Б. Юксендал, А. Сулем, Управление с частичным наблюдением в предваряющем окружении, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 2, 161–184

DOI: 10.4213/rm723

2004 г. март — апрель *т. 59, вып. 2(356)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 519.218.3

УПРАВЛЕНИЕ С ЧАСТИЧНЫМ НАБЛЮДЕНИЕМ В ПРЕДВАРЯЮЩЕМ ОКРУЖЕНИИ

Б. Юксендал, А. Сулем

Мы изучаем управляемую стохастическую систему, состояние которой $X(t)$ в момент времени t описывается стохастическим дифференциальным уравнением с ведущими процессами Леви относительно фильтрации $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}$. Система предполагается *предваряющей*, в том смысле, что коэффициенты предполагаются согласованными с фильтрацией $\{\mathscr{G}_t\}_{t\geqslant 0}$, где $\mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{G}_t$ для всех $t \in [0,T]$. Соответствующее предваряющее стохастическое дифференциальное уравнение интерпретируется в смысле *прямых интегралов*, которые являются естественным обобщением интегралов по семимартингалам.

Предполагается, что допустимые управления согласованы с фильтрацией $\{\mathscr{E}_t\}_{t\in[0,T]}$, удовлетворяющей условию $\mathscr{E}_t \subseteq \mathscr{F}_t$ для всех $t \in [0,T]$. Общая задача состоит в максимизации данного функционала качества этой системы по всем допустимым управлениям. Это – *задача стохастического управления с частичным наблюдением в предваряющем окружении.* Примеры применений включают стохастические модели изменчивости в финансах, финансовые рынки под влиянием хорошо осведомленных лиц и стохастическое управление системами с запаздывающими шумовыми эффектами.

Некоторые частные случаи финансовых задач, включая оптимальный портфель с логарифмической полезностью, решены явно.

Библиография: 14 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Пусть $B(t) = (B_1(t),\dots,B_m(t))$ и $\eta(t) = (\eta_1(t),\dots,\eta_\ell(t))$ – (независимые друг от друга) m-мерное броуновское движение и ℓ-мерный процесс Леви соответственно на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0},\mathsf{P})$. Предположим, что $\mathsf{E}[\eta^2(t)] < \infty$ (где E обозначает математическое ожидание относительно P), и пусть $\widetilde{N}(dt,dz) = (\widetilde{N}_1(dt,dz_1),\dots,\widetilde{N}_\ell(dt,dz_\ell))$, $z = (z_1,\dots,z_\ell)$, – соответствующая процессу $\eta(t)$, $t \geqslant 0$, компенсированная пуассоновская случайная мера.

Пусть $\{\mathscr{E}_t\}_{t\geqslant 0}$ и $\{\mathscr{G}_t\}_{t\geqslant 0}$ – такие фильтрации, что

$$\mathscr{E}_t \subseteq \mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{G}_t \subseteq \mathscr{F} \quad \text{для любого} \quad t \geqslant 0. \tag{1.1}$$

Будем рассматривать управляемую стохастическую систему, состояние которой $X^{(u)}(t) = X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ в момент времени $t \in [0,T]$ описывается стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$\begin{aligned} dX(t) &= b(t, X(t), u(t), \omega)\, dt + \sigma(t, X(t), u(t), \omega)\, d^- B(t) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^\ell} \theta(t, X(t), u(t), z, \omega)\, \widetilde{N}(d^- t, dz), \qquad X(0) = x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} X(t) = X(0) &+ \int_0^t b(s, X(s), u(s), \omega)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X(s), u(s), \omega)\, d^- B(s) \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^\ell} \theta(s, X(s^-), u(s^-), z, \omega)\, \widetilde{N}(d^- s, dz), \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $b\colon [0,T]\times\mathbb{R}^n\times K\times\Omega \to \mathbb{R}^n$, $\sigma\colon [0,T]\times\mathbb{R}^n\times K\times\Omega \to \mathbb{R}^{n\times m}$ и $\theta\colon [0,T]\times\mathbb{R}^n\times K\times \mathbb{R}^\ell\times\Omega \to \mathbb{R}^{n\times\ell}$ – данные функции, $K \subset \mathbb{R}^k$ – данное множество *допустимых значений управления* и наш *управляющий процесс* $u(t) = u(t,\omega) \in K$ предполагается *согласованным с фильтрацией* $\{\mathscr{E}_t\}_{t\geqslant 0}$.

