n^* (\lambda) e \| + \| \Theta_{\varepsilon, \lambda}^* (\lambda) e \| \geqslant \delta.$$

Согласно лемме 15.2, факторизуем оператор-функцию Θ^n, $K_{\Theta^n} \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname{span} (K_{\Theta_k} : k \neq n)$:

$$\Theta^n = \Theta_{\varepsilon, \lambda} \cdot \overleftarrow{\prod_{k : | \det \Theta_k (\lambda) | > \varepsilon}} \widetilde{\Theta}_k = \Theta_{\varepsilon, \lambda} \cdot \Theta^{\varepsilon, \lambda},$$

здесь мы считаем функции $\widetilde{\Theta}_k$ каким-нибудь (безразлично каким) образом упорядоченными. Покажем, что сомножитель $\Theta^{\varepsilon, \lambda}$ достаточно велик. Так как минимальный аннулятор m_{Θ_k} аннулирует $\widetilde{\Theta}_k$, то (см. (8.5)) внутренняя функция

$$\varphi \overset{\mathrm{def}}{=} \prod_{k : | \det \Theta_k (\lambda) | > \varepsilon} \det \Theta_k$$

является аннулятором для $\Theta^{\varepsilon, \lambda}$. В силу неравенства (8.5)

$$\inf_{e \in E, \| e \| = 1} \| \Theta^{\varepsilon, \lambda} (\lambda)^* e \| > \varphi (\lambda).$$

Но из условия 1 леммы следует, что

$$\inf_{\lambda} \prod_{k : | \det \Theta_k (\lambda) | \geqslant \varepsilon} | \det \Theta_k (\lambda) | \overset{\mathrm{def}}{=} \alpha > 0,$$

и, значит,

$$\| \Theta^{\varepsilon, \lambda} (\lambda)^* e \| \geqslant \alpha \| e \| \qquad \forall e \in E.$$

Поэтому для $\varepsilon < \delta$ и e, $\| e \| = 1$ таких, что $\| \Theta_n (\lambda)^* e \| = \varepsilon$, выполнено неравенство

$$\| \Theta_n (\lambda)^* e \| + \| \Theta^n (\lambda)^* e \| \geqslant \alpha \delta \geqslant \alpha \varepsilon.$$

Переходя к infimum'у по n, λ, e, получаем (15.3), с $\varepsilon' = \alpha \varepsilon$. ●

Перейдем к описанию конечных (не более чем из $d = \dim E$ элементов) равномерно минимальных семейств коинвариантных подпространств K_{Θ_n}. Лемма 15.1 дает нам необходимое условие равномерной минимальности для такого семейства. Следующая лемма показывает, что оно является и достаточным.

15.4. Л е м м а. *Пусть семейство подпространств* $\{K_{\Theta_k}\}_{k=1}^n$, $n \leqslant d = \dim E < \infty$ *и числа* ε, δ, $0 < \varepsilon, \delta < 1$ *таковы, что для любой точки* $\lambda \in \mathbb{D}$ *любая система векторов* e_k, $\| e_k \| = 1$ *(не обязательно состоящая ровно из* n *элементов), для которых* $\| \Theta_k (\lambda)^* e_k \| < \varepsilon$, *является равномерно минимальной с константой равномерной минимальности, не меньше* δ.

Тогда система подпространств K_{Θ_n} *является равномерно минимальной с константой равномерной минимальности не менее чем* $\alpha = \alpha (d, n, \varepsilon, \delta)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится индукцией по n. База индукции ($n = 1$) очевидна. (Просто разбирается и случай $n = 2$, см. теорему 8.2).

Пусть теперь лемма доказана для всех семейств, состоящих менее чем из n подпространств. Покажем тогда, что для семейства $\{K_{\Theta_k}\}_{k=1}^n$

$$\inf_k \inf_{\substack{\lambda\in\mathbb{D},\, e\in E\\ \|e\|=1}} (\|\Theta_k(\lambda)^* e\| + \|\Theta^k(\lambda)^* e\|) \geqslant \delta' = \frac{\varepsilon\cdot\delta\cdot\alpha(d,\ n-1,\ \varepsilon,\ \delta)}{4d},$$

и тем самым докажем лемму. Допустим противное. Тогда для некоторой точки $\lambda\in\mathbb{D}$ вектора $e\in E$, $\|e\|=1$, и номера k

$$\|\Theta_k(\lambda)^* e\| + \|\Theta^k(\lambda)^* e\| < \delta',$$

а значит, и оба слагаемых должны быть меньше, чем δ'.

