А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике,
Докл. АН СССР, 1987, том 294, номер 2, 283–287

УДК 513.944 МАТЕМАТИКА

А.Т. ФОМЕНКО, Х. ЦИШАНГ (ФРГ)

О ТОПОЛОГИИ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ГАМИЛЬТОНОВОЙ МЕХАНИКЕ

(Представлено академиком С.П. Новиковым 1 X 1985)

Пусть M^4 – симплектическое многообразие и $v = \operatorname{sgrad} H$ – гамильтоново поле на M^4 с гамильтонианом H, вполне интегрируемое по Лиувиллю на какой-то одной поверхности уровня $Q^3 = \{H = \text{const}\}$. Это означает, что в окрестности Q существует второй интеграл f, коммутирующий с H на Q, f и H независимы. Пусть ограничение f на неособую компактную замкнутую поверхность Q постоянной энергии является боттовской функцией, т.е. все критические точки f на Q организованы в объединение невырожденных критических подмногообразий. А.Т. Фоменко в [1, 2] дал полную топологическую классификацию таких многообразий Q. Оказалось, что Q представимо в виде склейки простейших многообразий ("элементарных кирпичей") трех типов: $Q = m(D^2 \times S^1) + n(T^2 \times D^1) + q(N^2 \times S^1)$, где $D^2 \times S^1$ – полноторие, $T^2 \times D^1$ – цилиндр (произведение тора T^2 на отрезок D^1), $N^2 \times S^1$ – "штаны", т.е. произведение диска D^2 с двумя дырками (т.е. N^2) на окружность S^1. Здесь m, n, q – некоторые неотрицательные целые числа. Склейка производится по краям указанных многообразий; обозначим класс таких многообразий (Q); класс поверхностей постоянной энергии интегрируемых систем – через $(H) \subset (Q)$. Все они ориентируемы. Указанное в [1] разложение Q в сумму "кирпичей", вообще говоря, неоднозначно. Согласно [2], $(H) = (Q)$.

Для гамильтоновой механики представляет интерес следующий вопрос: сколько замкнутых устойчивых траекторий имеет интегрируемая система на поверхности постоянной энергии Q? Замкнутая (периодическая) траектория интегрируемой системы называется устойчивой, если ее трехмерная трубчатая окрестность в Q целиком (без щелей) расслаивается на двумерные торы, осью которых является данная траектория. Пусть число таких траекторий на Q равно m'. Для ответа на поставленный вопрос следует сначала оценить снизу число полноторий (т.е. число $m = m(Q) \geqslant m'$) в разложении Q в сумму "кирпичей". В [1, 2] доказана следующая оценка.

Пусть интеграл f ориентируем, т.е. ориентируемы все его критические подмногообразия в Q. В действительности можно считать, что f всегда ориентируем, переходя в случае необходимости к двулистному накрытию $\hat{Q}$ над Q. Тогда (см. [1, 2]), если одномерная группа гомологий $H_1(Q, \mathbf{Z})$ конечна или если фундаментальная группа $\pi_1(Q)$ изоморфна $\mathbf{Z}$, то $m \geqslant m' \geqslant 2$, т.е. интегрируемая система всегда имеет на Q не менее двух устойчивых периодических решений. Для неориентированного f оценки на m' см. в [2]. Пусть $\beta = \beta(Q)$ – одномерное число Бетти, а $r = r(Q)$ – ранг $\pi_1(Q)$, т.е. наименьшее число образующих. Пусть $m_0(\beta) = \min(m(Q)$: $\beta(Q) = \beta)$ и $m_1(r) = \min(m(Q)$: $r(Q) = r)$, где min берется по всем $Q \in (Q)$ и по всем их разложениям в сумму "кирпичей". Результат, доказанный в [2], допускает переформулировку: $m_0(0) = 2$, $m_0(1) = 0$, $m_0(2) \geqslant 0$, $m_0(\beta) = 0$ при $\beta \geqslant 3$; $m_1(0) = m_1(1) = 2$, $m_1(2) \geqslant 0$, $m_1(r) = 0$ при $r \geqslant 3$. Неравенства в действительности оказываются равенствами (теорема 2). Пусть конечная часть Tor (H_1) группы $H_1(Q, \mathbf{Z})$ разложена в упорядоченную прямую сумму подгрупп, где порядок каждой подгруппы делит порядок предыдущей. Пусть ϵ – число слагаемых. Пусть m' – число устойчивых периодических траекторий системы v; s – число критических неустойчивых окружностей интеграла f (траекторий системы) с неориентируемой сепаратрисной диаграммой; q' – число неустойчивых критических окружностей (траекторий системы) с ориентируемой сепаратрисной диаграммой; r – число двумерных неориентируемых критических подмногообразий для интеграла f (бутылок Клейна [2]). Напомним, что $(H) = (Q)$.

