М. Д. Сурначев, О неравенстве Харнака для $p(x)$-лапласиана, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2018, 069

DOI: 10.20948/prepr-2018-69

ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 69 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Сурначёв М.Д.

О неравенстве Харнака для p(x)-лапласиана

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Сурначёв М.Д. О неравенстве Харнака для p(x)-лапласиана // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 69. 32 с. doi:10.20948/prepr-2018-69
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-69

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

М. Д. Сурначёв

О неравенстве Харнака для $p(x)$-лапласиана

Москва — 2018

Сурначёв М. Д.

О неравенстве Харнака для $p(x)$-лапласиана

В работе доказывается неравенство Харнака для неотрицательных решений эллиптического $p(x)$-лапласиана и находятся достаточные условия на модуль непрерывности показателя p в точке, гарантирующие непрерывность решения в этой точке.

Ключевые слова: $p(x)$-лапласиан, переменный показатель, неравенство Харнака, непрерывность решения

Mikhail Dmitriyevich Surnachev

On Harnack's inequality for $p(x)$-Laplacian

In this note we prove a Harnack inequality for nonnegative solutions to elliptic $p(x)$-Laplacian and find conditions on the modulus of continuity of the exponent p at a given point which guarantee the continuity of solutions at this point.

Key words: $p(x)$-Laplacian, variable exponent, Harnack inequality, continuity of solutions

Оглавление

Введение

Настоящая заметка посвящена изучению локальной регулярности решений уравнения эллиптического $p(x)$-лапласиана

$$\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) = 0, \quad x \in D. \tag{1}$$

Здесь D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. На показатель p наложены условия

$$1 < \alpha \leqslant p(x) \leqslant \beta < +\infty, \quad \text{для п.в.} \quad x \in \Omega. \tag{2}$$

Такого рода уравнения и связанные с ними вопросы теории функций стали активно изучаться начиная с работ В.В. Жикова 1980-х годов [1], [2]. Исследования Жикова были мотивированы вопросами усреднения в механике композитных материалов. Далее уравнения с переменным показателем нелинейности получили приложения в моделировании электрореологических и термореологических жидкостей (см. [3], [4], [5]). С современной стадией развития теории уравнений и пространств с переменным показателем читатель может познакомиться по монографиям [6], [7], [8], а также по замечательной обзорной статье В.В. Жикова [9] и его книге [10].

Для определения понятия решения уравнения (1) введем класс функций

$$W(D) = \left\{ u \in W^{1,1}(D) : \ |\nabla u|^{p(x)} \in L^1(D) \right\},$$

где $W^{1,1}(D)$ – соболевское пространство функций, суммируемых в D вместе с обобщенными производными первого порядка. Будем говорить, что последовательность $u_j \in W(D)$ сходится в $W(D)$ к функции $u \in W(D)$, если $u_j \to u$ в $L^1(D)$ и выполняется

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_D |\nabla u - \nabla u_j|^{p(x)}\, dx = 0. \tag{3}$$

По теореме Шеффе или Рисса, последняя сходимость эквивалентна сходимости ∇u_j к ∇u почти всюду в D вместе со сходимостью энергий

$$\int\limits_D |\nabla u_j|^{p(x)}\, dx \to \int\limits_D |\nabla u|^{p(x)}\, dx.$$

Скажем, что $u \in W(D)$ принадлежит классу $W_0(D)$, если существует последовательность функций $u_j \in W(D)$ с компактным носителем в D, такая, что выполнено (3). Будем говорить, что последовательность $u_j \in W_0(D)$ сходится в $W_0(D)$ к функции $u \in W_0(D)$, если выполнено (3).

Определим также классы функций $H(D)$ и $H_0(D)$, являющиеся пополнениями в $W(D)$ и $W_0(D)$ гладких в D функций относительно введенных сходимостей:

$$H(D) = \{u \in W(D): \quad \exists\, u_j \in C^\infty(D) \cap W(D),\ u_j \to u \text{ в } W(D)\},$$
$$H_0(D) = \{u \in W(D): \quad \exists\, u_j \in C_0^\infty(D),\ u_j \to u \text{ в } W_0(D)\}.$$

В случае постоянного показателя p хорошо известно, что пространства $H(D)$ и $W(D)$ совпадают, то есть любая функция из $W^{1,p}(D)$ приближается по норме этого пространства бесконечно гладкими функциями. Из результатов работы В.В. Жикова [2] следует, что одного только предположения (2) недостаточно для плотности гладких функций в классах $W(D)$ и $W_0(D)$. Плотность гладких функций в данных классах обеспечивается выполнением условия

$$|p(x) - p(y)| \leqslant L \left(\ln \frac{1}{|x-y|}\right)^{-1} \quad \text{при } x, y \in D,\ |x-y| < 1/2, \tag{4}$$

найденного В.В. Жиковым [11]. В этом случае приближение функций гладкими осуществляется стандартными сглаживающими операторами (свёртка с гладким ядром осреднения).

Позже В.В. Жиковым [12] было найдено более точное условие плотности гладких функций в соболевском пространстве с переменным показателем. Пусть показатель p обладает модулем непрерывности ω, то есть

$$|p(x) - p(y)| \leqslant \omega(|x-y|), \quad x, y \in D, \quad |x-y| < 1/2,$$

где ω — непрерывная неубывающая функция на $[0,1/2]$, $\omega(0) = 0$. Если

$$\int_0^{1/2} t^{-1+\frac{n\omega(t)}{\alpha}}\, dt = \infty,$$

то $H = W$. Например, последнему условию удовлетворяет модуль непрерывности

$$\omega(t) = L \frac{\ln\ln(1/t)}{\ln(1/t)}, \quad 0 < L < \frac{n}{\alpha}. \tag{5}$$

В последнем случае В.В. Жиков и С.Е. Пастухова [13] установили свойство повышенной суммируемости градиента решения в классах Орлича.

В контексте настоящей работы совпадения H и W не предполагается, то есть гладкие функции могут быть не плотны в соболевском пространстве. В этом случае решение может определяться различным образом. Мы будем иметь дело с так называемыми H-решениями и W-решениями.

Скажем, что $u \in H(D)$ ($u \in W(D)$) есть H-решение (W-решение) уравнения (1), если интегральное тождество

$$\int\limits_D |\nabla u|^{p(x)-2}\, \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx = 0 \tag{6}$$

выполнено на пробных функциях $\psi \in H_0(D)$ (соответственно $\psi \in W_0(D)$). Функция $u \in H(D)$ ($u \in W(D)$) называется H-суперрешением (W-суперрешением) уравнения (1), если для всех неотрицательных пробных функций $\psi \in H_0(D)$ ($\psi \in W_0(D)$) выполняется

$$\int\limits_D |\nabla u|^{p(x)-2}\, \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx \geqslant 0. \tag{7}$$

Если коразмерность H в W больше единицы, то могут определяться и другие типы решений, соответствующие промежуточным между H и W пространствам.

Решение уравнения (1) может быть построено, например, путём минимизации функционала

$$F[u] = \int_D \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}\, dx$$

по функциям $u \in W(D)$, таким, что $u - f \in W_0(D)$ для заданной $f \in W(D)$ — это даст W-решение задачи Дирихле с граничной функций f, или по функциям $u \in H(D)$, таким, что $u - f \in H_0(D)$ для заданной $f \in H(D)$ — это даст H-решения задачи Дирихле с граничной функцией f (см. [10], [16], [17]).

Изучение локальных свойств решений уравнений типа (1) было начато Ю.А. Алхутовым в [14]. В этой работе при выполнении условия Жикова (4) была доказана гёльдеровская непрерывность решений и получен вариант неравенства Харнака. Для неотрицательных ограниченных решений (1) в шаре $B_{4R}^{x_0}$ выполняется

$$\sup_{B_R^{x_0}} u \leqslant C(n, \alpha, \beta, L, M) \left(\inf_{B_R^{x_0}} u + R \right), \quad M = \sup_D u.$$

Этот результат был усилен в [15], где гёльдеровская непрерывность решения в точке x_0 была получена при выполнении условия на модуль непрерывности показателя лишь в этой точке:

$$|p(x) - p(x_0)| \leqslant \frac{L}{\ln \frac{1}{|x - x_0|}}, \quad x \in D,\ |x - x_0| \leqslant 1/e. \tag{8}$$

В работе [16] при выполнении логарифмического условия (4) был доказан критерий Винера регулярности граничной точки. Недавно [17] было получено обобщение этого результата на случай, когда p удовлетворяет условию (8) для $x_0 \in \partial D$. Главным результатом [18] было доказательство гёльдеровской непрерывности решений $p(x)$-лапласиана с двухфазным показателем $p(x)$, имеющим разрыв при переходе гиперплоскости, при выполнении условия типа (8) с обеих сторон от поверхности разрыва. В [19] при этом же условии был доказан вариант неравенства Харнака.

В работе [20] была установлена непрерывность решения в точке $x_0 \in D$ при условии, более слабом, чем логарифмическое:

$$|p(x) - p(x_0)| \leqslant L \frac{\ln \ln \ln |x - x_0|^{-1}}{\ln |x - x_0|^{-1}}, \quad x \in D, \ |x - x_0| \leqslant 1/27, \tag{9}$$

где $L < L_0(n, \alpha)$. При этом модуль непрерывности решения уже может иметь не степенной характер, а логарифмический.

Основной целью настоящей заметки является уточнение результатов [20] и получение неравенства Харнака при условии (9). Схема построения работы следующая. Вначале мы получаем оценки максимума модуля решения. Затем будут даны оценки модуля непрерывности решения. В этих разделах мы следуем [20]. В заключительном разделе доказано неравенство Харнака слабого типа для неотрицательных суперрешений. Совмещая его с оценкой максимума решения, получаем неравенство Харнака для решений (1).

Отметим, что классический способ доказательства неравенства Харнака, восходящий к J. Moser [23] и изложенный для уравнения типа p-лапласиана с постоянным показателем p в [21], [22], использует принадлежность логарифма решения пространству BMO (функции с ограниченным средним колебанием). При выполнении глобального условия (4) такой метод также работает (см. [14]), однако для более слабого условия (8), а тем более, (9), становится неприменим. Мы используем модификацию метода N. Trudinger [24], разработанного изначально для анализа решений неравномерно эллиптических уравнений. Этот метод использует лишь информацию в окрестности данной точки.

