И. В. Скрыпник, Регулярность граничной точки для квазилинейного параболического уравнения, *Докл. АН СССР*, 1991, том 319, номер 1, 68–71

https://www.mathnet.ru/dan5965

Доклады Академии наук СССР
1991. Том 319, № 1

УДК 517.944 МАТЕМАТИКА

© Академик АН УССР И.В. СКРЫПНИК

РЕГУЛЯРНОСТЬ ГРАНИЧНОЙ ТОЧКИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В работе устанавливается необходимое условие регулярности граничной точки $(x_0, t_0) \in \partial\Omega \times (0, T)$ для дивергентного квазилинейного параболического уравнения

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} a_j\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = a_0\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

в цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$.

Вслед за основополагающим критерием Винера регулярности граничной точки для гармонических функций многими авторами изучались условия на границу области, обеспечивающие непрерывность в граничной точке решений линейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка (см. список литературы в [1]). Отметим, что для уравнения теплопроводности в цилиндрической области критерий регулярности граничной точки получен А.Н. Тихоновым в [2]; для линейного дивергентного уравнения с измеримыми коэффициентами соответствующий результат установлен Эклундом в [3].

Для уравнения (1) достаточное условие непрерывности решения в граничной точке получено В. Цимером в [4]. В данной работе решен оставшийся открытым вопрос о необходимом условии регулярности граничной точки, что приводит вместе с результатом Цимера к критерию регулярности граничной точки.

Для дивергентных квазилинейных эллиптических уравнений достаточное условие регулярности граничной точки получено Р. Гарипи и В. Цимером, а необходимое условие установлено автором. Как доказательство этих результатов, так и дальнейшие литературные ссылки можно найти в [5].

1. Пусть Ω – ограниченное открытое множество в R^n. Будем изучать поведение решений уравнения (1) в точках $(x_0, t_0) \in \partial\Omega \times (0, T)$ в предположении, что функции $a_j(x, t, u, p)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, определены при $x \in \Omega$, $t \in [0, T]$, $u \in R^1$, $p \in R^n$ и удовлетворяют при $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$, $u, v \in R^1$, $p, q \in R^n$ условиям:

1) для почти всех x, t функции $a_j(x, t, u, p)$ непрерывны по u, p и для всех u, p $a_j(x, t, u, p)$ – измеримые функции x, t; $a_j(x, t, 0, 0) \equiv 0$ при $j = 0, 1, \ldots, n$;

2) с положительными постоянными ν_1, ν_2 выполнены неравенства

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} [a_j(x, t, u, p) - a_j(x, t, u, q)](p_j - q_j) \geqslant \nu_1 |p - q|^2, \\ &|a_j(x, t, u, p) - a_j(x, t, v, q)| \leqslant \nu_2(|u - v| + |p - q|). \end{aligned}$$

Сформулированные условия обеспечивают разрешимость уравнения (1) в пространстве $V_2(Q)$ при граничном и начальном условиях

$$(3) \qquad u(x, t) = f(x, t) \quad \text{при} \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T),$$

$$(4) \qquad u(x, 0) = g(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega$$

для произвольных $f(x, t) \in W_2^1(Q)$, $g(x) \in L_2(\Omega)$. Как используемые обозначения пространств, так и определение решения класса $V_2(Q)$ содержатся в [6].

Определение 1. Будем говорить, что $(x_0, t_0) \in \partial\Omega \times (0, T)$ – *регулярная граничная точка* области Q для уравнения (1), если для всякого определенного в Q решения $u(x, t)$ этого уравнения, удовлетворяющего условию

$$(5) \qquad \varphi(x, t)[u(x, t) - f(x, t)] \in \overset{\circ}{V}_2(Q)$$

с функцией $f(x, t) \in C(\overline{Q}) \cap W_2^1(Q)$ и бесконечно дифференцируемой функцией $\varphi(x, t)$, равной единице в окрестности (x_0, t_0), выполнено равенство

$$\lim_{(x, t) \to (x_0, t_0), \, (x, t) \in Q} u(x, t) = f(x_0, t_0).$$

Для формулировки условия регулярности напомним еще понятие емкости.