Теорема 1. *Пусть $Q^3 \in (H)$, т.е. Q – поверхность постоянной энергии, интегрируемой при помощи боттовского интеграла системы v. Тогда $m = m' + s + 2r \geqslant \geqslant {}^1/_3(\epsilon - 5\beta + 4)$, $q \geqslant m - 2$ и $q' \geqslant m' + r - 2$. Для ориентируемого интеграла имеем $r = 0$.*

Теорема 2. *Для чисел $m_0(\beta)$ и $m_1(r)$ имеют место равенства*

β, r	0	1	2	3	4	5	...
$m_0(\beta)$	2	0	0	0	0	0	...
$m_1(r)$	2	2	0	0	0	0	...

Пусть Г – ориентируемое компактное замкнутое трехмерное многообразие и $T = T_1 \cup \ldots \cup T_n$ – система непересекающихся торов в Г. Пусть $U(T)$ – регулярная окрестность T в Г. Если каждая компонента связности $\Gamma \setminus U(T)$ является расслоением со слоем S^1 (над двумерной поверхностью – базой), то многообразие Г назовем графоподобным. Класс (Г) таких многообразий рассматривал Вальдхаузен в [4]. Развивая идеи, высказанные в [1, 2], С.В. Матвеев и А.Б. Бурмистрова рассмотрели класс (S) компактных ориентируемых замкнутых трехмерных многообразий S, на которых существуют гладкие S-функции. Функция называется S-функцией, если множество ее критических точек на S состоит из невырожденных критических окружностей и все связные компоненты каждой неособой поверхности уровня этой функции являются торами. Как доказали Матвеев и Бурмистрова класс (S) совпадает с классом (Q).

Теорема 3. *Все три класса многообразий (Q), (Г), (S), описанные выше, совпадают.*

Рассмотрим разложение Q в сумму "кирпичей". Объединим некоторые "штаны", полнотория и цилиндры в максимальные "блоки" S_i, являющиеся многообразиями Зейферта (см. [3]). При этом некоторые полнотория могут остаться, а именно те, некоторые из меридианов которых являются слоями соседних "штанов". Такие полнотория назовем тривиализирующими. Склеивая сначала цилиндрами разные блоки S_i, получаем "дерево". Остальные цилиндры определяют ручки. Пусть блок S_i имеет $m(i)$ особых слоев с инвариантами $(a_{i1}, b_{i1}), \ldots, (a_{im(i)}, b_{im(i)})$; здесь можно предполагать, что $a_{ij} > 1, 0 < b_{ij} < a_{ij}$ и НОД $(a_{ij}, b_{ij}) = 1$ (взаимно простые). Пусть $k(i)$ – число тривиализирующих полноторий. Пусть $n(i)$ – число компонент края ∂S_i, соответствующих ручкам или цилиндрам в дереве. Пусть $g(i)$ – род базисной поверхности пространства Зейферта S_i. Напомним, что S_i ориентируемо; это влияет на (2а), см. ниже.

Предложение 1 (см. [3]). *Группа $\pi_1(S_i)$ имеет следующее копредставление:*

(1) *Образующие*: (а) h_i (*соответствует слою*), (б) $\{r_{ij} | 1 \leqslant j \leqslant m(i)\} \cup \cup \{x_{ij} | 1 \leqslant j \leqslant k(i)\}$ (*соответствует компонентам* ∂S_i), (в) $\{s_{ij} | 1 \leqslant j \leqslant m(i)\}$ (*соответствует особым слоям* S_i), (г$^+$) $\{t_{ij}, u_{ij} | 1 \leqslant j \leqslant g(i)\}$ (*соответствует ручкам базы, если она ориентирована*), (г$^-$) $\{v_{ij} | 1 \leqslant j \leqslant g(i)\}$ (*если база – неориентированная поверхность*).