Далее через $B_R^{x_0}$ будем обозначать (открытый) шар радиуса R с центром в точке x_0. Через C обозначаем константы, встречающиеся по ходу доказательства. Значение C может меняться даже в пределах одной строки. Выражение $C = C(\dots)$ означает, что C зависит лишь от величин, указанных в скобках. Для измеримого множества E и $f \in L^1(E)$ обозначаем $⨍_E f\,dx = |E|^{-1} \int_E f\,dx$.

Будем считать, что модуль непрерывности показателя в точке x_0 имеет вид

$$\operatorname*{ess\,osc}_{B_r^{x_0}} p \leqslant \omega(|x - x_0|), \quad \omega(r) = \frac{\ln \theta(r)}{\ln r^{-1}}.$$

В этих обозначениях

$$r^{-\omega(r)} = \exp\left(-\ln r \frac{\ln\theta(r)}{-\ln r}\right) = \theta(r). \tag{10}$$

Без ограничения общности считаем, что $\theta(r) \geqslant 1$. Обозначаем $\kappa = n/(n-1)$.

Под решением (1) мы будем понимать H-решение или W-решение. В дальнейшем будем писать просто решение. То же относится и к суперрешениям.

Сформулируем достаточные условие непрерывности решений (1) в точке x_0. Следующая теорема является небольшим уточнением результатов [20].

Теорема 1. *Пусть u — решение* (1) *в D, $\sup_D |u| \leqslant M$. Найдётся такая константа $C = C(n,\alpha,\beta,M)$, что если ряд*

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \exp\left(-C\theta(e^{-j})^{(n+\alpha)/\alpha}\right) \tag{11}$$

расходится, то функция u непрерывна в точке x_0, причём если $B_{R_0}^{x_0} \subset D$, $R_0 \leqslant 1$, то

$$\operatorname*{ess\,osc}_{B^{x_0}_{e^{-k}R_0}} u \leqslant (2M+1)\exp\left(-\sum_{j=0}^{k-1}\exp\left(-C\theta(e^{-j})^{(n+\alpha)/\alpha}\right)\right). \tag{12}$$

Если θ монотонно не возрастает ($\theta(t) \leqslant \theta(\tau)$ если $t \geqslant \tau$), то расходимость ряда (11) *следует из расходимости интеграла*

$$\int_0 \exp\left(-C\theta(r)^{(n+\alpha)/\alpha}\right)\frac{dr}{r}, \quad C = C(n,\alpha,\beta,M). \tag{13}$$

При этом, если $B_{R_0}^{x_0} \subset D$, $R_0 \leqslant 1$, $R \leqslant e^{-1}R_0$, то

$$\operatorname*{ess\,osc}_{B^{x_0}_{R}} u \leqslant (2M+1)\exp\left(-\int_{eR}^{R_0}\exp\left(-C\theta(r)^{(n+\alpha)/\alpha}\right)\frac{dr}{r}\right). \tag{14}$$

Под непрерывностью понимается непрерывность с точностью до изменения функции на множестве нулевой меры (оценки (12) и (14) для существенной осцилляции).

Некоторый недостаток условия расходимости ряда (11) или интеграла (13) состоит в том, что в условии присутствует константа, зависящая от максимума модуля решения. Из доказательства видно, что эту зависимость можно оценить как $C \leqslant C(n,\alpha,\beta)(M+1)^{\gamma(n,\alpha,\beta)}$, при возрастании M константа может расти со степенной скоростью, если $M \leqslant 1$, то зависимостью от M можно пренебречь.

Сформулируем простое следствие теоремы 1, в котором мы избавляемся от зависимости константы C от M в условии (13). Будем использовать обозначения теоремы 1.

Следствие. *Пусть* $\theta(r) = o(H(r))$ *при* $r \to 0$*,* H *монотонно не возрастает и*

$$\int_0 \exp\left(-H(r)^{(n+\alpha)/\alpha}\right)\frac{dr}{r} = +\infty.$$

Тогда u *непрерывно в точке* x_0*, и для достаточно малых* R_0 *справедливо*

$$\operatorname*{ess\,osc}_{B_R^{x_0}} u \leqslant (2M+1)\cdot\exp\left(-\int_{eR}^{R_0}\exp\left(-H(r)^{(n+\alpha)/\alpha}\right)\frac{dr}{r}\right).$$

Приведём явное условие на θ, которое гарантирует расходимость ряда (11). Это фактически условие работы [20] (см. (9)).

Теорема 2. *Пусть* u *— ограниченное решение* (1) *в* $B_{R_0}^{x_0}$*,* $R_0 \leqslant 1/30$*. Если* $\theta(R) \leqslant L(\ln\ln R^{-1})^l$*,* $l < \alpha/(n+\alpha)$*, то функция* u *непрерывна в точке* x_0*, причём для* $R \leqslant R_0$ *выполняется*

$$\operatorname*{ess\,osc}_{B_R^{x_0}} u \leqslant C(n,\alpha,\beta,M,L,R_0,\gamma)\left(\ln\frac{1}{R}\right)^{-\gamma} \tag{15}$$

для всех $\gamma > 0$*.*

Так как нас интересует поведение в окрестности точки x_0, то величину α можно брать сколь угодно близкой к $p(x_0)$, следовательно, вторая часть утверждения теоремы выполняется для $l < p(x_0)/(n+p(x_0))$.

В следующей теореме мы получаем обобщение неравенства Харнака слабого типа для суперрешений.

Теорема 3. *Пусть* u *— неотрицательное ограниченное суперрешение* (1) *в* $B = B_{4R}^{x_0}$*,* $M = \sup_B u$*,* $s = \operatorname{ess\,inf}_B p$*. Тогда для любого* $0 < q < n(s-1)/(n-s)$ *справедливо*

$$\left(\fint_{B_{2R}^{x_0}}(u+R)^q\,dx\right)^{1/q} \leqslant \exp\left(C(n,\alpha,\beta,M,q)\theta(4R)^{2(n+s)/s}\right)\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0}}(u+R). \tag{16}$$

Основным результатом работы является аналог неравенства Харнака.

Теорема 4. *Пусть* u *— неотрицательное ограниченное суперрешение* (1) *в* $B_{4R}^{x_0}$*,* $M = \sup_B u$*,* $s = \operatorname{ess\,inf}_B p$*. Тогда*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_R^{x_0}} u \leqslant \exp\left(C(n,\alpha,\beta,M)\theta(4R)^{3(n+s)/(s-1)}\right)\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0}}(u+R). \tag{17}$$

Сформулируем лемму, доказательство которой здесь приводить не будем, см. [16] (или [17]).

Утверждение 5. *Пусть* $u \in W(D)$ *(*$u \in H(D)$*),* $m \leqslant u \leqslant M$*, а* f *— липшицева на* $[m, M]$ *функция. Тогда* $f(u) \in W(D)$ *(*$f(u) \in H(D)$*). Если* $\xi \in C_0^\infty(D)$*, то* $u\xi \in W_0(D)$ *(*$u\xi \in H_0(D)$*).*

Нам понадобится следующее простое хорошо известное утверждение.

Утверждение 6. *Пусть ограниченная последовательность* Y_j *удовлетворяет* $Y_j \leqslant Cb^j Y_{j+1}^r$, $0 < r < 1$. *Тогда* $Y_0 \leqslant (2C)^{1/(1-r)} b^{r/(1-r)^2}$.

Приведём его доказательство. По неравенству Юнга,

$$Y_j \leqslant \varepsilon Y_{j+1} + \varepsilon^{r/(r-1)} b^{j/(1-r)} C^{1/(1-r)}.$$

Итерируя это неравенство, имеем

$$Y_0 \leqslant \varepsilon^k Y_k + C^{1/(1-r)} \varepsilon^{r/(r-1)} \sum_{j=0}^{k-1} (\varepsilon b^{1/(1-r)})^j.$$

Полагая $\varepsilon = b^{1/(r-1)}/2$ и устремляя k к бесконечности, получим требуемое утверждение.

Супремум оценки решения

Вообще говоря, для переменного показателя $p(x)$ ограниченность решения не гарантирована. Решения будут локально ограниченными, если, например, отношение между максимальным и минимальным значением показателя не превосходит $n/(n-1)$. Мы работаем по умолчанию с ограниченными решениями. В этом разделе считаем решение u неотрицательным. Будем использовать стандартную схему итерации Мозера.

Зафиксируем шар $B = B_{4R}^{x_0}$. Пусть $\eta \in C_0^\infty(B)$. Обозначим

$$M = \operatorname*{ess\,sup}_B u, \quad s = \operatorname*{ess\,inf}_B p.$$

Начнём с энергетической оценки для степеней решения.

Утверждение 7. *Для всех* $\gamma \geqslant 1$ *выполняется неравенство*

$$\begin{gathered} R^s \int_B |\nabla u|^s (u+R)^{\gamma-1} \eta^\beta \, dx \leqslant \\ \leqslant C(\alpha, \beta) \theta(4R) (M+1)^\beta \int_B (u+R)^{\gamma+s-1} (\eta^\beta + (R|\nabla \eta|)^\beta) \, dx. \end{gathered} \tag{18}$$

Доказательство. Возьмём в интегральном тождестве (6) пробную функцию

$$\psi = (u+R)^{\gamma}\eta^{\beta}, \quad \gamma \geqslant 1.$$

Получим

$$\gamma \int_B |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{\gamma-1}\eta^{\beta}\,dx = -\beta \int_B (u+R)^{\gamma}\eta^{\beta-1}|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla \eta\,dx.$$

Разделив это равенство на γ и используя неравенство Юнга для оценки правой части, приходим к

$$\int_B |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{\gamma-1}\eta^{\beta}\,dx \leqslant C(\alpha,\beta)\int_B (u+R)^{\gamma-1+p(x)}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{\beta-p(x)}\,dx. \tag{19}$$

Используя простые оценки $|\nabla u|^s \leqslant |\nabla u|^{p(x)}+1$, $(u+R)^{p(x)-s} \leqslant (M+1)^{\beta}$, и $(u+R)^{-s} \leqslant R^{-s}$, из неравенства (19) получим

$$\begin{aligned}\int_B |\nabla u|^{s}(u+R)^{\gamma-1}\eta^{\beta}\,dx \leqslant R^{-s}\int_B (u+R)^{\gamma-1+s}\eta^{\beta}\,dx +\\ + C(\alpha,\beta)(M+1)^{\beta}\int_B (u+R)^{\gamma-1+s}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{\beta-p(x)}\,dx.\end{aligned} \tag{20}$$

Умножая (20) на R^s и используя (10), имеем

$$\begin{aligned}R^s\int_B |\nabla u|^{s}(u+R)^{\gamma-1}\eta^{\beta}\,dx \leqslant \int_B (u+R)^{\gamma-1+s}\eta^{\beta}\,dx +\\ + C(\alpha,\beta)(M+1)^{\beta}\theta(4R)\int_B (u+R)^{\gamma-1+s}(R|\nabla\eta|)^{p(x)}\eta^{\beta-p(x)}\,dx.\end{aligned}$$

Оценивая по неравенству Юнга

$$(R|\nabla\eta|)^{p(x)}\eta^{\beta-p(x)} \leqslant \eta^{\beta} + (R|\nabla\eta|)^{\beta}, \tag{21}$$

получаем (18). Утверждение 7 доказано □

Получим теперь оценку решения мозеровского типа.