Положим $f_k = P_{K_{\Theta_k}}\varphi_\lambda e$, $f^k = P_{K_{\Theta^k}}\varphi_\lambda e$, и пусть

$$f^k = \sum_{j\neq k} f_j, \qquad f_j \in K_{\Theta_j}$$

— разложение вектора f^k по базису $\{K_{\Theta_j}\}_{j\neq k}$. Покажем, что каждый вектор f_j близок к некоторому вектору вида $\varphi_\lambda e_j$, $e_j\in E$. Действительно $f_j = \mathscr{P}_j f^k$, где $\mathscr{P}_j$ — косой проектор на K_{Θ_j} параллельно span $\{K_{\Theta_i} : i\neq k, j\}$. По индукционному предположению

$$\|\mathscr{P}_j\| \leqslant \frac{1}{\delta(d,\ n-1,\ \varepsilon,\ \delta)} \qquad \forall j\neq k.$$

Кроме того, согласно теореме 8.2, оператор $\mathscr{P}_j$ имеет вид

$$\mathscr{P}_j = P_+ F_j^* \,|\, K_{\Theta^k},$$

где F_j — некоторая функция из $H^\infty(E\to E)$, причем ее можно выбрать так, чтобы $\|F_j\|_\infty = \|\mathscr{P}_j\|$. Положим $e_j = F_j(\lambda)^* e$. Так как

$$P_+F_j^*\varphi_\lambda e = \varphi_\lambda F_j(\lambda)^* e = \varphi_\lambda e_j,$$

а

$$f_j = \mathscr{P}_j f^k = P_+F_j^* f^k,$$

то, учитывая, что $\|\varphi_\lambda e - f^k\| < \delta'$ (так как $\|\Theta^k(\lambda)^* e\| < \delta'$), имеем $\|\varphi_\lambda e_j - f_j\| \leqslant \|\mathscr{P}_j\|\cdot\delta' \leqslant \frac{\varepsilon\delta}{4d}$.

Обозначим $r_j = f_j - \varphi_\lambda e_j$ и оценим

$$\Big\|\varphi_\lambda e - \sum_{j\neq k} f_j\Big\| \geqslant \Big\|\varphi_\lambda e - \sum_{j\neq k}\varphi_\lambda e_j\Big\| - \sum_{j\neq k}\|r_j\|.$$

Очевидно, что $\sum_{j\neq k}\|r_j\| \leqslant \frac{\varepsilon\delta}{4}$. Оценим первое слагаемое. Для этого положим

$$\mathscr{N} = \left\{ j : j\neq k,\ \|e_j\| > \frac{\delta}{4d} \right\},$$

$$\mathscr{N}' = \left\{ j : j\neq k,\ \|e_j\| \leqslant \frac{\delta}{4d} \right\}.$$

Для любого номера $j\in\mathscr{N}$

$$\|\Theta_j(\lambda)^* e_j\| = \operatorname{dist}(\varphi_\lambda e_j,\ K_{\Theta_j}) \leqslant \|\varphi_\lambda e_j - f_j\| \leqslant \frac{\varepsilon\delta}{4d} < \varepsilon\|e_j\|.$$

Кроме того,

$$\|\Theta_k(\lambda)^* e\| < \varepsilon = \varepsilon\|e\|.$$

Следовательно, согласно условию леммы, семейство векторов $e \cup \{e_j\}_{j \in \mathcal{N}}$ будет равномерно минимальным с константой равномерной минимальности не менее чем δ. Тогда

$$\left\| \varphi_\lambda e - \sum_{j \neq k} \varphi_\lambda e_j \right\| = \left\| e - \sum_{j \neq k} e_j \right\| \geqslant \left\| e - \sum_{j \in \mathcal{N}} e_j \right\| -$$

$$- \sum_{j \in \mathcal{N}'} \|e_j\| \geqslant \delta - \frac{\delta}{4d} \cdot \operatorname{card} \mathcal{N}' > \frac{3}{4} \delta.$$

В итоге получаем

$$\|\Theta^k(\lambda)^* e\| = \left\| \varphi_\lambda e - \sum_{j \neq k} f_j \right\| > \delta/2,$$

что противоречит условию $\|\Theta^k(\lambda)^* e\| < \alpha$.

Условие леммы 15.4 кажется несколько громоздким и непривычным. Поэтому представляется полезной следующая лемма, описывающая это условие в более традиционных терминах.