Мы предполагаем, что для любых данных $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in K$ и $z \in \mathbb{R}^\ell$ случайные величины

$$b(t,x,v,\,\cdot\,), \quad \sigma(t,v,v,\,\cdot\,) \quad \text{и} \quad \theta(t,x,v,z,\,\cdot\,) \quad \mathscr{G}_t\text{-измеримы.} \tag{1.3}$$

Иначе говоря, b, σ и θ предполагаются согласованными с фильтрацией $\{\mathscr{G}_t\}_{t\geqslant 0}$. Так как $B(t)$ и $\eta(t)$ не обязательно являются семимартингалами относительно $\{\mathscr{G}_t\}_{t\geqslant 0}$, то последние два интеграла в (1.2) являются *предваряющими* (в ориг. *anticipating* – *прим. перев.*) стохастическими интегралами. Мы предпочитаем интерпретировать эти интегралы как *прямые* интегралы (обозначаемые через $d^-B(t)$ и $\widetilde{N}(d^-t, dz)$ соответственно), поскольку именно с ними должны совпадать наши интегралы, если мы окажемся в контексте семимартингалов. (См. лемму 2.8б) и лемму 3.8.)

Пусть $f\colon [0,T]\times\mathbb{R}^n\times K \to \mathbb{R}$ и $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – данные функции, и пусть $\mathscr{A}_{\mathscr{E}}$ – данное множество *допустимых управлений*, содержащееся в множестве $\mathscr{E}_t$-согласованных процессов $u(t)$, для которых задача (1.2) имеет сильное $\mathscr{G}_t$-согласованное решение $X(t) = X^{(u)}(t)$ и интеграл

$$J^{(u)}(x) = \mathsf{E}^x\left[\int_0^T f(t, X(t), u(t))\, dt + g(X(T))\right] \tag{1.4}$$

сходится. Мы рассмотрим следующую задачу *управления с частичным наблюдением в предваряющем (anticipating) окружении.*

Задача 1.1. Найти $\Phi(x)$ и $u^* \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}}$, удовлетворяющие условию

$$\Phi(x) = \sup_{u \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}}} J^{(u)}(x) = J^{(u^*)}(x). \tag{1.5}$$

Этот тип задач возникает во многих ситуациях. Мы приведем три примера из финансовой математики.

Пример 1.2 (модели стохастической изменчивости). Предположим, что у нас есть рынок с одной рискованной возможностью инвестирования (например, акцией), цена которой $S_1(t)$ в момент времени t описывается стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$dS_1(t) = S_1(t^-)\left[\mu(t)\,dt + \sigma(t)\,d^-B(t) + \int_{\mathbb{R}} \theta(t,z)\,\widetilde{N}(d^-t,dz)\right], \tag{1.6}$$

где B и $\widetilde{N}$ одномерны (для простоты). В общих моделях стохастической изменчивости коэффициент $\sigma(t) = \sigma(t,\omega)$ не обязан быть $\mathscr{F}_t$-согласованным, и на него могут влиять и другие шумы. Поэтому σ-алгебра $\mathscr{G}_t$, порожденная $\{\sigma(s,\cdot);\ s \leqslant t\}$, может быть больше σ-алгебры $\mathscr{F}_t$. То же верно для $\theta(t,z) = \theta(t,z,\omega)$ и $\mu(t) = \mu(t,\omega)$.

Предположим также, что рынок допускает безрисковую возможность инвестирования, в которой цена $S_0(t)$ в момент времени t описывается уравнением

$$dS_0(t) = \rho(t) S_0(t)\,dt, \qquad S_0(0) = 1, \tag{1.7}$$

где $\rho(t) = \rho(t,\omega)$ – другой $\mathscr{G}_t$-согласованный процесс. *Портфель* $\pi(t) = \pi(t,\omega)$ на таком рынке – это $\mathscr{E}_t$-согласованный процесс, дающий *долю* полного капитала $X(t)$ агента, инвестированную в рискованный актив, в момент времени t. Тогда динамика процесса накопления капитала $X(t) = X^{(\pi)}(t)$, соответствующая портфелю π, определяется формулой

$$\begin{aligned} dX(t) = X(t^-)\bigg[&(\rho(t) + (\mu(t) - \rho(t))\pi(t))\,dt + \pi(t)\sigma(t)\,d^-B(t) \\ &+ \pi(t)\int_{\mathbb{R}} \theta(t,z)\,\widetilde{N}(d^-t,dz)\bigg], \qquad X(0) = x > 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Требование $\mathscr{E}_t$-согласованности $\pi(t)$ моделирует ситуацию, когда агент имеет в своем распоряжении лишь *частичную* информацию (меньшую, чем $\mathscr{F}_t$) при принятии решений относительно портфеля. Проблема оптимального портфеля состоит в том, чтобы найти $\Phi(x)$ и $\pi^* \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}}$, удовлетворяющие условию

$$\Phi(x) = \sup_{\pi \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}}} \mathsf{E}^x[U(X^{(\pi)}(T))], \tag{1.9}$$

где $U\colon \mathbb{R} \to [-\infty, \infty)$ – данная функция полезности.