Утверждение 8. *Для неотрицательного решения* (1) *в шаре* $B_{2R}^{x_0}$ *и любого* $0 < q \leqslant s$ *выполняется*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_R^{x_0}}(u+R) \leqslant C(n,\alpha,\beta,M)^{s/q}\theta(4R)^{n/q}\left(\fint_{B_{2R}^{x_0}}(u+R)^q\,dx\right)^{1/q}. \tag{22}$$

Доказательство. Пусть $1/2 < \sigma < t \leqslant 2$, $R_j = R(s+2^{-j}(t-s))$, $\kappa = n/(n-1)$, последовательность γ_j задана соотношениями $\gamma_0 = 1$, $\gamma_{j+1}+s-1 = (\gamma_j+s-1)\kappa$. То есть $\gamma_j + s - 1 = \kappa^j s$. Пусть функции $\eta_j \in C_0^\infty(B_{R_j}^{x_0})$, $0 \leqslant \eta_j \leqslant 1$, $\eta_j = 1$ на $B_{R_{j+1}}^{x_0}$, $|\nabla\eta_j| \leqslant 2^{1+j}R^{-1}(t-\sigma)^{-1}$. Из оценки (18) получаем тогда

$$\begin{gathered} R^s \fint_{B_{R_j}^{x_0}} |\nabla((u+R)^{(\gamma_j+s-1)/s}\eta_j^{\beta/s})|^s\,dx \leqslant \\ \leqslant C(\alpha,\beta)\theta(4R)(M+1)^\beta 2^{\beta j}(t-\sigma)^{-\beta}(\gamma_j+s-1)^s \fint_{B_{R_j}^{x_0}} (u+R)^{\gamma_j+s-1}\,dx. \end{gathered} \tag{23}$$

Применяя неравенство Соболева, будем иметь

$$\begin{gathered} \fint_{B_{R_{j+1}}^{x_0}} (u+R)^{\gamma_{j+1}+s-1}\,dx \leqslant 4^n \fint_{B_{R_j}^{x_0}} (u+R)^{\gamma_{j+1}+s-1}\eta_j^{\beta\kappa}\,dx \leqslant \\ \leqslant \left(C(n,\alpha,\beta,M)2^{\beta j}(t-\sigma)^{-\beta}\theta(4R)(\gamma_j+s-1)^s \fint_{B_{R_j}^{x_0}} (u+R)^{\gamma_j+s-1}\,dx\right)^\kappa. \end{gathered} \tag{24}$$

Обозначая

$$Y_j = \left(\fint_{B_{R_j}^{x_0}} (u+R)^{\gamma_j+s-1}\,dx\right)^{1/(\gamma_j+s-1)}, \tag{25}$$

запишем неравенство (24) как

$$Y_{j+1} \leqslant \left(C2^{\beta j}\theta(4R)(\gamma_j+s-1)^s(t-\sigma)^{-\beta}\right)^{1/(\gamma_j+s-1)} Y_j, \quad C = C(n,\alpha,\beta,M).$$

Итерируя это неравенство, придём к оценке

$$Y_k \leqslant \prod_{j=0}^{k-1} (C\theta(4R)(t-\sigma)^{-\beta})^{\kappa^{-j}/s} 2^{\beta j\kappa^{-j}/s}(s\kappa^j)^{\kappa^{-j}} Y_0.$$

Отсюда легко получаем ($\sum_{j=0}^\infty \kappa^{-j} = n$, $\sum_{j=0}^\infty j\kappa^{-j} = n(n-1)$)

$$\limsup_{k\to\infty} Y_k \leqslant C(n,\alpha,\beta,M)(t-\sigma)^{-n\beta/s}\theta(4R)^{n/s}Y_0.$$

Так как $\operatorname{ess\,sup}_{B_{\sigma R}^{x_0}}(u+R) \leqslant \limsup_{k\to\infty} Y_k$, то

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_{\sigma R}^{x_0}}(u+R) \leqslant C\theta(4R)^{n/s}(t-\sigma)^{-n\beta/s}\left(\fint_{B_{tR}^{x_0}} (u+R)^s\,dx\right)^{1/s}. \tag{26}$$

Обозначим

$$\tilde{R}_j = R(2 - 2^{-j}), \quad M_j = \sup_{B^{x_0}_{\tilde{R}_j}} (u + R).$$

Из (26) для $q < s$ имеем

$$M_j \leqslant C\theta(4R)^{n/s} 2^{nj\beta/s} M_{j+1}^{(s-q)/s} I^{q/s}, \quad I = \left(\fint_{B^{x_0}_{2R}} (u+R)^q \, dx \right)^{1/q}.$$

Пользуясь утверждением 6, где $r = (s-q)/s$, получаем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B^{x_0}_R} (u + R) = M_0 \leqslant C(n, \alpha, \beta, M)^{s/q} \theta (4R)^{n/q} I.$$

Чтобы получить оценку (22) для $q \geqslant s$, надо взять $\gamma_0 = q + 1 - s$. Утверждение 8 доказано. □

Несложно показать, что в оценке (22) вместо u можно брать положительную и отрицательные части решения $u_+ = \max\{u,0\}$, $u_- = \max\{-u,0\}$, или модуль решения $|u|$.

Оценки модуля непрерывности решения

В этом разделе мы получим оценку на скорость убывания осцилляции решения при переходе от шара к концентрическому с ним шару меньшего радиуса. Пусть u — ограниченное решение (1) в шаре $B^{x_0}_{eR}$. Пусть

$$M_{eR} = \operatorname*{ess\,sup}_{B^{x_0}_{eR}} u, \quad m_{eR} = \operatorname*{ess\,inf}_{B^{x_0}_{eR}} u, \quad M = \operatorname*{ess\,sup}_{D} u,$$

где e — основание натурального логарифма. Введём функцию

$$v = \ln \frac{M_{eR} - m_{eR} + 2R}{M_{eR} - u + R}. \tag{27}$$

Также обозначим

$$\mu(r) = \operatorname*{ess\,osc}_{B^{x_0}_r} u = M_r - m_r, \quad s = \operatorname*{ess\,inf}_{B^{x_0}_{eR}} p.$$

Получим супремум оценку для функции v мозеровского типа.

Утверждение 9. *Для функции v, определённой в* (27)*, справедлива оценка*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B^{x_0}_R} v \leqslant C(n, \alpha, \beta, M)\theta(eR)^{n/s} \left(\fint_{B^{x_0}_{2R}} v^s \, dx \right)^{1/s}. \tag{28}$$

Доказательство. Выберем в интегральном тождестве (6) пробную функцию
$$\psi = v^{\gamma}(M_{eR}-u+R)^{1-s}\eta^{\beta}, \quad \gamma \geqslant 1, \quad \eta \in C_0^{\infty}(B_{eR}^{x_0}), \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1.$$
Будем иметь
$$\gamma \int_{B_{eR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)}(M_{eR}-u+R)^{-s}v^{\gamma-1}\eta^{\beta}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \beta \int_{B_{eR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)-1}(M_{eR}-u+R)^{1-s}v^{\gamma}\eta^{\beta-1}|\nabla\eta|\,dx.$$
Применяя неравенство Юнга, и $\nabla v = (M_{eR}-u+R)^{-1}\nabla u$, получаем
$$\int_{B_{eR}^{x_0}} |\nabla v|^{p(x)}(M_{eR}-u+R)^{p(x)-s}v^{\gamma-1}\eta^{\beta}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C(\alpha,\beta)\int_{B_{eR}^{x_0}} \gamma^{-p(x)}v^{\gamma+s-1}(v(M_{eR}-u+R))^{p(x)-s}\eta^{\beta-p(x)}|\nabla\eta|^{p(x)}\,dx.$$
Оценим теперь выражение
$$w = v(M_{eR}-u+R) = (M_{eR}-u+R)\ln\frac{M_{eR}-m_{eR}+2R}{M_{eR}-u+R}.$$
Путём подсчёта производной нетрудно установить, что
$$w \leqslant \xi(eR) = \max\left(\frac{\mu(eR)+2R}{e},\ R\ln\frac{\mu(eR)+2R}{R}\right) \leqslant \max((e-2)^{-1}\mu(eR), R).$$
Кроме того, по неравенству Юнга,
$$|\nabla v|^s \leqslant |\nabla v|^{p(x)}(M_{eR}-u+R)^{p(x)-s} + (M_{eR}-u+R)^{-s}. \tag{29}$$
Поэтому,
$$\int_{B_{eR}^{x_0}} |\nabla v|^s v^{\gamma-1}\eta^{\beta}\,dx \leqslant \int_{B_{eR}^{x_0}} (M_{eR}-u+R)^{-s}v^{\gamma-1}\eta^{\beta}\,dx +$$
$$+ C(\alpha,\beta)(M+1)^{\beta}\int_{B_{eR}^{x_0}} \gamma^{-p(x)}v^{\gamma+s-1}\eta^{\beta-p(x)}|\nabla\eta|^{p(x)}\,dx.$$
Отсюда легко получаем
$$⨍_{B_{eR}^{x_0}} \left|\nabla\left(v^{(\gamma+s-1)/s}\eta^{\beta/s}\right)\right|^s dx \leqslant$$
$$\leqslant C(\alpha,\beta,M)(\gamma+s-1)^s ⨍_{B_{eR}^{x_0}} v^{\gamma+s-1}(\eta^{\beta-s}|\nabla\eta|^s + \eta^{\beta-p(x)}|\nabla\eta|^{p(x)} + w^{-s}\eta^{\beta})\,dx.$$

Если $\mu(eR)+2R>eR$, оценим

$$\min w \geqslant \min\left(R\ln\frac{\mu(eR)+2R}{R},\ (\mu(eR)+R)\ln\frac{\mu(eR)+2R}{\mu(eR)+R}\right)\geqslant R\ln 2.$$

Здесь для оценки второго члена использовали формулу Тейлора и тот факт, что в этом случае $R/(\mu(eR)+R)\leqslant 1/(e-1)<1$. Если $\mu(eR)+2R\leqslant eR$, оценим

$$\min w \geqslant (\mu(eR)+R)\ln\frac{\mu(eR)+2R}{\mu(eR)+R}\geqslant R\ln\frac{e}{e-1}.$$

Таким образом, в обоих случаях $\min(w/R)$ оценивается снизу абсолютной константой.