15.5. Лемма. *Пусть операторы $A_1, \ldots, A_n$ таковы, что для некоторых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ выполнено условие:*

$$\left.\begin{array}{c}\textit{любой набор векторов } e_k,\ \|e_k\| = 1 \textit{ таких, что } \|A_k e_k\| < \varepsilon \\ \textit{будет равномерно минимальным, с константой равномерной} \\ \textit{минимальности не менее чем } \delta.\end{array}\right\} \quad (15.4)$$

Тогда оператор A

$$A = \begin{pmatrix} I & I & \ldots & I \\ A_1 & \mathbb{O} & \ldots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & A_2 & \ldots & \mathbb{O} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \ldots & A_n \end{pmatrix} \qquad (15.5)$$

обратим слева, причем $\|Ae\| \geqslant \alpha \|e\| \ \forall e$, где $\alpha = \dfrac{\varepsilon\delta}{((\sqrt{n} + \varepsilon)^2 n + \delta^2)^{1/2}}$.

Обратно, если $\|Ae\| \geqslant \alpha \|e\| \ \forall e$, то выполнено условие (15.4) с $\delta = \varepsilon = \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}$.

Доказательство. Пусть выполнено условие (15.5). Выберем вектор $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{pmatrix}$, $\|e\|^2 = \|e_1\|^2 + \ldots + \|e_n\|^2 = 1$, и пусть $e_0 = \sum_{k=1}^{n} e_k$.

Тогда

$$\|Ae\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|A_k e_k\|^2 + \|e_0\|^2.$$

Положим

$$\mathcal{N} = \{k : \|A_k e_k\| < \varepsilon \|e_k\|\}, \qquad \mathcal{N}' = \{1, \ldots, n\} \setminus \mathcal{N}.$$

По условию (15.4) семейство векторов $\{e_k\}_{k\in\mathcal{N}}$ равномерно минимально, поэтому если таких векторов «много», т. е. если

$$\sum_{k\in\mathcal{N}}\|e_k\|^2\geqslant\gamma^2=\frac{(\sqrt{n}+\varepsilon)^2 n}{(\sqrt{n}+\varepsilon)^2 n+\delta^2},$$

то

$$\|e_\bullet\|\geqslant\delta\left(\max_{k\in\mathcal{N}}\|e_k\|\right)-\sum_{k\in\mathcal{N}'}\|e_k\|\geqslant\left(\sum_{k\in\mathcal{N}}\|e_k\|^2/n\right)^{1/2}\cdot\delta-\sqrt{1-\gamma^2}\cdot\sqrt{n}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\gamma\delta}{\sqrt{n}}-\sqrt{1-\gamma^2}\sqrt{n}=\alpha.$$

Если же таких векторов «мало», т. е.

$$\sum_{k\in\mathcal{N}}\|e_k\|^2<\frac{(\sqrt{n}+\varepsilon)^2 n}{(\sqrt{n}+\varepsilon)^2 n+\delta^2},$$

то

$$\|Ae\|^2\geqslant\sum_{k\in\mathcal{N}'}\|A_k e_k\|^2\geqslant\varepsilon^2\sum_{k\in\mathcal{N}'}\|e_k\|^2\geqslant\varepsilon^2\frac{\delta^2}{(\sqrt{n}+\varepsilon)^2+\delta^2}=\alpha^2.$$

Значит, в обоих случаях $\|Ae\|\geqslant\alpha$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь оператор A обратим слева, $\|Ae\|\geqslant\alpha\|e\|$, $\forall e$. Допустим, что существует набор векторов $\{e_k\}_{k\in\mathcal{N}}$, $\|e_k\|=1$ такой, что

$$\|Ae_k\|<\varepsilon=\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\qquad\forall\,k\in\mathcal{N},$$

но $\delta\left(\{e_k\}_{k\in\mathcal{N}}\right)<\delta=\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$. Тогда для некоторого k найдутся числа c_j такие, что $\left\|\sum_{j\in\mathcal{N}}c_je_j\right\|<\delta$; здесь $c_k=1$. Возьмем вектор $e=\begin{pmatrix}c_1e_1\\ \cdots\\ c_ne_n\end{pmatrix}$, и положим $e_0=\sum_{j\in\mathcal{N}}c_je_j$. Тогда

$$\|Ae\|^2=\sum_{j\in\mathcal{N}}\|A_je_j\|^2|c_j|^2+\|e_0\|^2.$$

Первое слагаемое меньше, чем $\varepsilon^2\cdot\sum_{j\in\mathcal{N}}\|c_je_j\|^2=\varepsilon^2\|e\|^2$. Следовательно, так как $\|e_0\|<\delta$, $\|e\|\geqslant 1$, то

$$\|Ae\|^2\leqslant\varepsilon^2\|e\|^2+\|e_0\|^2<\varepsilon^2\|e\|^2+\delta^2\leqslant(\varepsilon^2+\delta^2)\|e\|^2=\alpha^2\|e\|^2,$$

что противоречит $\|Ae\|\geqslant\varepsilon\|e\|$. ●

Теперь мы можем получить следующую «аддитивную» переформулировку векторного условия Карлесона—Васюнина

15.6. Теорема. *Семейство подпространств K_{Θ_n} в $H^2(E)$, $\dim E=d<\infty$ равномерно минимально, а значит, образует базис Рисса в том и только том случае, когда выполнены следующие два условия.*

1. $\sup\limits_{\lambda\in\mathbb{D}}\sum\limits_n(1-|\det\Theta_n(\lambda)|^2)<\infty$.