Пример 1.3 (рынок под влиянием хорошо осведомленных лиц). Мы снова рассмотрим рынок (1.6)–(1.7). Если на рынке есть крупные инвесторы и эти инвесторы *хорошо осведомлены*, то это означает, что они имеют доступ к бо́льшей фильтрации $\mathscr{G}_t \supset \mathscr{F}_t$, когда они принимают свои решения. Это приводит к динамике цен, где коэффициенты $\rho(t)$, $\mu(t)$, $\sigma(t)$ и $\theta(t,z)$ являются $\mathscr{G}_t$-измеримыми и не обязательно $\mathscr{F}_t$-измеримы. Частично информированный инвестор на таком рынке снова сталкивается с проблемой вида (1.8)–(1.9).

Пример 1.4 (рынки с запаздывающими эффектами от шума). Предположим, что у нас есть рынок без скачков ($\theta = 0$) и с ценами акций $S_1(t), \dots, S_N(t)$, определяемыми формулой

$$d^- S_i(t) = S_i(t)\Big[\mu_i(t)\,dt + \sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij}(t)\, d^- B_j(t-\delta_i)\Big], \qquad 1 \leqslant i \leqslant N. \tag{1.10}$$

Как и выше, $B(t) = (B_1(t), \dots, B_N(t))$ – N-мерное броуновское движение с его фильтрацией $\mathscr{F}_t$. Предположим, что $\mu_i(t)$ и $\sigma_{ij}(t)$ $\mathscr{F}_t$-согласованы. Однако в этой модели мы допускаем *запаздывание* $\delta_i \geqslant 0$ в эффекте, производимом на цену $S_i(\,\cdot\,)$ шумом, исходящим от $B(\,\cdot\,)$. Кроме того, для некоторых акций эффект того же основного шума может происходить позже, чем для других, и поэтому величины δ_i не обязаны быть одинаковыми.

Интегрируя (1.10), получаем

$$\begin{aligned} S_i(t) &= S_i(0) + \int_0^t S_i(s)\mu_i(s)\,ds + \sum_{j=1}^{N} \int_0^t S_i(s)\sigma_{ij}(s)\, d^- B_j(s-\delta_i) \\ &= S_i(0) + \int_{-\delta_i}^{t-\delta_i} S_i(r+\delta_i)\mu_i(r+\delta_i)\,dr \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N} \int_{-\delta_i}^{t-\delta_i} S_i(r+\delta_i)\sigma_{ij}(r+\delta_i)\, d^- B_j(r). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Положим

$$\widetilde{S}_i(t) = S_i(t+\delta_i), \qquad -\delta_i \leqslant t, \quad 1 \leqslant i \leqslant N. \tag{1.12}$$

Тогда можно переписать (1.11) в виде

$$\begin{aligned} \widetilde{S}_i(t) &= S_i(0) + \int_{-\delta_i}^{t} \widetilde{S}_i(r)\mu_i(r+\delta_i)\,dr + \sum_{j=1}^{N} \int_{-\delta_i}^{t} \widetilde{S}_i(r)\sigma_{ij}(r+\delta_i)\, d^- B_j(r) \\ &= \widetilde{S}_i(0) + \int_0^t \widetilde{S}_i(r)\mu_i(r+\delta_i)\,dr + \sum_{j=1}^{N} \int_0^t \widetilde{S}_i(r)\sigma_{ij}(r+\delta_i)\, d^- B_j(r) \end{aligned} \tag{1.13}$$

или, что то же,

$$d\widetilde{S}_i(t) = \widetilde{S}_i(t)\Big[\widetilde{\mu}_i(t)\,dt + \sum_{j=1}^{N} \widetilde{\sigma}_{ij}(t)\, d^- B_j(t)\Big], \qquad \widetilde{S}_i(0) = S_i(\delta), \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \tag{1.14}$$

где $\widetilde{\mu}_i(t) = \mu_i(t+\delta_i)$, $\widetilde{\sigma}_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t+\delta_i)$, $1 \leqslant i, j \leqslant N$.

Заметим, что это уравнение для цены – того же типа, что и (1.6) (пример 1.2), и коэффициенты $\widetilde{\mu}_i(t)$ и $\widetilde{\sigma}_{ij}(t)$ согласованы с фильтрацией

$$\mathscr{G}_t := \mathscr{F}_{t+\delta},$$

где

$$\delta = \max(\delta_1, \dots, \delta_N).$$

Мы можем снова рассмотреть задачу об оптимальном портфеле вида (1.9), где информация, доступная агенту, моделируется некоторой заданной фильтрацией $\mathscr{E}_t \subseteq \mathscr{F}_t$.