Определение 2. *Емкостью* множества E, обозначаемой $C(E)$, называется число

$$C(E) = \inf \int_{R^n} \left| \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} \right|^2 dx,$$

где нижняя грань берется по всем функциям $\varphi(x)$ из пространства $C_0^\infty(R^n)$, удовлетворяющим условию $\varphi(x) \geqslant 1$ при $x \in E$.

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Пусть функции $a_j(x, t, u, p)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, удовлетворяют условиям* 1), 2). *Для того чтобы $(x_0, t_0) \in \partial\Omega \times (0, T)$ была регулярной граничной точкой области Q для уравнения* (1), *необходимо, чтобы*

$$(6) \qquad \int_0^1 C(B(x_0, r) \setminus \Omega) \, r^{1-n} dr = \infty,$$

где $B(x_0, r)$ – шар радиуса r с центром в точке x_0.

В работе [4] доказано, что условие (6) достаточно для регулярности точки (x_0, t_0). Тем самым получаем критерий регулярности точки боковой цилиндрической поверхности.

Следствие. *Пусть выполнены предположения теоремы* 1. *Для того чтобы точка $(x_0, t_0) \in \partial\Omega \times (0, T)$ была регулярной граничной точкой уравнения* (1), *необходимо и достаточно выполнение равенства* (6).

2. Доказательство теоремы 1 основывается на построении последовательности вспомогательных решений $u_k(x, t)$ уравнения (1) и локальных оценках этих функций и их разностей.

Далее будем считать $a_j(x, t, u, p)$ определенными при $x \in R^n$, полагая их равными $a_j(x_1, t, u, p)$ при $x \notin \Omega$, где x_1 – некоторая фиксированная точка Ω. Определим при $k = 1, 2, \ldots$ множества

$$E_k = B(x_0, 2^{-k}) \setminus \Omega, \quad E^k = E_k \setminus B(x_0, 2^{-(k+1)}), \quad D_k = B(x_0, R) \setminus \overline{E}_k,$$

где $x_0 \in \partial\Omega$, $R = 2 + \operatorname{diam} \Omega$ и $\operatorname{diam} \Omega$ – диаметр области Ω.

Выберем невозрастающую функцию $\omega(s) \in C^\infty(R^1)$, удовлетворяющую условиям

$$0 \leqslant \omega(s) \leqslant 1,$$

$$\omega(s) \equiv \begin{cases} 0 & \text{при } s \geqslant 2, \\ 1 & \text{при } s \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\left| \frac{d}{ds} \omega(s) \right| \leqslant 2.$$

И пусть, далее, $h(x) = \omega(|x - x_0|)$, $\lambda_k(t) = \omega(2^{2k} |t - t_0|)$.

Для данной фиксированной точки $(x_0, t_0) \in \partial\Omega \times (0, T)$ выберем число k_0 так, чтобы $2^{2-2k_0} < t_0$ и определим при $k > k_0$, $(x, t) \in Q_k = D_k \times (0, T)$ функцию $u_k(x, t)$ как решение уравнения (1) в Q_k, удовлетворяющее условиям (3), (4) при $\Omega = D_k$, $f(x, t) = h(x)\lambda_k(t)$, $g(x) = 0$. Полагая $u_k(x, t)$ равной $\lambda_k(t)$ при $(x, t) \in \bar{E}_k \times (0, T)$, будем считать $u_k(x, t)$ заданной при $(x, t) \in B(x_0, R) \times (0, T)$.

Доказательство теоремы 1 основывается на следующих априорных оценках функций $u_k(x, t)$, $u_k(x, t) - u_{k+1}(x, t)$.