2. *Существуют* $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $\alpha > 0$ *такие, что в любой точке* $\lambda \in \mathbb{D}$ *неравенство* $|\det \Theta_n(\lambda)| < \varepsilon$ *выполняется не более чем для* d *номеров* $n = n_1, n_2, .., n_k$, $k \leqslant d$, *и для операторов* $A = A_\lambda$.

$$A = \begin{pmatrix} I & I & \dots & I \\ \Theta_{n_1}(\lambda)^* & \mathbb{O} & \dots & I \\ \mathbb{O} & \Theta_{n_2}(\lambda)^* & \dots & I \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \Theta_{n_k}(\lambda)^* \end{pmatrix}$$

(*в каждой точке* λ *свои номера* $n_j = n_j^\lambda$) *верна оценка*

$$\|A_\lambda e\| \geqslant \alpha \|e\| \quad \forall e.$$

Доказательство теоремы очевидно из сопоставления лемм 15.1, 15.3—15.5. ●

Список литературы

[1] *Carleson L.* An interpolation problem for bounded analytic functions//Amer. J. Math. *1958*. Vol. 80, N 4. P. 921—930.

[2] *Кацнельсон В. Э.* Об условиях базисности системы корневых векторов некоторых классов операторов//Функцион. анализ и его прил. *1967*. Т. 1, № 2. С. 39—51.

[3] *Никольский Н. К., Павлов Б. С.* Разложения по собственным векторам неунитарных операторов и характеристическая функция//Зап. научн. семинаров ЛОМИ. *1968*. Т. 11. С. 150—203.

[4] *Никольский Н. К.* Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, *1980*.

[5] *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, *1984*.

[6] *Васюнин В. И.* Безусловно сходящиеся спектральные разложения и задачи интерполяции//Труды МИАН СССР. *1978*. Т. 130. С. 5—49.

[7] *Никольский Н. К.* Базисы из инвариантных подпространств и операторная интерполяция//Труды МИАН СССР. *1978*. Т. 130. С. 50—123.

[8] *Nikol'skii N. K.* Interpolation libre dans l'espace de Hardy//C. R. Acad. Sci. Paris. Ser 1. *1987*. Vol. 304, N 15. P. 451—454.

[9] *Никольский Н. К., Хрущев С. В.* Функциональная модель и некоторые задачи спектральной теории функций//Труды МИАН СССР. *1987*. Т. 176. С. 97—209.

[10] *Треиль С. Р.* Пространственно компактная система собственных векторов образует базис Рисса, если она равномерно минимальна//ДАН СССР. *1986*. Т. 288, № 2. С. 308—312.

[11] *Bourgain J.* On finitely generated closed ideals in $H^\infty(\mathbb{D})$//An. Inst. Fourier, Grenoble. *1985*. Vol. 35, N 4. P. 163—174.

[12] *Bonsall F. F.* Boundedness of Hankel matrices//J. London Math. Soc. *1984*. Vol. 29, part 2. P. 289—300.

[13] *Power S. C.* Hankel operators on Hilbert spaces (Research Notes in Math., 64). Pitman Advances Publishing Program, *1982*.

[14] *Привалов И. И.* Введение в теорию аналитических функций. М.: ГИФМЛ, *1960*.

[15] *Секёфальви-Надь Б., Фойаш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, *1970*.

[16] *Helson H.* Lectures on invariant subspaces. New York: Acad. Press, *1964*.

[17] *Teodorescu R. I.* Sur les décompositions directes des contractions de l'espace de Hilbert//J. Funct. Anal. *1975*. Vol. 18, N 4. P. 414—428.

[18] *Fuhrman P.* Linear systems in Hilbert spaces. New York: Mc Grow Hill, *1981*.

[19] *Виноградов С. А., Рукшин С. Е.* О свободной интерполяции ростков аналитических функций в пространствах Харди//Зап. научн. семинаров ЛОМИ. *1982*. Т. 107. С. 36—45.

[20] *Треиль С. Р.* Углы между коинвариантными подпространствами и операторная проблема короны (Задача Секёфальви-Надя)//ДАН СССР. *1988*. Т. 302, № 5. С. 1063—1068.

Ленинградский государственный университет
199034, Ленинград, Университетская наб., 7/9

Поступило 14 июня 1989 г.