(2) *Определяющие соотношения*: (а) $[r_{ij}, h_i] = 1$, $[x_{ij}, h_i] = 1$, $[s_{ij}, h_i] = 1$, $[t_{ij}, h_i] = 1$, $[u_{ij}, h_i] = 1$, $v_{ij} h_i v_{ij}^{-1} h_i = 1$, *где j пробегает все подходящие числа* (*см. выше*), (б) $s_{ij}^{a_{ij}} h_i^{\bar{b}_{ij}} = 1$, $1 \leqslant j \leqslant m(i)$, (в) $h_i^{l_i} \prod_{j=1}^{n(i)} r_{ij} \prod_{j=1}^{k(i)} x_{ij} \prod_{j=1}^{m(i)} s_{ij} \cdot K = 1$, *где*

$K = \prod_{j=1}^{g(i)} [t_{ij}, u_{ij}]$, *если база ориентирована, и* $K = \prod_{j=1}^{g(i)} v_{ij}^2$, *если база неориентирована. Если* $n(i) + k(i) > 0$, *то можно предполагать, что* $l_i = 0$.

Приклеивание цилиндров индуцирует соответствие Φ между всеми граничными компонентами, не заклеенными тривиализирующими полноториями. Здесь $\Phi(i, j) \neq (i, j)$ и $\Phi^2 = \mathrm{id}$. Получаем изоморфизмы: $\psi_{ij}: \langle r_{ij}, h_i \rangle \to \langle r_{\Phi(i,j)}, h_{\Phi_1(i,j)} \rangle$, где $\Phi_1(i, j)$ – первый член пары $\Phi(i, j)$. При этом $\psi_{\Phi(i,j)} = \psi_{ij}^{-1}$. Пусть $\psi_{ij}(r_{ij}) = r_{\Phi(i,j)}^{\alpha(i,j)} \cdot h_{\Phi_1(i,j)}^{\beta(i,j)}$, $\psi_{ij}(h_i) = r_{\Phi(i,j)}^{\gamma(i,j)} \cdot h_{\Phi_1(i,j)}^{\delta(i,j)}$. Здесь определитель имеет вид $\alpha(i, j)\,\delta(i, j) - \beta(i, j) \cdot \gamma(i, j) = \pm 1$. Теперь приклеивания определяют новые образующие:

(3) $\{w_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant n(i)\}$

и соотношения

(4а) $w_{ij}^{-1} r_{ij} w_{ij} = \psi_{ij}(r_{ij}) = r_{\Phi(i,j)}^{\alpha(i,j)} h_{\Phi_1(i,j)}^{\beta(i,j)}$,

(4б) $w_{ij}^{-1} h_i w_{ij} = \psi_{ij}(h_i) = r_{\Phi(i,j)}^{\gamma(i,j)} h_{\Phi_1(i,j)}^{\delta(i,j)}$,

(4в) $w_{\Phi(i,j)} = w_{ij}^{-1}$

для $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant n(i)$. Ясно, что для каждой пары (i, j), $\Phi(i, j)$ потребуется только одна пара соотношений (4а, б). Для склеивания требуется новая образующая только в том случае, когда склеивание порождает ручку. Если (i, j) отвечает цилиндру, включенному в дерево, то имеем: (г) $w_{ij} = 1$. Наконец, приклеивание тривиализирующих полноторий добавит соотношения:

(5) $w_{ij} = 1$, если $k(i) \geqslant 1$.

Теорема 4. *Фундаментальная группа многообразия Q имеет копредставление с образующими* (1а–г), (3) *и определяющими соотношениями* (2а–в), (4а–г), (5).

Теорема 5. *Если все блоки S_i "достаточно сложны"* (*см.* [3, 4]) (*например, если* $k(i) + m(i) + n(i) + g(i) > 3$) *и если нет тривиализирующих полноторий, то группа $\pi_1(Q)$ определяет Q однозначно с точностью до гомеоморфизма и числа, определяющие копредставление группы, являются* (*почти*) *инвариантами этой группы. Если есть тривиализирующие полнотория, то Q приводимо* [4].