Т е о р е м а 2. *Предположим, что выполнены условия* 1), 2) *для функций* $a_j(x, t, u, p)$. *Тогда существует постоянная* M_1, *зависящая лишь от* n, ν_1, ν_2, T *такая, что для* $u_k(x, t)$ *при* $|x - x_0|^2 + |t - t_0| \geqslant 2^{-2(k-2)}$ *справедлива оценка*

$$(7) \qquad 0 \leqslant u_k(x, t) \leqslant M_1 \left\{ \frac{2^{-2k} C(E_k)}{(|x - x_0| + \sqrt{|t - t_0|})^n} + |x - x_0|^2 + |t - t_0| \right\}.$$

Т е о р е м а 3. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 2. *Тогда с зависящей лишь от* n, ν_1, ν_2, T *постоянной* M_2 *при* $|x - x_0| \leqslant 2^{-k-4}$, $|t - t_0| \leqslant 2^{-2(k+4)}$ *выполнена оценка*

$$(8) \qquad |u_k(x, t) - u_{k+1}(x, t)| \leqslant M_2 \{ 2^{k(n-2)} C(E_k) + 2^{-2k} \}.$$

Особенностью априорных оценок (7), (8) при сравнении их с известными оценками максимумов модулей решений квазилинейных параболических уравнений (см. [6]) является их локальный характер, выражаемый в мажорировании в (7) решения функцией точки и в мажорировании в (8) разности решений в окрестности точки (x_0, t_0). Основную роль при доказательстве неравенств (7), (8) играют интегральные оценки для срезок решений и отметим сейчас одну из оценок такого типа.

Определим вспомогательные функции $v_k(x)$, $w_k(x)$ как решения задач

$$\Delta v_k(x) = 0, \quad x \in D_k, \quad v_k(x) - h(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_k),$$
$$\Delta w_k(x) = 0, \quad x \in D^{(k)} = B(x_0, R) \setminus \bar{E}^{(k)}, \quad w_k(x) - h(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D^{(k)}).$$

Доопределим функции $v_k(x)$, $w_k(x)$ на шар $B(x_0, R)$, полагая их равными $h(x)$ соответственно вне $\bar{E}_k$, $\bar{E}^{(k)}$. Пусть, далее,

$$\delta_k(x, t) = u_k(x, t) - u_{k+1}(x, t),$$
$$[\delta_k(x, t)]_{(-\mu, \mu)} = \max\{\min[\delta_k(x, t), \mu], -\mu\},$$
$$d_k = \operatorname{vrai\,max}\{|\delta_k(x, t)| : (x, t) \in Q_k, \ |x - x_0|^2 + |t - t_0| \geqslant 2^{-2(k-3)}\}.$$

Определим при $\mu > 0$, $t_k = \min\{t_0 + 2^{-2(k-1)}, T\}$ множества

$$T(\mu) = \{(x, t) \in B(x_0, R) \times (0, t_k) : |\delta_k(x, t)| \leqslant \mu\}, \quad F(\mu) = F^+(\mu) \cup F^-(\mu),$$
$$F^\pm(\mu) = \{(x, t) \in B(x_0, R) \times (0, t_k) : \pm[\delta_k(x, t)]_{(-\mu, \mu)} \geqslant \mu \bar{v}_k(x, t) + \mu \bar{w}_k(x, t)\},$$

где

$$\bar{v}_k(x, t) = v_k(x)\omega(2^{k-1}|x - x_0|)\{\lambda_{k-2}(t) - \lambda_{k+2}(t)\},$$
$$\bar{w}_k(x, t) = w_k(x)\{\omega(2^{k-1}|x - x_0|) - \omega(2^{k+2}|x - x_0|)\}\lambda_{k-2}(t);$$

здесь $\omega(s)$, $\lambda_k(t)$ – функции, введенные в начале пункта.