Используя (10) и (21), приходим к оценке

$$R^s \fint_{B_{eR}^{x_0}}\left|\nabla\left(v^{(\gamma+s-1)/s}\eta^{\beta/s}\right)\right|^s dx \leqslant$$
$$\leqslant C(\alpha,\beta,M)(\gamma+s-1)^s\theta(eR)\int_{B_{eR}^{x_0}} v^{\gamma+s-1}(\eta^\beta+(R|\nabla\eta|)^\beta)\,dx.$$

Это фактически та же оценка, что и (23), только для функции v вместо $u+R$, $t=2$, $\sigma=1$. Повторяя рассуждения, приведённые в доказательстве Утверждения 8, придём к оценке типа (26) для v:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_R^{x_0}} v \leqslant C\theta(eR)^{n/s}\left(\fint_{B_{2R}^{x_0}} v^s\,dx\right)^{1/s}.$$

Это и есть искомая оценка (28). Утверждение 9 доказано. □

Для того чтобы оценить интеграл в правой части (28), докажем следующее утверждение.

Утверждение 10. *Для функции v, введённой* (27)*, выполняется*

$$R^s\fint_{B_{2R}^{x_0}}|\nabla v|^s\,dx\leqslant C(\alpha,\beta,M)\theta(eR). \tag{30}$$

Доказательство. Возьмём в (6) пробную функцию $\psi=(M_{eR}-u+R)^{1-s}\eta^\beta$, $\eta\in C_0^\infty(B_{eR}^{x_0})$, $\eta=1$ на $B_{2R}^{x_0}$, $0\leqslant\eta\leqslant 1$, $|\nabla\eta|\leqslant 4(e-2)^{-1}R^{-1}$. Имеем

$$(s-1)\int_{B_{eR}^{x_0}}|\nabla u|^{p(x)}(M_{eR}-u+R)^{-s}\eta^\beta\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\beta\int_{B_{eR}^{x_0}}|\nabla u|^{p(x)-1}(M_{eR}-u+R)^{1-s}\eta^{\beta-1}|\nabla\eta|\,dx.$$

Или же

$$\int_{B_{eR}^{x_0}} |\nabla v|^{p(x)} (M_{eR} - u + R)^{p(x)-s} \eta^\beta \, dx \leqslant$$
$$\leqslant C(\alpha, \beta) \int_{B_{eR}^{x_0}} |\nabla v|^{p(x)-1} (M_{eR} - u + R)^{p(x)-s} \eta^{\beta-1} |\nabla \eta| \, dx.$$

По неравенству Юнга,

$$\int_{B_{eR}^{x_0}} |\nabla v|^{p(x)} (M_{eR} - u + R)^{p(x)-s} \eta^\beta \, dx \leqslant$$
$$\leqslant C(\alpha, \beta) \int_{B_{eR}^{x_0}} (M_{eR} - u + R)^{p(x)-s} \eta^{\beta-p(x)} |\nabla \eta|^\beta \, dx.$$

Используя (29), получим отсюда

$$\int_{B_{eR}^{x_0}} |\nabla v|^s \eta^\beta \, dx \leqslant$$
$$\leqslant C(\alpha, \beta) \int_{B_{eR}^{x_0}} (M_{eR} - u + R)^{p(x)-s} \eta^{\beta-p(x)} |\nabla \eta|^{p(x)} \, dx + \int_{B_{eR}^{x_0}} (M_{eR} - u + R)^{-s} \eta^\beta.$$

Домножая последнее неравенство на R^{s-n}, с помощью (10) и (21), приходим к (30). Утверждение 10 доказано. □

Сформулируем оценку уменьшения осцилляции при переходе от большего шара к меньшему. Напомним, что $\mu(r)$ — существенная осцилляция решения на шаре $B_r^{x_0}$.

Утверждение 11. *Для ограниченного решения u уравнения* (1) *в $B_{eR}^{x_0}$ выполняется*

$$\mu(R) \leqslant \left(1 - \exp\left(-C\theta(eR)^{(n+s)/s}\right)\right) \mu(eR) + R,$$

где $C = C(n, \alpha, \beta, M)$.

Доказательство. Предположим, что

$$|\{u < (M_{eR} + m_{eR})/2\} \cap B_{2R}^{x_0}| > \frac{1}{2} |B_{2R}^{x_0}|. \tag{31}$$

На множестве, где $u \leqslant (M_{eR} + m_{eR})/2$, выполняется $v \leqslant \ln 2$. Пользуясь неравенством Пуанкаре и оценкой (30), найдём тогда

$$⨍_{B_{2R}^{x_0}} (v - \ln 2)_+^s \, dx \leqslant C(n, s) R^s ⨍_{B_{2R}^{x_0}} |\nabla v|^s \, dx \leqslant C(\alpha, \beta, n, M) \theta(eR).$$

Таким образом, в случае выполнения (31), пользуясь (28), имеем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_R^{x_0}} v \leqslant C(n,\alpha,\beta,M)\theta(eR)^{(n+s)/s}.$$

По определению v (см. (27)), последнее даст

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_R^{x_0}} u \leqslant m_{eR} + \left(1 - \exp\left(-C\theta(eR)^{(n+s)/s}\right)\right)(M_{eR} - m_{eR}) + R.$$

Если не выполнено (31), то выполняется

$$|\{u \geqslant (M_{eR} + m_{eR})/2\} \cap B_{2R}^{x_0}| \leqslant \frac{1}{2}|B_{2R}^{x_0}|. \tag{32}$$

Тогда для функции $\tilde{u} = M_{eR} + m_{eR} - u$ имеет место

$$|\{\tilde{u} \leqslant (M_{eR} + m_{eR})/2\} \cap B_{2R}^{x_0}| > \frac{1}{2}|B_{2R}^{x_0}|.$$

Применяя рассуждения выше для $\tilde{u}$ вместо u, получим

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_R^{x_0}}(M_{eR} + m_{eR} - u) \leqslant m_{eR} + \left(1 - \exp\left(-C\theta(eR)^{(n+s)/s}\right)\right)(M_{eR} - m_{eR}) + R,$$

откуда

$$\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} u \geqslant M_{eR} - \left(1 - \exp\left(-C\theta(eR)^{(n+s)/s}\right)\right)(M_{eR} - m_{eR}) - R.$$

В обоих случаях приходим к оценке

$$\mu(R) \leqslant \left(1 - \exp\left(-C\theta(eR)^{(n+s)/s}\right)\right)\mu(eR) + R. \tag{33}$$

Утверждение 11 доказано. □

Доказательство теоремы 1. Можно считать, без ограничения общности, что в (33) константа $C \geqslant 2$. Тогда из (33) следует

$$\mu(R) + R \leqslant \left(1 - \exp\left(-C\theta(eR)^{(n+s)/s}\right)\right)(\mu(eR) + eR). \tag{34}$$

Возьмём теперь последовательность $R_j = e^{-j}R_0$. Итерация (34) даст

$$\mu(R_k) + R_k \leqslant \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - \exp\left(-C\theta(R_j)^{(n+\alpha)/\alpha}\right)\right)(\mu(R_0) + R_0)\,. \tag{35}$$

В силу вогнутости логарифма, $\ln(1-x) \leqslant -x$, поэтому

$$\prod_{j=0}^{k}(1-x_j) = \exp\left(\sum_{j=0}^{k}\ln(1-x_j)\right) \leqslant \exp\left(-\sum_{j=0}^{k}x_j\right).$$

Таким образом,

$$\mu(R_k) + R_k \leqslant (\mu(R_0) + R_0)\exp\left(-\sum_{j=0}^{k-1}\exp\left(-C\theta(R_j)^{(n+\alpha)/\alpha}\right)\right). \tag{36}$$

Следовательно, расходимость ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty}\exp\left(-C\theta(R_j)^{(n+\alpha)/\alpha}\right) \tag{37}$$

влечёт стремление к нулю осцилляции решения по стягивающимся к x_0 шарам.

Если θ монотонно не возрастает, то

$$\exp\left(-C\theta(R_j)^{(n+\alpha)/\alpha}\right) \geqslant \int_{R_{j+1}}^{R_j}\exp\left(-C\theta(r)^{(n+\alpha)/\alpha}\right)\frac{dr}{r}.$$

Поэтому расходимость ряда (37) следует из расходимости интеграла

$$\int_0 \exp\left(-C\theta(r)^{(n+\alpha)/\alpha}\right)\frac{dr}{r}. \tag{38}$$

При этом из (36) получаем

$$\mu(R_j) \leqslant (\mu(R_0) + R_0)\exp\left(-\int_{R_j}^{R_0}\exp\left(-C\theta(r)^{(n+\alpha)/\alpha}\right)\frac{dr}{r}\right).$$

Соответственно, для произвольного $R \leqslant e^{-1}R_0$ находим

$$\operatorname*{ess\,osc}_{B_R^{x_0}} u \leqslant (\operatorname*{ess\,osc}_{B_{R_0}^{x_0}} u + R_0)\exp\left(-\int_{eR}^{R_0}\exp\left(-C\theta(r)^{(n+\alpha)/\alpha}\right)\frac{dr}{r}\right).$$

Теорема 1 доказана. □

Доказательство теоремы 2. Будем пользоваться обозначениями доказательства теоремы 1. Пусть

$$\theta(R) = L(\ln\ln(1/R))^l, \quad R_0 = e^{-j_0}, \quad j_0 \geqslant 1, \quad R_k = e^{-k}R_0.$$