Чтобы вычислить группу гомологий $H_1(Q, \mathbf{Z})$, мы записываем группу (см. выше) в аддитивном виде, т.е. коммутируем фундаментальную группу. Пусть $A_{i1} = \langle\langle s_{ij}, h_i \mid (2б) \rangle\rangle$ – абелева группа с данными образующими и соотношениями, где j пробегает $1, \ldots, m(i)$. Тогда:

(6) $$\beta(A_{i1}) = \begin{cases} 1,\ \epsilon(A_{i1}) < m(i) - 1, & \text{если } m(i) > 0, \\ 0, \text{ если } m(i) = 0. \end{cases}$$

Через $A_{i2} = \langle\langle A_{i1}, (1, б, г), (3) \rangle\rangle$ мы обозначим абелеву группу, полученную из A_{i1} добавлением образующих (1, б, г), (3) для фиксированного i. Тогда имеем:

(7) $\beta(A_{i2}) = 1 + k(i) + 2n(i) + \omega_i g(i)$, $\quad \epsilon(A_{i2}) = \epsilon(A_{i1})$,

где $\omega_i = 2$, если база ориентирована, и $\omega_i = 1$ в противном случае.

Пусть $S_1, \ldots, S_{p_+}$ имеют ориентированную базисную поверхность, а $S_{p_+ + 1}, \ldots, S_p$ – неориентированную базу. Пусть $A_3 = \langle\langle$все образующие $\mid$(2а–в), (4в, г)$\rangle\rangle$. Если $N = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} n(i)$, то:

(8а) $\beta(A_3)=\sum_{i=1}^{p}\beta(A_{i2})-N-(p-1)=\sum_{i=1}^{p}k(i)+3N+2\sum_{i=1}^{p_+}g(i)+1+\sum_{i=p_++1}^{p}g(i);$

(8б) $\epsilon(A_3)\leqslant\sum_{i=1}^{p}\epsilon(A_{i2})\leqslant\sum_{i=1}^{p}m(i)-p_1,$

где p_1 – число таких i со свойством $m(i)>0$. Пусть $A_4=\langle\langle A_3,\ (4а)\rangle\rangle$ и $A_5=\langle\langle A_4,\ (4б)\rangle\rangle$. Тогда

(9) $\beta(A_4)=\beta(A_3)-N,\ \epsilon(A_4)=\epsilon(A_3);$

(10а) $\beta(A_4)-N\leqslant\beta(A_5)\leqslant\beta(A_4);$

(10б) $\epsilon(A_4)-N\leqslant\epsilon(A_5)\leqslant\epsilon(A_4)+N;$

(10в) $-N\leqslant\rho(A_5)-\rho(A_4)\leqslant-p+1,$

где $\rho(A)$ = ранг A.

Пусть $A_6=\langle\langle A_5,\ (5),\ (2а)\rangle\rangle$. Тогда из соотношений (2а) интересны только соотношения $v_{ij}h_iv_{ij}^{-1}h_i=0$.

Пусть p_0 обозначает число таких i, для которых $k(i)>0$, и p_{0+} – число таких $i\leqslant p_+$ с этим свойством. Тогда имеем:

(11а) $-(p-p_+)-p_{0+}\leqslant\beta(A_6)-\beta(A_5)\leqslant0;$

(11б) $-(p-p_+)-p_{0+}\leqslant\epsilon(A_6)-\epsilon(A_5)\leqslant(p-p_+)+p_{0+};$

(11в) $-(p-p_+)-p_{0+}\leqslant\rho(A_6)-\rho(A_5)\leqslant0.$

Добавление последних соотношений (2в) дает $H_1(Q)=\langle\langle A_6,\ (2в)\rangle\rangle$ и

(12а) $-p\leqslant\beta(Q)-\beta(A_6)\leqslant-p_0,$

(12б) $-p+p_0\leqslant\epsilon(Q)-\epsilon(A_6)\leqslant p-p_0,$

(12в) $-p\leqslant\rho(Q)-\rho(A_6)\leqslant0.$

Все неравенства (6) – (12) дают:

(13) $$\epsilon(Q)-\beta(Q)\leqslant\sum_{i=1}^{p}m(i)-p_1-\sum_{i=1}^{p}k(i)-2\sum_{i=1}^{p_+}g(i)-$$
$$-\sum_{i=p_++1}^{p}g(i)+3p-2p_+-p_0+2p_{0+}\leqslant\sum_{i=1}^{p}m(i)-p_1+2p-p_+.$$

С другой стороны, верно следующее утверждение:

(14) $3q=2n+m,\ q\geqslant p,\ n\geqslant N,\ m\geqslant\sum_{i=1}^{p}m(i)+\sum_{i=1}^{p}k(i),$

$\beta(Q)\geqslant\tilde\beta=n-(q-1),$

так как $\tilde\beta$ равно числу ручек. Отсюда

(15) $q=2\tilde\beta+m-2.$

Используя (13), (14), (15), получаем

(16) $$m\geqslant\sum_{i=1}^{p}m(i)\geqslant\epsilon(Q)-\beta(Q)-2p+p_+\geqslant\epsilon(Q)-\beta(Q)-2q+p_+=$$
$$=\epsilon(Q)-\beta(Q)-4\tilde\beta-2m+4+p_+,$$

и $m\geqslant\epsilon(Q)-\beta(Q)-2\tilde\beta-m+2$, если $p_+=p$. Отсюда следует теорема 1.

Для доказательства теоремы 2 достаточно предъявить трехмерное многообразие Q, для которого $r(Q) = 2$ и $m(Q) = 0$. Такое многообразие получается склейкой двух цилиндров по двум граничным торам. Считая, что одна пара торов склеивается тождественно, достаточно указать матрицу склейки двух других торов. Возьмем $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $H_1(Q) = \mathbf{Z}$ и $\pi_1(Q)$ содержит подгруппу $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, поэтому не может быть циклической. Ясно, что ранг $\pi_1(Q) = 2$. Из теоремы 5 следует, что все "достаточно большие" многообразия Q^3 классифицируются своими фундаментальными группами. Остается вопрос: сколько имеется "маленьких" многообразий? Нужно их классифицировать. В [2, 5] дано полное описание многообразий Q^n, обобщающих трехмерные поверхности постоянной энергии и описывающих бифуркации торов Лиувилля общего положения в окрестности критических точек отображения момента интегрируемой гамильтоновой системы. Другими словами, Q^n – прообраз регулярной кривой (при отображении момента), трансверсально пересекающей бифуркационную диаграмму. Они имеют вид: $Q^n = m(D^2 \times T^{n-2}) + p(T^{n-1} \times D^1) + q(N^2 \times T^{n-2})$, где T^{n-2} – $(n-2)$-мерный тор. Задача: описать фундаментальную группу таких многообразий. Здесь можно ожидать результатов, близких к теоремам 1 и 2. Возможно, здесь окажется полезной теория многомерных многообразий Зейферта, развитая В. Нейманом, Ф. Раймондом, Б. Циммерманном, Х. Цишангом и др.

Пусть (H) – класс трехмерных многообразий, являющихся поверхностями постоянной энергии интегрируемых систем на M^4. Как доказано в [2, 5], класс (H) содержится в классе (Q). Обратное включение доказано А.В. Браиловым и А.Т. Фоменко. Итак, $(H) = (Q) = (S) = (\Gamma)$. По-видимому, боттовские интегралы всюду плотны в классе всех гладких интегралов интегрируемой системы. Если это так, то во всех теоремах, сформулированных в [1, 2, 5], условие боттовости интегралов можно ослабить.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Математический институт им. В.А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Рурский университет
Бохум, ФРГ

Поступило
4 XI 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фоменко А.Т.* В кн.: V Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям. Кишинев, 1985, с. 235–237. 2. *Фоменко А.Т.* – Изв. АН СССР. Сер. матем., 1986, т. 50, № 6. 3. *Orlik P., Vogt E., Zieschang H.* – Topology, 1967, vol. 6, № 1, p. 49–65. 4. *Waldhausen F.* – Invent. Math., 1967, vol. 3, № 4, p. 308–333; 1967, vol. 4, № 2, p. 87–117. 5. *Фоменко А.Т.* – ДАН, 1986, т. 287, № 5.