Л е м м а 1. *При произвольном $\mu > d_k$ имеет место оценка*

(9) $$\operatorname*{vrai\,max}_{0 \leqslant t \leqslant t_k} \int_{B(x_0, R)} |[\delta_k(x, t)]_{(-\mu,\mu)}|^2 \chi_{F(\mu)}(x, t) dx + $$
$$+ \iint_{T(\mu) \cap F(\mu)} \left| \frac{\partial \delta_k(x, t)}{\partial x} \right|^2 dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \mu \{2^{-2k} C(E_k)\}^{1/2} \{2^{-2k} C(E_k) + 2^{-(2k+n)k}\}^{1/2},$$

где $\chi_{F(\mu)}(x, t)$ – характеристическая функция множества $F(\mu)$ и C_1 – постоянная, зависящая лишь от n, ν_1, ν_2.

3. Докажем теорему 1, используя оценки предыдущего пункта и следующую лемму, просто доказываемую исходя из определения емкости.

Л е м м а 2. *Существует постоянная C_2, зависящая лишь от n, ν_1, ν_2, T и такая, что при $k > k_0$ справедлива оценка*

(10) $$\operatorname{vrai\,min}\{u_k(x, t); |x - x_0| \leqslant 2^{-(k+5)}, \quad |t - t_0| \leqslant 2^{-2(k+5)}\} \leqslant$$
$$\leqslant C_2 \{2^{k(n-2)} C(E_k)\}^{1/2}.$$

Для доказательства теоремы 1 необходимо предъявить решение с гладким граничным значением, но имеющая разрыв в точке (x_0, t_0), как только не выполнено условие (6). Предположим ограниченность интеграла в левой части равенства (6). В этом случае можно выбрать номер k_1 так, чтобы

(11) $$\sum_{k=k_1}^{\infty} \{2^{k(n-2)} C(E_k) + 2^{-2k}\} < \frac{1}{4M_2},$$

где M_2 – постоянная из неравенства (8).

Покажем, что искомым, разрывным в (x_0, t_0) решением уравнения (1) может служить при $k = k_1$ функция $u_k(x, t)$, определенная в п.2. Отметим, что решение $u_{k_1}(x, t)$ удовлетворяет условию (5) с функцией $f(x, t)$, тождественно равной единице.

Пусть ρ – произвольное положительное число. В силу (10), (11) можно выбрать номер $k_2 = k_2(\rho)$ и точку $(x_\rho, t_\rho) \in Q$ так, чтобы

(12) $$u_{k_2}(x_\rho, t_\rho) < 1/4, \quad |x_\rho - x_0|^2 + |t_\rho - t_0| \leqslant \rho^2.$$

Оценим $u_{k_1}(x_\rho, t_\rho)$, используя (8), (10), (11). Имеем

$$u_{k_1}(x_\rho, t_\rho) = u_{k_2}(x_\rho, t_\rho) + \sum_{l=k_1}^{k_2-1} \{u_l(x_\rho, t_\rho) - u_{l+1}(x_\rho, t_\rho)\} < \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует

$$\lim_{\substack{(x, t) \to (x_0, t_0) \\ (x, t) \in Q}} u_{k_1}(x, t) \leqslant \frac{1}{2} < 1,$$

что и доказывает нерегулярность граничной точки (x_0, t_0) а, значит, и теорему 1.

Институт прикладной математики и механики
Академии наук УССР
Донецк

Поступило
26 IV 1991

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландис Е.М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971. 288 с. 2. *Тихонов А.Н.* – Бюлл. МГУ, секция А, 1938, т. 1, вып. 9, с. 1–49. 3. *Eklund N.* – Bull. Amer. Math. Soc., 1971, vol. 77, p. 788–792. 4. *Ziemer W.* – J. Different. Equat., 1980, vol. 35, № 3, p. 291–305. 5. *Skrypnik I.V.* Nonlinear elliptic boundary value problems. Leipzig: BSB Teubner, 1986. 232 p. 6. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.