

УДК 621.391.53.08

МЕТОД УВЕЛИЧЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ АКУСТООПТИЧЕСКИХ СПЕКТРОМЕТРОВ

© 1996 г. В. Ф. Кравченко, член-корреспондент РАН В. И. Пустовойт, В. В. Тимошенко

Поступило 07.03.96 г.

1. Постановка задачи. Математическая модель спектральных измерений акустооптического (АО) спектрометра в безразмерных величинах может быть записана, согласно [1], в виде интегрального уравнения

$$f(x) = s(x) + \mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-y, y)\varphi(y)dy + \mu(x), \quad (1)$$

где $x = \frac{\Omega - \Omega_c}{\Omega_c}$, $y = \frac{\omega - \omega_c}{\omega_c}$ – безразмерные частоты звука и света; $\Omega_c, \omega_c(\Omega_c)$ – частоты, соответствующие середине диапазона измерений; f – измеряемый сигнал; s, μ – его полезная и случайная составляющие; φ – произведение спектральной плотности светового потока на спектральную чувствительность фотоприемника; $h(x-y, y)$ – аппаратная функция акустооптического фильтра (АОФ), вид которой известен и в принятых здесь обозначениях задается выражением [2]:

$$h(x-y, y) = (1+y)^2 \frac{\sin^2(\beta\sqrt{(1+y)^2 + \rho^2(x-y)^2})}{(1+y)^2 + \rho^2(x-y)^2}. \quad (2)$$

В (2) параметр $\beta \sim P_{ак}^{1/2} L$ определяет эффективность АОФ в центре диапазона ($y=0$) и зависит от мощности звука $P_{ак}$, длины кристалла L ; параметр $\rho = \frac{\Omega_c L}{2\beta v}$ пропорционален числу периодов звуковой дифракционной решетки при настройке АОФ на середину диапазона и составляет $\sim 10^4$.

В общей постановке задача увеличения разрешающей способности АО-спектрометра сводится к восстановлению “истинного” спектра источника $\varphi(y)$ по измеренным значениям $f(x)$ на основе уравнения (1), устанавливающего связь между этими величинами.

Уравнение (1) относится к классу интегральных уравнений 1-го рода, заданному в пространстве интегрируемых с квадратом функций, и является некорректно поставленной задачей по Адамару [3, 4]. Кроме того, существуют еще две проблемы. Первая связана с необходимостью дискретизации уравнения (1), при которой, как правило, происходит потеря информации, а задача состоит в минимизации этих потерь. Вторая проблема возникает в связи с самим характером АО-измерений, выполняемых в определенном конечном интервале звуковых частот (т.е. в ограниченном диапазоне длин волн), на котором получают дискретный ряд значений $f(x_n)$ с некоторой случайной погрешностью. Поэтому необходимо выбрать такой метод интерполяции $f(x)$ по показаниям спектрометра $f(x_n)$, чтобы восстановленный спектр имел малые расхождения с “истинным” спектром в интервале измерений.

В работе предложен и обоснован новый метод реставрации $\varphi(x)$ по конечному ряду данных спектрометра $f(x_n)$, который позволяет решить перечисленные выше проблемы.

2. Метод решения. Известно, что в [1] найден фурье-образ $h(\zeta, y)$, имеющий следующий вид:

$$H(p, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\zeta, y) \exp(ip\zeta) d\zeta = \Theta\left(\left|\frac{p}{p_m}\right| - 1\right) \times \times \frac{(1+y)^2}{p_m} \int_{|p/p_m|}^1 J_0\left(2\beta(1+y)\sqrt{z^2 + \left|\frac{p}{p_m}\right|^2}\right) dz, \quad (3)$$

где Θ, J_0 – функции Хевисайда и Бесселя соответственно, $p_m = 2\beta\rho$.

Из (3) следует, что разрешающая способность АО-спектрометра принципиально ограничена, так как информация о высших “гармониках” спектра $\varphi(y)$ ($|p| > p_m$) полностью теряется. Поэтому однозначному восстановлению подлежит только участок фурье-образа $\varphi(y)$, который содержится в области $[-p_m, p_m]$.