Из (36) следует

$$\mu(R_k)+R_k\leqslant(\mu(R_0)+R_0)\exp\left(-\sum_{j=j_0}^{j_0+k-1}\exp\left(-C(L\ln^l j)^{(n+\alpha)/\alpha}\right)\right). \quad (39)$$

Нетрудно видеть, что ряд

$$\sum_{j=j_0}^{\infty}\exp\left(-C(L\ln^l j)^{(n+\alpha)/\alpha}\right)$$

расходится, если $l<\alpha/(n+\alpha)$. В этом случае члены ряда убывают медленнее, чем j^{-1}. Обозначим $\delta=l(n+\alpha)/\alpha<1$. Пусть

$$e^{-j_0-k-1}<R\leqslant e^{-j_0-k}\Leftrightarrow \ln\frac{1}{eR}<k+j_0\leqslant\ln\frac{1}{R}.$$

Из (39) и монотонного роста $C(\ln^l j)^{(n+\alpha)/\alpha}$ находим

$$\operatorname*{ess\,osc}_{B_R^{x_0}} u\leqslant(\mu(R_0)+R_0)\exp\left(-\int_{j_0}^{j_0+k}e^{-C\ln^\delta x}\,dx\right).$$

Интегрируя по частям, и используя монотонное убывание подинтегральной функции, оценим

$$\int_{j_0}^{j_0+k}e^{-C\ln^\delta x}\,dx\geqslant(k+j_0)e^{-C\ln^\delta(k+j_0)}-j_0e^{-C\ln^\delta j_0}.$$

Следовательно,

$$\operatorname*{ess\,osc}_{B_R^{x_0}} u\leqslant(\mu(R_0)+R_0)C(R_0)\exp\left(-\ln\frac{1}{eR}\exp\left(-C\ln^\delta\ln\frac{1}{eR}\right)\right). \quad (40)$$

Так как для любого $A>0$ найдётся такая константа B, что

$$xe^{-C\ln^\delta x}\geqslant A\ln x-B,\quad x\geqslant 1,$$

из (40) следует (15). □

Замечание. В силу монотонности ω и оценки $\omega\leqslant\beta$ имеем

$$\theta(r)\leqslant\exp\left(\omega(r)\ln\frac{1}{r}\right)\leqslant\theta(R_j)e^\beta\quad\text{для}\quad r\in[R_{j+1},R_j].$$

Поэтому, из расходимости ряда (37) следует расходимость интеграла (38) с константой $C'=C\exp(-\beta(n+\alpha)/\alpha)$. Условие монотонного убывания θ в теореме 1 можно заменить на

$$\theta(R)\leqslant K\theta(r),\quad e^{-1}R\leqslant r\leqslant R.$$

Тогда константа C в (13), (14) будет зависеть ещё и от K.

Неравенство Харнака слабого типа

В этом разделе будет получено неравенство Харнака слабого типа для суперрешений (1), из которого мы выведем неравенство Харнака для решений. Обозначаем

$$s = \operatorname*{ess\,inf}_{B_{4R}^{x_0}} p, \quad M = \operatorname*{ess\,sup}_{B_{4R}^{x_0}} u.$$

Доказательство теоремы 3 состоит из двух лемм.

Утверждение 12. *Пусть u — неотрицательное ограниченное суперрешение* (1) *в $B_{4R}^{x_0}$, $1/4 \leqslant \sigma < t \leqslant 2$. Справедлива оценка*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{B_{\sigma R}^{x_0}}(u+R) \geqslant \exp\left(-C(t-\sigma)^{-n\beta/s}\theta(4R)^{(n+s)/s} + \fint_{B_{tR}^{x_0}} \ln(u+R)\,dx\right), \quad (41)$$

где $C = C(n, \alpha, \beta, M)$.

Доказательство. Положим

$$\ln k = \fint_{B_{tR}^{x_0}} \ln(u+R)\,dx. \quad (42)$$

В силу неравенства Иенсена имеем

$$k = \exp \fint_{B_{tR}^{x_0}} \ln(u+R)\,dx \leqslant \fint_{B_{tR}^{x_0}} (u+R)\,dx \leqslant M + R.$$

Пусть

$$w = \left(\ln \frac{k}{u+R}\right)_+.$$

Выберем в интегральном тождестве (6) пробную функцию

$$\psi = w^\gamma (u+R)^{1-s}\eta^\beta,$$

где $\gamma \geqslant 1$, $\eta \in C_0^\infty(B_{tR}^{x_0})$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$. Имеем

$$\gamma \int\limits_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s}w^{\gamma-1}\eta^\beta\,dx +$$

$$+ (s-1) \int\limits_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s}w^{\gamma}\eta^\beta\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \beta \int\limits_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)-2}(u+R)^{1-s}w^{\gamma}\eta^{\beta-1}\nabla u \cdot \nabla \eta\,dx.$$

Применяя к подинтегральному выражению в правой части этой оценки неравенство Юнга, будем иметь

$$\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s}w^{\gamma-1}\eta^{\beta}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C(\alpha,\beta)\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} \gamma^{-p(x)}(u+R)^{p(x)-s}w^{\gamma+p(x)-1}\eta^{\beta-p(x)}|\nabla\eta|^{p(x)}\,dx.$$

Отсюда получаем

$$\begin{gathered}\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla w|^{p(x)}(u+R)^{p(x)-s}w^{\gamma-1}\eta^{\beta}\,dx \leqslant\\ \leqslant C(\alpha,\beta)\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} (u+R)^{p(x)-s}w^{\gamma+p(x)-1}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{\beta-p(x)}\,dx.\end{gathered}\tag{43}$$

По неравенству Юнга

$$|\nabla w|^{s} \leqslant |\nabla w|^{p(x)}(u+R)^{p(x)-s} + (u+R)^{-s}.$$

Далее,

$$(u+R)w = (u+R)\left(\ln\frac{k}{u+R}\right)_{+} \leqslant \begin{cases} k/e, & \text{если}\quad k/e > R,\\ R\ln\frac{k}{R} & \text{если}\quad k/e \leqslant R.\end{cases}$$

В силу $k \leqslant M+R$ имеем

$$(u+R)w \leqslant \max(k/e,R) \leqslant M+1.$$

Пользуясь этими оценками, из (43) получаем

$$\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla w|^{s}w^{\gamma-1}\eta^{\beta}\,dx \leqslant C(\alpha,\beta)(M+1)^{\beta}\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} (w^{\gamma+s-1}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{\beta-p(x)}+w^{\gamma-1}R^{-s}\eta^{\beta})\,dx.$$

Домножая последнее неравенство на R^{s-n}, пользуясь (10) и (21), имеем (аналог оценки (18))

$$R^{s}\fint_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla \max(w,1)|^{s}\max(w,1)^{\gamma-1}\eta^{\beta}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C(\alpha,\beta)(M+1)^{\beta}\theta(4R)\fint_{B_{tR}^{x_0}} \max(w,1)^{\gamma+s-1}(\eta^{\beta}+(R|\nabla\eta|)^{\beta})\,dx.$$

Аналогично доказательству утверждения 8 с помощью итерационной техники Мозера придём к соотношению (см. (26))

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B^{x_0}_{\sigma R}} w \leqslant C(n,p,M)\,(t-\sigma)^{-n\beta/s}\,\theta(4R)^{n/s}\left(1+\fint_{B^{x_0}_{tR}} w^s\,dx\right)^{1/s}. \qquad (44)$$

Для оценки интеграла

$$\fint_{B^{x_0}_{tR}} w^s\,dx \leqslant \fint_{B^{x_0}_{tR}} \left|\ln\frac{k}{u+R}\right|^s dx$$

выберем в интегральном тождестве (6) пробную функцию

$$\psi = (u+R)^{1-s}\eta^\beta,$$

где $\eta \in C_0^\infty(B^{x_0}_{2tR})$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta = 1$ в $B^{x_0}_{tR}$ и $|\nabla\eta| \leqslant 4(tR)^{-1}$. Получим

$$\int\limits_{B^{x_0}_{2tR}} |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s}\eta^\beta\,dx \leqslant \beta \int\limits_{B^{x_0}_{2tR}} |\nabla u|^{p(x)-1}(u+R)^{1-s}\eta^{\beta-1}|\nabla\eta|\,dx.$$

Отсюда по неравенству Юнга будем иметь

$$\int\limits_{B^{x_0}_{2tR}} |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s}\eta^\beta\,dx \leqslant C(\alpha,\beta) \int\limits_{B^{x_0}_{2tR}} (u+R)^{p(x)-s}\eta^{\beta-p(x)}|\nabla\eta|^{p(x)}\,dx.$$

Так как $|\nabla u|^s \leqslant |\nabla u|^{p(x)}+1$, $(u+R)^{-s} \leqslant R^{-s}$, и $(u+R)^{p(x)-s} \leqslant (M+1)^\beta$, то

$$\int\limits_{B^{x_0}_{2tR}} |\nabla u|^s(u+R)^{-s}\eta^\beta\,dx \leqslant C(\alpha,\beta)(M+1)^\beta \int_{B^{x_0}_{2tR}} (R^{-s}\eta^\beta + \eta^{\beta-p(x)}|\nabla\eta|^{p(x)}).$$

Домножая это неравенство на R^{s-n}, пользуясь неравенствами (10) и (21), найдём

$$R^s \fint_{B^{x_0}_{2tR}} |\nabla u|^s(u+R)^{-s}\eta^\beta\,dx \leqslant C(\alpha,\beta)(M+1)^\beta\theta(4R) \fint_{B^{x_0}_{2tR}} (\eta^\beta + (R|\nabla\eta|)^\beta)\,dx.$$

В силу выбора η отсюда получаем

$$R^s \fint_{B^{x_0}_{tR}} \left|\nabla\ln\frac{k}{u+R}\right|^s dx \leqslant C(n,\alpha,\beta)(M+1)^\beta\theta(4R).$$

По определению постоянной k из (42),

$$\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} \ln \frac{k}{u+R}\, dx = 0.$$

Поэтому по неравенству Пуанкаре заключаем, что

$$\fint_{B_{tR}^{x_0}} \left| \ln \frac{k}{u+R} \right|^s dx \leqslant C(n,s) R^s \fint_{B_{tR}^{x_0}} \left| \nabla \ln \frac{k}{u+R} \right|^s dx \leqslant C(n,\alpha,\beta)(M{+}1)^\beta \theta(4R). \tag{45}$$

Из (44) и (45) вытекает

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_{\sigma R}^{x_0}} w \leqslant C(n,\alpha,\beta,M)\,(t-\sigma)^{-n\beta/s}\,\theta(4R)^{(n+s)/s}.$$

Вспоминая определение w, придём к оценке (41). Утверждение 12 доказано. □

Перейдём ко второму утверждению.