Обозначим через функцию $\tilde{\varphi}(y)$ обратное фурье-преобразование этого участка. В соответствии

с теоремой Котельникова [5] $f(x)$ и $\tilde{\varphi}(y)$ полностью определяются своими значениями в точках

$$x_n = \frac{\pi n}{P_m}, y_k = \frac{\pi k}{P_m};$$

$$\tilde{\varphi}(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_k \operatorname{sinc}\left(\frac{yP_m}{\pi} - k\right), \quad \tilde{\varphi}_k = \tilde{\varphi}\left(\frac{kP_m}{\pi}\right), \quad (4)$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \operatorname{sinc}\left(\frac{xP_m}{\pi} - n\right), \quad f_n = f\left(\frac{nP_m}{\pi}\right). \quad (5)$$

Подставив (4) и (5) в (1), а затем, проделав соответствующие преобразования, получим следующую систему уравнений:

$$f\left(\frac{\pi n}{P_m}\right) = \frac{1}{2P_m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_k h\left(\frac{\pi n}{P_m} - \frac{\pi k}{P_m}, \frac{\pi k}{P_m}\right), \quad n = -\infty, \infty, \quad (6)$$

которая является дискретным представлением уравнения (1) в пространстве функций с финитным фурье-образом.

Пусть в результате измерений получен ряд показаний спектрометра $f_n (n = -N, \dots, 0, \dots, N)$ на равномерной сетке значений $x_n = \frac{\pi n}{P_m}$. Тогда значения f_n , согласно (6), определяются соотношением

$$f_n = \frac{1}{2P_m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_k h\left(\frac{\pi n}{P_m} - \frac{\pi k}{P_m}, \frac{\pi k}{P_m}\right), \quad n = -N, \dots, N. \quad (7)$$

В (7) выполняется неравенство для величин $h\left(\frac{\pi n}{P_m} - \frac{\pi k}{P_m}, \frac{\pi k}{P_m}\right)$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(h\left(\frac{\pi n}{P_m} - \frac{\pi k}{P_m}, \frac{\pi k}{P_m}\right) \right)^2 > \\ & > \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} h\left(\frac{\pi n}{P_m} - \frac{\pi k}{P_m}, \frac{\pi k}{P_m}\right) h\left(\frac{\pi n_1}{P_m} - \frac{\pi k}{P_m}, \frac{\pi k}{P_m}\right). \quad (8) \end{aligned}$$

Формула (8) является критерием Адамара, определяющего невырожденность матрицы Грамма [6],

образованной векторами $\left\{ h\left(\frac{\pi n}{P_m} - \frac{\pi k}{P_m}, \frac{\pi k}{P_m}\right) \right\}_{k=-\infty}^{\infty}$

Следовательно, эти векторы линейно независимы, а ранг матрицы системы (7) равен $2N + 1$.

Для того чтобы из (7) определить $\tilde{\varphi}_n$, необходимо ограничить пределы суммирования. При этом ранг матрицы, полученной в результате си-

стемы, должен оставаться равным $2N + 1$. Выбор предела суммирования K осуществляется из условия

$$\left| h\left(\frac{\pi n}{P_m} - \frac{\pi k}{P_m}, \frac{\pi k}{P_m}\right) \right| \leq \varepsilon, \quad n = -N, \dots, N, \quad (9)$$

где ε – заданная точность вычислений. Тогда имеем

$$f_n = \frac{1}{2P_m} \sum_{k=-K}^K \tilde{\varphi}_k h\left(\frac{\pi n}{P_m} - \frac{\pi k}{P_m}, \frac{\pi k}{P_m}\right), \quad n = -N, \dots, N. \quad (10)$$

Для решения системы (10) используем метод наименьших квадратов:

$$\sum_{n=-N}^N \left(\sum_{k=-K}^K \tilde{\varphi}_k h\left(\frac{\pi n}{P_m} - \frac{\pi k}{P_m}, \frac{\pi k}{P_m}\right) - 2P_m f_n \right)^2 \rightarrow \min. \quad (11)$$