Утверждение 13. *Пусть* u *— неотрицательное ограниченное суперрешение* (1) *в* $B_{4R}^{x_0}$. *Для любых* $1/4 \leqslant \tau < t \leqslant 2$ *и всех* $0 < q < n(s-1)/(n-1)$ *выполняется*

$$\left(\fint_{B_{\tau R}^{x_0}} (u+R)^q\, dx \right)^{1/q} \leqslant \exp\left(C(t-\tau)^{-2n\beta/s} \theta(4R)^{(n+s)/s} + \fint_{B_{tR}^{x_0}} \ln(u+R)\, dx \right) \tag{46}$$

с постоянной $C = C(n,\alpha,\beta,M,q)$.

Доказательство. Положим

$$w = \left(\ln \frac{u+R}{k} \right)_+,$$

где величина k определена формулой (42), $R \leqslant k \leqslant M+R$. Выберем в интегральном тождестве (6) пробную функцию

$$\psi = \max(w, c_0(\gamma+s))^\gamma (u+R)^{1-s} \eta^\beta,$$

где $\gamma \geqslant 0$, $\eta \in C_0^\infty(B_{tR}^{x_0})$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, и $c_0 = 2/(s-1)$. Имеем

$$(s-1) \int_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)} (u+R)^{-s} \max(w, c_0(\gamma+s))^\gamma \eta^\beta\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \gamma \int_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla(u+R)|^{p(x)} (u+R)^{-s} \chi_{\{w > c_0(\gamma+s)\}} \max(w, c_0(\gamma+s))^{\gamma-1} \eta^\beta\, dx +$$

$$+ \beta \int_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)-2} (u+R)^{1-s} \max(w, c_0(\gamma+s))^\gamma \eta^{\beta-1} \nabla u \cdot \nabla\eta\, dx.$$

Так как $\gamma/\max(w,c_0(\gamma+s))\leqslant 1/c_0=(s-1)/2$, получаем

$$\int_{B_{tR}^{x_0}}|\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s}\max(w,c_0(\gamma+s))^{\gamma}\eta^{\beta}\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2\beta}{s-1}\int_{B_{tR}^{x_0}}|\nabla u|^{p(x)-1}(u+R)^{1-s}\max(w,c_0(\gamma+s))^{\gamma}\eta^{\beta-1}|\nabla\eta|\,dx.$$

По неравенству Юнга, будем иметь

$$\int_{B_{tR}^{x_0}}|\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s}\max(w,c_0(\gamma+s))^{\gamma}\eta^{\beta}\,dx\leqslant$$
$$\leqslant C(\alpha,\beta)\int_{B_{tR}^{x_0}}(u+R)^{p(x)-s}\max(w,c_0(\gamma+s))^{\gamma}\eta^{\beta-p(x)}|\nabla\eta|^{p(x)}\,dx.$$

Далее, поскольку $|\nabla u|^s\leqslant|\nabla u|^{p(x)}+1$ и $(u+R)^{p(x)-s}\leqslant(M+1)^{\beta}$, придём к неравенству

$$\int_{B_{tR}^{x_0}}|\nabla u|^{s}(u+R)^{-s}\max(w,c_0(\gamma+s))^{\gamma}\eta^{\beta}\,dx\leqslant$$
$$\leqslant C(\alpha,\beta)(M+1)^{\beta}\int_{B_{tR}^{x_0}}\max(w,c_0(\gamma+s))^{\gamma}((u+R)^{-s}\eta^{\beta}+|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{\beta-p(x)})\,dx.$$

Домножая это неравенство на R^{s-n}, используя (10) и (21), будем иметь

$$R^s\fint_{B_{tR}^{x_0}}|\nabla(\max(w,c_0(\gamma+s))^{1+\gamma/s}\eta^{\beta/s})|^s\,dx\leqslant$$
$$\leqslant C(\alpha,\beta)(M+1)^{\beta}\theta(4R)\fint_{B_{tR}^{x_0}}\max(w,c_0(\gamma+s))^{\gamma+s}\left(\eta^{\beta}+(R|\nabla\eta|)^{\beta}\right)\,dx.$$

Напомним, что $\kappa=n/(n-1)$. По неравенству Соболева,

$$\fint_{B_{tR}^{x_0}}\max(w,c_0(\gamma+s))^{(\gamma+s)\kappa}\eta^{\beta\kappa}\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\left(C(n,\alpha,\beta,M)\theta(4R)\fint_{B_{tR}^{x_0}}\max(w,c_0(\gamma+s))^{\gamma+s}(\eta^{\beta}+(R|\nabla\eta|)^{\beta})\,dx\right)^{\kappa}. \tag{47}$$

Определим срезающие функции $\eta=\eta_j$ следующим образом. Пусть $\tau<\sigma<t$, $r_j=\sigma+(t-\sigma)2^{-j}$, $j=0,1,2,\ldots$, $\eta_j\in C_0^{\infty}(B_{r_j}^{x_0})$, $0\leqslant\eta_j\leqslant 1$, $\eta_j=1$ в $B_{r_{j+1}}^{x_0}$, и $|\nabla\eta_j|\leqslant 2^{j+3}(t-\sigma)^{-1}$. Зададим последовательность γ_j соотношением $\gamma_{j+1}+s=(\gamma_j+s)\kappa$, $\gamma_0=0$. Тогда из (47), в котором $\gamma=\gamma_j$, $\eta=\eta_j$,

получим

$$\fint_{B^{x_0}_{r_{j+1}}} \max(w, c_0(\gamma_{j+1}+s))^{\gamma_{j+1}+s}\,dx \leqslant \kappa^{\gamma_{j+1}+s} \fint_{B^{x_0}_{r_{j+1}}} \max(w, c_0(\gamma_j+s))^{\gamma_{j+1}+s}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C(n,\alpha,\beta,M)\kappa^{\gamma_{j+1}+s}(t-\sigma)^{-\beta\kappa}2^{j\beta\kappa}\theta(4R)^{\kappa}\left(\fint_{B^{x_0}_{r_j}} \max(w, c_0(\gamma_j+s))^{\gamma_j+s}\,dx\right)^{\kappa}. \tag{48}$$

Из (45) имеем

$$\fint_{B^{x_0}_{tR}} w^{\gamma_0+s}\,dx \leqslant C(n,\alpha,\beta,M)\theta(4R).$$

Следовательно,

$$\fint_{B^{x_0}_{tR}} \max(w, c_0(\gamma_0+s))^{\gamma_0+s}\,dx \leqslant C(n,\alpha,\beta,M)\theta(4R). \tag{49}$$

Полагая

$$Y_j = \fint_{B^{x_0}_{r_j}} \max(w, c_0(\gamma_j+s))^{\gamma_j+s}\,dx,$$

перепишем (48) и (49) в виде

$$Y_j \leqslant K_j Y_{j-1}^{\kappa}, \quad K_j = C^{\beta\kappa}\kappa^{\gamma_j+s}(t-\sigma)^{-\beta\kappa}2^{\beta j\kappa}\theta(4R)^{\kappa}, \quad Y_0 \leqslant C\theta(4R).$$

Итерируя это неравенство, найдём

$$Y_j \leqslant \prod_{m=0}^{j-1}(K_{j-m})^{\kappa^m}(Y_0)^{\kappa^j}.$$

Поскольку $\gamma_j + s = \kappa^j s$, для $j \geqslant 1$ запишем

$$\prod_{m=0}^{j-1}(K_{j-m})^{\kappa^m} = (C(t-\sigma)^{-1})^{\beta\kappa(1+\kappa+\ldots+\kappa^{j-1})}\kappa^{sj\kappa^j}2^{\beta\kappa\sum_{m=0}^{j-1}(j-m)\kappa^m}\theta(4R)^{\sum_{m=1}^{j}\kappa^m+\kappa^j}.$$

Оценим

$$\sum_{m=0}^{j-1}(j-m)\kappa^m = \kappa^j\sum_{l=1}^{j} l\kappa^{-l} \leqslant \kappa^j\sum_{l=0}^{\infty} l\kappa^{-l} = \kappa^j\kappa^{-1}(1-\kappa^{-1})^{-2},$$
$$\kappa + \kappa^2 + \ldots + \kappa^{j-1} + \kappa^j + \kappa^j \leqslant (n+1)\kappa^j.$$

В итоге,

$$Y_j \leqslant (C(t-\sigma)^{-\beta n/s})^{\gamma_j+s}\kappa^{j(\gamma_j+s)}\theta(4R)^{(\gamma_j+s)(n+1)/s}.$$

Таким образом,

$$\left(\fint_{B^{x_0}_{r_j}} \max(w, c_0(\gamma_j+s))^{\gamma_j+s}\,dx\right)^{1/(\gamma_j+s)} \leqslant C(t-\sigma)^{-\beta n/s}\kappa^j\theta(4R)^{(n+1)/s}. \quad (50)$$

Пусть r — целое число из отрезка $[\gamma_{k-1}+s, \gamma_k+s]$. Ясно, что $\kappa^k \leqslant \kappa r/s$. Пользуясь неравенством Гёльдера и оценкой Стирлинга ($r! \geqslant \sqrt{2\pi r}(r/e)^r$), найдём

$$\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} \frac{w^r}{r!}\,dx \leqslant \frac{1}{r!}\left(\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} w^{\gamma_k+s}\,dx\right)^{r/(\gamma_k+s)} \leqslant$$
$$\leqslant C^r(t-\sigma)^{-\beta nr/s}\kappa^{kr}\theta(4R)^{(n+1)r/s}/r! \leqslant C^r(t-\sigma)^{-\beta nr/s}\theta(4R)^{(n+1)r/s}. \quad (51)$$

Следовательно, выбрав $\delta_0 = (t-\sigma)^{\beta n/s}C\theta(4R)^{-(n+1)/s}$, где $C = C(n,\alpha,\beta,M)$ достаточно мало, будем иметь

$$\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} \frac{(w\delta_0)^r}{r!}\,dx \leqslant 2^{-r}.$$