Для задачи (11) уравнение Эйлера имеет вид

$$\sum_{j=-K}^K L_{kj} \tilde{\varphi}_k = 2P_m \sum_{n=-N}^N f_n h\left(\frac{\pi n}{P_m} - \frac{\pi k}{P_m}, \frac{\pi k}{P_m}\right), \quad (12)$$

где коэффициенты

$$L_{kj} = \sum_{n=-N}^N h\left(\frac{\pi n}{P_m} - \frac{\pi k}{P_m}, \frac{\pi k}{P_m}\right) h\left(\frac{\pi n}{P_m} - \frac{\pi j}{P_m}, \frac{\pi j}{P_m}\right) \quad (13)$$

образуют симметричную, положительно полуопределенную матрицу размером $[(2K + 1) \times (2K + 1)]$, ранг которой равен $(2N + 1)$.

Используя метод построения псевдообратного оператора (см. [6, 7]), найдем решение системы (12):

$$\tilde{\varphi}_k = 2P_m \sum_{l=1}^{2N+1} \eta_l \left(\sum_{n=-N}^N f_n u_n^{(l)} \right) v_k^{(l)}, \quad (14)$$

где $v_k^{(l)}$ ($l = 1, 2, \dots, 2K + 1$) – ортонормированные собственные векторы матрицы L_{ij} , образующие базис в пространстве решений. Весовые коэффициенты η_l определяются через собственные значения λ_l матрицы L_{ij} :

$$\eta_l = \begin{cases} 0, & \lambda_l = 0 \\ \sqrt{\frac{1}{\lambda_l}}, & \lambda_l \neq 0, \end{cases} \quad l = 1, 2, \dots, 2K + 1. \quad (15)$$

Векторы $u_n^{(l)}$ находятся по формуле

$$u_n^{(l)} = \eta_l \sum_{k=-K}^K v_k^{(l)*} h\left(\frac{\pi n}{P_m} - \frac{\pi k}{P_m}, \frac{\pi k}{P_m}\right), \quad (16)$$

$$n = -N, \dots, N, \quad l = 1, 2, \dots, 2K + 1.$$

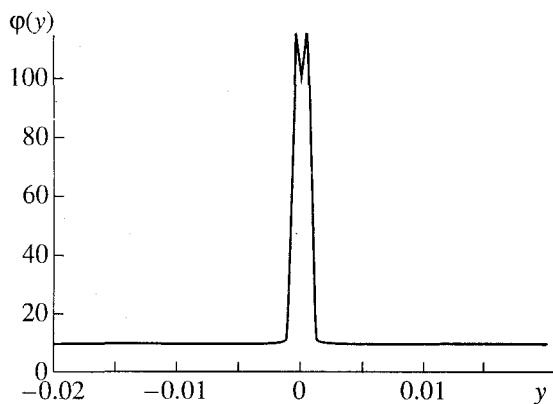


Рис. 1.

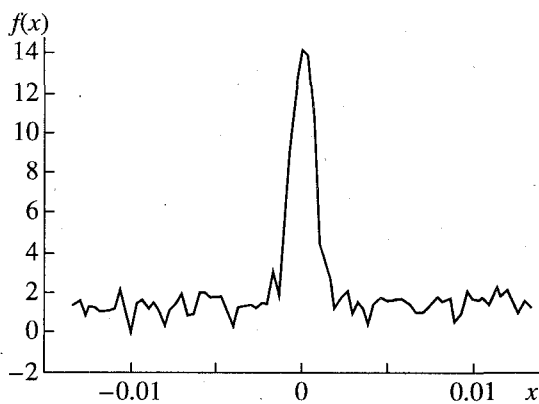


Рис. 2.

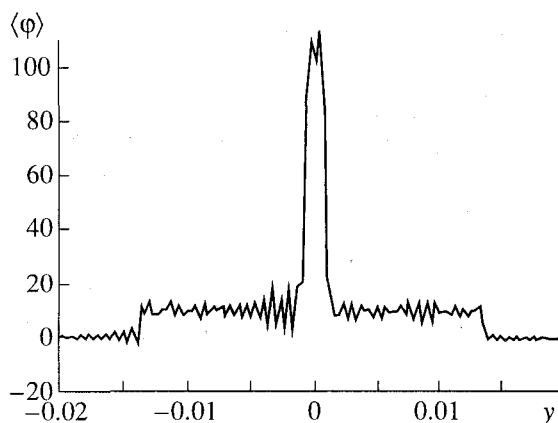


Рис. 3.

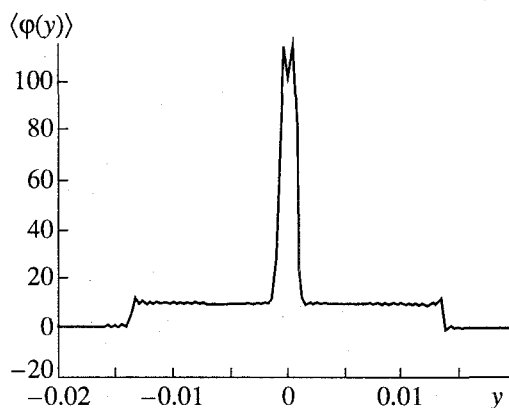


Рис. 4.

Они являются ортонормированным базисом в пространстве экспериментальных данных f_n .

3. Восстановление тонкой структуры спектра. Данный метод реставрации исследуемых спектров реализован в виде программы, на основании которой проведен ряд численных экспериментов по восстановлению тонкой структуры спектра для тех случаев, когда она не наблюдалась на АО-спектрограмме. На рис. 1 представлен график спектра, имеющего тонкую структуру в виде двух близко расположенных пиков. Рис. 2 характеризует результаты численного моделирования измерений спектра рис. 1 с помощью АО-спектрометра, имеющего 20% дифракционную эффективность АОФ. Случайная погрешность измерений имела вид гауссовского некоррелированного шума. Отношение сигнал/шум равнялось 25. Анализ численных результатов показывает, что АО-спектрометр не различает тонкую структуру спектра. Применение метода реставрации (14)–(16) с последующим усреднением по сериям позволяет восстановить исходный спектр, а также разрешить его тонкую структуру (рис. 3 и 4).

Таким образом, в данной работе предложен и обоснован метод восстановления спектров по данным АО-спектрометра. С помощью этого подхода впервые получены результаты, позволяющие дать практические рекомендации по увеличению разрешающей способности нового поколения АО-спектрометров. Предложенный в работе метод и программа, реализующая этот метод, с небольшими изменениями применимы и к другим типам спектрометров, использующих в качестве диспергирующего элемента дифракционную решетку или фурье-интерферометры. Следует отметить, что уравнение (1) также может быть решено с помощью нового математического аппарата атомарных функций, предложенных и развитых в [8–12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ананьев Е.Г., Пожар В.Э., Пустовойт В.И. // Оптика и спектроскопия. 1987. Т. 62. В. 1. С. 159–165.
2. Harris S.E., Wallace P.W. // JOSA. 1969. V. 59. № 3. P. 744–747.

3. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978.
4. Тихонов А.Н. // ДАН. 1963. Т. 153. № 1. С. 49–52.
5. Хургин Н.А., Яковлев В.П. Финитные функции в физике и технике. М.: Радио и связь, 1978.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука 1988.
7. Реконструкция изображений / Под ред. Г. Старка. М.: Мир, 1994.
8. Горшков А.С., Кравченко В.Ф. // Измер. техника. 1993. № 3. С. 3–5.
9. Кравченко В.Ф., Рвачев В.А., Рвачев В.Л. // РЭ. 1995. Т. 40. № 9. С. 1385–1406.
10. Кравченко В.Ф., Рвачев В.А., Пустовойт В.И. // ДАН. 1996. Т. 346. № 1. С. 31–32.
11. Кравченко В.Ф., Рвачев В.А., Пустовойт В.И. // Там же. Т. 347. № 3. С. 319–323.
12. Кравченко В.Ф., Рвачев В.А. // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи соврем. радиоэлектроники. 1996. № 4. С. 3–20.