Для $1 \leqslant r \leqslant s$, по неравенству Гёльдера и (49),

$$\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} \frac{(w\delta_0)^r}{r!}\,dx \leqslant \frac{\delta_0^r}{r!}\left(\fint_{B^{x_0}_{tR}} w^s\,dx\right)^{r/s} \leqslant \frac{(C\delta_0\theta(4R)^{1/s})^r}{r!},$$

где $C = C(n,\alpha,\beta,M)$. В итоге, за счёт малости

$$\delta_0 = \tilde{\delta}_0(n,\alpha,\beta,M)(t-\sigma)^{\beta n/s}\theta(4R)^{-(n+1)/s}$$

получаем

$$\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} e^{\delta_0 w}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} \frac{(\delta_0 w)^r}{r!}\,dx \leqslant e+1.$$

По определению w выполняется $(u+R)^{\delta_0} \leqslant \exp(\delta_0 w)$. Приходим к оценке

$$\left(\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} (u+R)^{\delta_0}\,dx\right)^{1/\delta_0} \leqslant k(e+1)^{1/\delta_0} \leqslant k\exp\left(C(t-\sigma)^{-n\beta/s}\theta(4R)^{(n+1)/s}\right). \quad (52)$$

Покажем теперь, что для любого $0 < q < n(s-1)/(n-1)$ выполняется оценка

$$\left(\fint_{B^{x_0}_{\tau R}} (u+R)^q\,dx\right)^{1/q} \leqslant C(n,p,M,\tau,\sigma,q)\left(\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} (u+R)^{\delta_0}\,dx\right)^{1/\delta_0}.$$

Для этого, выбирая в интегральном тождестве (6) пробную функцию

$$\psi = (u+R)^{1-s+\gamma}\eta^{\beta},$$

где $0 < \gamma < s-1$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta \in C_0^\infty(B_{\sigma R}^{x_0})$, придём к соотношению

$$\begin{gathered}(s-1-\gamma)\int_{B_{\sigma R}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{\gamma-s}\eta^{\beta}\,dx \leqslant \\ \leqslant \beta\int_{B_{\sigma R}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)-2}(u+R)^{1-s+\gamma}\eta^{\beta-1}\nabla u\nabla\eta\,dx \leqslant \\ \leqslant \beta\int_{B_{\sigma R}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)-1}(u+R)^{1-s+\gamma}\eta^{\beta-1}|\nabla\eta|\,dx.\end{gathered}$$

По неравенству Юнга,

$$\begin{gathered}\int_{B_{\sigma R}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{\gamma-s}\eta^{\beta}\,dx \leqslant \\ \leqslant C(\alpha,\beta)(s-1-\gamma)^{-\beta}\int_{B_{\sigma R}^{x_0}} (u+R)^{p(x)-s+\gamma}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{\beta-p(x)}\,dx,\end{gathered}$$

откуда, в силу $|\nabla u|^s \leqslant |\nabla u|^{p(x)}+1$ и $(u+R)^{p(x)-s} \leqslant (M+1)^{\beta}$, получаем

$$\begin{gathered}\int_{B_{\sigma R}^{x_0}} |\nabla u|^{s}(u+R)^{\gamma-s}\eta^{\beta}\,dx \leqslant \int_{B_{\sigma R}^{x_0}} (u+R)^{\gamma-s}\eta^{\beta}\,dx + \\ + C(\alpha,\beta)(s-1-\gamma)^{-\beta}(M+1)^{\beta}\int_{B_{\sigma R}^{x_0}} (u+R)^{\gamma}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{\beta-p(x)}\,dx.\end{gathered}$$

Домножая последнее неравенство на R^{s-n}, применяя (10) и (21), находим

$$\begin{gathered}R^{s}⨍_{B_{\sigma R}^{x_0}} |\nabla((u+R)^{\gamma/s}\eta^{\beta/s})|^{s}\,dx \leqslant \\ \leqslant C(\alpha,\beta)(M+1)^{\beta}(s-1-\gamma)^{-\beta}\theta(4R)⨍_{B_{\sigma R}^{x_0}} (u+R)^{\gamma}(\eta^{\beta}+(R|\nabla\eta|)^{\beta})\,dx.\end{gathered} \tag{53}$$

Применяя неравенство Соболева, из (53) получаем

$$\begin{gathered}⨍_{B_{\sigma R}^{x_0}} ((u+R)^{\gamma}\eta^{\beta})^{\kappa}\,dx \leqslant \\ \leqslant C(n,\alpha,\beta,M)(s-1-\gamma)^{-\beta\kappa}\theta(4R)^{\kappa}\left(⨍_{B_{\sigma R}^{x_0}} (u+R)^{\gamma}(\eta^{\beta}+(R|\nabla\eta|)^{\beta})\,dx\right)^{\kappa}.\end{gathered} \tag{54}$$

Далее будем считать, что γ отделено от $s-1$, так что множителем $(s-1-\gamma)^{-\beta\kappa}$ можно пренебречь. Таким образом, будем использовать неравенство (54) в виде

$$\begin{gathered}\left(\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} ((u+R)^\gamma \eta^\beta)^\kappa\,dx\right)^{1/(\kappa\gamma)} \leqslant \\ \leqslant \left(C(n,\alpha,\beta,M)\theta(4R)\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} (u+R)^\gamma(\eta^\beta + (R|\nabla\eta|)^\beta)\,dx\right)^{1/\gamma}.\end{gathered} \tag{55}$$

Пусть j_0 — минимальное натуральное число, такое, что $q \leqslant \delta_0\kappa^{j_0}$. Положим $\delta_1 = q\kappa^{-j_0}$ и $r_j = \sigma - (\sigma-\tau)(1-2^{-j})$, $j = 0{,}1,\ldots,j_0$. Пусть ещё $\eta_j \in C_0^\infty(B^{x_0}_{r_j})$, $\eta_j = 1$ на $B^{x_0}_{r_{j+1}}$, $0 \leqslant \eta_j \leqslant 1$, $|\nabla\eta_j| \leqslant 2^{j+2}/(\sigma-\tau)$. Последовательно записывая неравенство (55) для $\eta = \eta_j$, $\gamma = \gamma_j = \delta_1\kappa^j$, $j = 0{,}1,\ldots,j_0-1$, будем иметь

$$\begin{gathered}\left(\fint_{B^{x_0}_{\tau R}} (u+R)^q\,dx\right)^{1/q} = \left(\fint_{B^{x_0}_{r_{j_0}}} (u+R)^{\gamma_{j_0}}\,dx\right)^{1/\gamma_{j_0}} \leqslant \\ \leqslant \prod_{j=0}^{j_0-1} (C\theta(4R)(\sigma-\tau)^{-\beta}2^{\beta j})^{1/\gamma_j} \left(\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} (u+R)^{\delta_1}\,dx\right)^{1/\delta_1} \leqslant \\ \leqslant (C(\sigma-\tau)^{-\beta}\theta(4R))^{n/\delta_1} \left(\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} (u+R)^{\delta_1}\,dx\right)^{1/\delta_1} \leqslant \\ \leqslant (C(\sigma-\tau)^{-\beta}\theta(4R))^{2n/\delta_0} \left(\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} (u+R)^{\delta_0}\,dx\right)^{1/\delta_0},\end{gathered}$$

где на последнем шаге мы применили неравенство Гёльдера. Совмещая последнее неравенство с (52), где $\sigma = (t+\tau)/2$, придём к оценке

$$\left(\fint_{B^{x_0}_{\tau R}} (u+R)^q\,dx\right)^{1/q} \leqslant k\exp\left(C(t-\tau)^{-\beta(n+s)/s}\theta(4R)^{(n+s)/s}\right),$$

что и составляет утверждение леммы в случае $q < n(s-1)/(n-1)$. Здесь мы использовали простое неравенство

$$\begin{gathered}(C(t-\tau)^{-\beta}\theta(4R))^{2n/\delta_0}(e+1)^{1/\delta_0} = \\ = \exp\left((\ln C + \beta\ln(t-\tau)^{-1} + \ln\theta(4R))C(t-\tau)^{-\beta n/s}\theta(4R)^{(n+1)/s}\right) \\ \leqslant \exp\left(C(t-\sigma)^{-\beta(n+s)/s}\theta(4R)^{(n+s)/s}\right).\end{gathered}$$

Нетрудно видеть, что степень q можно взять любую, меньшую чем $n(s-1)/(n-s)$, если $s < n$, и любую положительную, если $s \geqslant n$. Также легко показать, что в (46) константа может быть взята не зависящей от q, если q отделено от $n(s-1)/(n-1)$.

□

Доказательство теоремы 3. Совмещая оценки утверждения 12, где $\sigma = 1$, $t = 3$, и утверждения 13, в котором $\tau = 2$, $t = 3$, приходим к (16). Теорема 3 доказана. □

Доказательство теоремы 4. Совмещая оценки (16) и (22) для $q = s-1$, придём к (17). Здесь используется $n/(s-1) + 2(n+s)/s \leqslant 3(n+s)/(s-1)$ Теорема 4 доказана. □

Некоторые уточнения

Приведём уточнение наших оценок для случая, когда $p(x_0) < n$. Будем пользоваться неравенством Соболева в виде

$$\left(⨍_{B_R^{x_0}} |f|^{ns/(n-s)}\,dx\right)^{(n-s)/ns} \leqslant \frac{(n-1)s}{n-s}\left(R^s ⨍_{B_R^{x_0}} |\nabla f|^s\,dx\right)^{1/s}, \quad f \in W_0^{1,s}(B_R^{x_0}). \tag{56}$$

Предположим, что функция $v \in W^{1,s}(B_{4R}^{x_0})$ для любой $\eta \in C_0^\infty(B_{4R}^{x_0})$ удовлетворяет неравенству

$$R^s ⨍_{B_{4R}^{x_0}} |\nabla(v^{(\gamma+s-1)/s}\eta^{\beta/s})|^s\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C(\alpha,\beta)\theta(4R)(M+1)^\beta(\gamma+s-1)^s ⨍_{B_{4R}^{x_0}} v^{\gamma+s-1}(\eta^\beta + (R|\nabla\eta|)^\beta)\,dx.$$

Определим последовательность R_j и срезающие функции η_j так же, как и при доказательстве утверждения 8. Пусть $\varkappa = n/(n-s)$. Положим $\gamma_0 = 1$ и определим последовательность γ_j соотношением $\gamma_{j+1}+s-1 = \varkappa(\gamma_j+s-1)$. Пользуясь неравенством Соболева (56), получим

$$\left(⨍_{B_{R_{j+1}}^{x_0}} v^{\gamma_{j+1}+s-1}\,dx\right)^{1/\varkappa s} \leqslant$$
$$\leqslant (n-s)^{-1}\left(C(n,\alpha,\beta,M)2^{\beta j}(t-\sigma)^{-\beta}\theta(4R)(\gamma_j+s-1)^s ⨍_{B_{R_j}^{x_0}} (u+R)^{\gamma_j+s-1}\,dx\right)^{1/s}.$$

Возводя последнее неравенство в степень $s/(\gamma_j+s-1)$ и используя обозначение (25), придём к оценке

$$Y_{j+1} \leqslant \left(C2^{\beta j/s}\theta(4R)^{1/s}(\gamma_j+s-1)(n-s)^{-1}(t-\sigma)^{-\beta/s}\right)^{\varkappa^{-j}} Y_j, \qquad (57)$$

где $C = C(n,\alpha,\beta,M)$. Используем соотношения

$$\sum_{j=0}^{\infty} j\varkappa^{-j} = \varkappa^{-1}(1-\varkappa^{-1})^{-2} = (n-s)ns^{-2}, \quad \sum_{j=0}^{\infty}\varkappa^{-j} = (1-\varkappa^{-1})^{-1} = ns^{-1}.$$

Итерируя (57), и используя $x^{-x} \leqslant e^{1/e}$, находим

$$\limsup_{k\to\infty} Y_k \leqslant C(n,\alpha,\beta,M)(n-s)^{-n/s}(t-\sigma)^{-n\beta/s^2}\theta(4R)^{n/s^2}Y_0.$$

Таким образом, если $p(x_0) < n$, в оценке (22) можно заменить $\theta(4R)^{n/q}$ на $\theta(4R)^{n/sq}$. В оценке (28) можно заменить $\theta(4R)^{n/s}$ на $\theta(4R)^{n/s^2}$. В формулировке утверждения 11 можно заменить $\theta(4R)^{(n+s)/s}$ на $\theta(4R)^{(n+s^2)/s^2}$. В формулировке теоремы 2 можно брать $l < \alpha^2/(n+\alpha^2)$, так как интересует поведение решения в окрестности точки, фактически допустимы $l < p(x_0)^2/(n+p(x_0)^2)$.

Аналогично, в неравенстве (41) утверждения 12 можно заменить $\theta(4R)^{(n+s)/s}$ на $\theta(4R)^{(n+s^2)/s^2}$. В оценке (50) получим $\theta(4R)^{(n+s)/s^2}$. В итоге, в неравенстве (46) утверждения 13 получим $\theta(4R)^{(n+s^2)/s^2}$ (можно брать $\theta(4R)^{(n+s+\varepsilon)/s^2}$ для любого $\varepsilon > 0$).

В формулировке теоремы 4 получим $\theta(4R)^{(2n+s^2)/s(s-1)}$ вместо $\theta(4R)^{3(n+s)/(s-1)}$.

Дополнение

Приведём доказательство того факта, что из сходимости почти всюду функций (или вектор-функций) $f_j \to f$ и сходимости “энергий”

$$\int_D |f_j|^{p(x)}\,dx \to \int_D |f|^{p(x)}\,dx \qquad (58)$$

следует сходимость f_j к f в $L^{p(x)}(D)$, то есть

$$\int_D |f_j - f|^{p(x)}\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty.$$

Воспользуемся теоремой Шеффе — если последовательность неотрицательных функций f_j сходится к f почти всюду в D и $\int_D f_j\,dx \to \int_D f\,dx$, то $f_j \to f$ в $L^1(D)$.

По теореме Шеффе, из (58) следует сходимость $|f_j|^{p(x)} \to |f|^{p(x)}$ в $L^1(D)$. Таким образом, последовательность f_j является равностепенно интегрируемой. Так как

$$|f_j - f|^{p(x)} \leqslant 2^{p(x)-1}(|f_j|^{p(x)} + |f|^{p(x)}) \leqslant 2^{\beta}(|f_j|^{p(x)} + |f|^{p(x)}),$$

последовательность $|f_j - f|^{p(x)}$ также равностепенно интегрируема и сходится к нулю почти всюду в D. Отсюда по теореме Лебега получаем сходимость $|f_j - f|^{p(x)}$ к нулю в $L^1(D)$.

Можно дать и иное доказательство. Определим $\tilde{f}_j = \min(1, |f|/|f_j|)f_j$ если $f_j \neq 0$, $\tilde{f}_j = 0$ если $f_j = 0$. Функции $\tilde{f}_j$ сходятся почти всюду к f, при этом $|\tilde{f}_j| \leqslant |f|$. По теореме Лебега, $|\tilde{f}_j - f|^{p(x)} \to 0$ в $L^1(D)$. С другой стороны,

$$\int_D \left|f_j - \tilde{f}_j\right|^{p(x)} dx = \int_{\{|f_j|>|f|\}} (|f_j| - |f|)^{p(x)}\, dx \leqslant \int_{\{|f_j|>|f|\}} (|f_j|^{p(x)} - |f|^{p(x)})\, dx =$$
$$= \int_D (|f_j|^{p(x)} - |f|^{p(x)})\, dx + \int_{\{|f_j|\leqslant|f|\}} (|f|^{p(x)} - |f_j|^{p(x)})\, dx \to 0$$

при $j \to \infty$ в силу (58) и теоремы Лебега, применённой к последнему интегралу. По неравенству треугольника ($|a+b|^q \leqslant 2^{q-1}(|a|^q + |b|^q)$ для $q \geqslant 1$),

$$\int_D |f_j - f|^{p(x)}\, dx \leqslant 2^{\beta-1} \int_D (|f_j - \tilde{f}_j|^{p(x)} + |\tilde{f}_j - f|^{p(x)})\, dx \to 0$$

при $j \to \infty$.

В обратную сторону, если $|f_j - f|^{p(x)} \to 0$ в $L^1(D)$, то сходимость $|f_j|^{p(x)} \to |f|^{p(x)}$ в $L^1(D)$ следует из оценки

$$\int_D \left||f_j|^{p(x)} - |f|^{p(x)}\right| dx \leqslant \beta \int_D \big||f_j| - |f|\big| \max(|f_j|, |f|)^{p(x)-1}\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \int_D |f_j - f|^{p(x)}\, dx + C(\alpha,\beta)\varepsilon^{1/(1-\alpha)} \int_D (|f_j|^{p(x)} + |f|^{p(x)})\, dx,$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно.

Список литературы

1. Жиков В. В. Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционалов вариационного исчисления // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47, № 5. С. 961–995.

2. Жиков В. В. Усреднение нелинейных функционалов вариационного исчисления и теории упругости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50, № 4. С. 675–711.

3. Růžička M. Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory. Lect. Notes Math. 1748, Berlin-Heidelberg: Springer, 2000.

4. Жиков В. В. Оценки типа Мейерса для решения нелинейной системы Стокса // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 1. С. 107–114.

5. Жиков В. В. Разрешимость трёхмерной задачи о термисторе // Тр. МИАН. 2008. Т. 261. С. 101–114.

6. Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Růžička M. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Lect. Notes Math. 2017. Berlin: Springer, 2011.

7. Cruz-Uribe D., Fiorenza A. Variable Lebesgue Spaces. Foundations and Harmonic Analysis. Basel: Birkhäuser–Springer, 2013.

8. Kokilashvili V., Meshkii A., Rafeiro H., Samko S. Integral Operators in Non-Standard Function Spaces. Vol. 1: Variable Exponent Lebesgue and Amalgam Spaces. Vol. 2: Variable Exponent Hölder, Morrey–Campanato and Grand Spaces. Operator Theory: Advances and Applications 248, 249. Basel: Birkhäuser–Springer, 2016.

9. Zhikov V. On variational problems and nonlinear elliptic equations with nonstandard growth conditions // J. Math. Sci. 2011. V. 173, No. 5. P. 463–570.

10. Жиков В. В. О вариационных задачах и нелинейных эллиптических уравнениях с нестандартными условиями роста. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2017.

11. Zhikov V. V. On Lavrentiev's Phenomenon // Russian J. Math. Phys. 1995. V. 3, No. 2. P. 249–269.

12. Жиков В. В. О плотности гладких функций в пространстве Соболева-Орлича // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2004. Т. 310. С. 67–81.

13. Жиков В. В., Пастухова С. Е. О повышенной суммируемости градиента решений эллиптических уравнений с переменным показателем нелинейности // Матем. сб. 2008. Т. 199, № 2. С. 19–52.

14. Алхутов Ю. А. Неравенство Харнака и гёльдеровость решений нелинейных эллиптических уравнений с нестандартным условием роста // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 12. С. 1651–1660.

15. Крашенинникова О. В. О непрерывности в точке решений эллиптических уравнений с нестандартным условием роста // Тр. МИАН. 2002. Т. 236. С. 204–211.

16. Алхутов Ю. А., Крашенинникова О. В. Непрерывность в граничных точках решений квазилинейных эллиптических уравнений с нестандартным условием роста // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68, № 6. С. 3–60.

17. Алхутов Ю. А., Сурначёв М. Д. Регулярность граничной точки для $p(x)$-лапласиана // Проблемы математического анализа. 2018. Т. 92. (*в печати*)

18. Алхутов Ю. А. О гёльдеровой непрерывности $p(x)$-гармонических функций // Матем. сб. 2005. Т. 196, № 2. С. 3–28.

19. Алхутов Ю. А., Сурначёв М. Д. О неравенстве Харнака для $p(x)$-лапласиана с двухфазным показателем $p(x)$ // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2018. (*принято в печать*)

20. Алхутов Ю. А., Крашенинникова О. В. О непрерывности решений эллиптических уравнений с переменным порядком нелинейности // Тр. МИАН. 2008. Т. 261. С. 7–15.

21. Serrin J. Local behavior of solutions of quasilinear elliptic equations // Acta Math. 1964. V. 111. P. 247–302 .

22. Trudinger N. S. On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations // Comm. Pure Appl. Math. 1967. V. 20. P. 721–747.

23. Moser J. On Harnack's theorem for elliptic differential equations // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 577–591.

24. Trudinger N. S. On the regularity of generalized solutions of linear, non-unformly elliptic equations // Arch. Rational Mech. Anal. 1971. V. 42. P. 50–62 .