Цель этой статьи – дать явное решение задачи того же типа, что и описанная в примере 1.2, в случае логарифмической полезности, т.е. в случае

$$U(x) = \ln x, \qquad x > 0. \tag{1.15}$$

Для простоты мы разделим обсуждение на два случая:

(i) чисто непрерывный случай ($\sigma \neq 0, \theta = 0$),

(ii) чисто скачкообразный случай ($\sigma = 0, \theta \neq 0$).

2. Непрерывный случай ($\theta = 0$)

Обращаясь к примерам 1.2 и 1.3, мы сейчас изучим рынок $\mathscr{M}(\mathscr{E}, \mathscr{G})$, заданный уравнениями

$$\text{(цена облигаций)} \qquad dS_0(t) = \rho(t) S_0(t)\, dt, \quad S_0(0) = 1, \tag{2.1}$$

$$\text{(цена акций)} \qquad dS_1(t) = S_1(t)[\mu(t)\, dt + \sigma(t)\, d^- B(t)], \quad S_1(0) > 0, \tag{2.2}$$

где мы предполагаем, что $\rho(t)$, $\mu(t)$ и $\sigma(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\rho(t), \mu(t), \sigma(t) \text{ являются } \mathscr{G}_t\text{-согласованными (см. (1.3))}, \tag{2.3}$$

$$\mathsf{E}\left[\int_0^T \{|\rho(t)| + |\mu(t)| + \sigma^2(t)\}\, dt\right] < \infty, \tag{2.4}$$

$\sigma(t)$ дифференцируема по Маллявену и $D_{t^+}\sigma(t) = \lim\limits_{s \to t^+} D_s \sigma(t)$
существует для почти всех $t \in [0, T]$, где D_s обозначает
производную Маллявена в точке s (см. определение 2.5 ниже), (2.5)

уравнение (2.2) имеет единственное $\mathscr{G}_t$-согласованное
решение $S_1(t)$, $t \in [0, T]$. (2.6)

Как и выше, $\{\mathscr{E}_t\}_{t \in [0,T]}$ и $\{\mathscr{G}_t\}_{t \in [0,T]}$ являются данными фильтрациями, удовлетворяющими условию

$$\mathscr{E}_t \subseteq \mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{G}_t \subseteq \mathscr{F} \quad \text{для всех} \quad t \in [0, T]. \tag{2.7}$$

Определение 2.1. Множество $\mathscr{A}_{\mathscr{E}}$ *допустимых портфелей* состоит из всех процессов $\pi(t)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\pi(t) \quad \mathscr{E}_t\text{-согласован}, \tag{2.8}$$

$$\pi(t)\sigma(t)\ \textit{интегрируема по Скороходу}, \text{ непрерывна слева и имеет пределы справа}, \tag{2.9}$$

$$\mathsf{E}\biggl[\int_0^T |\pi(t)D_{t+}\sigma(t)|\,dt\biggr] < \infty, \tag{2.10}$$

$$\mathsf{E}\biggl[\int_0^T |\mu(t)-\rho(t)|\cdot|\pi(t)|\,dt\biggr] < \infty. \tag{2.11}$$

Для моделей из примера 1.2 мы рассматриваем следующую задачу об оптимальном портфеле при частичном наблюдении.

Задача 2.2. Найти $\Phi(x)$ и $\pi^* \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}}$, удовлетворяющие условию

$$\Phi(x) = \sup_{\pi\in\mathscr{A}_{\mathscr{E}}} \mathsf{E}^x[\ln X^{(\pi)}(T)] = \mathsf{E}^x[\ln X^{(\pi^*)}(T)], \tag{2.12}$$

где процесс $X^{(\pi)}(t) = X(t)$ задан условием $X(0) = x > 0$ и уравнением

$$dX(t) = X(t)[(\rho(t) + (\mu(t)-\rho(t))\pi(t))\,dt + \pi(t)\sigma(t)\,d^-B(t)]. \tag{2.13}$$

Функция $\Phi \leqslant \infty$ называется ***функцией цены***, а портфель π^* (если он существует) называется *оптимальным* для задачи 2.2.

Для удобства читателя, перед тем, как решать задачу 2.2, мы приведем обзор математических средств ее решения. Мы отсылаем читателя к [9], [10] и [11] за подробностями.

Пусть λ обозначает меру Лебега на $[0,T]$, и пусть $L^2(\lambda^n)$ – пространство всех детерминированных функций $f\colon [0,T]^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{L^2(\lambda^n)} = \int_{[0,T]^n} f^2(x)\,d\lambda(x) = \int_{[0,T]^n} f^2(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n < \infty.$$

Если f – вещественная функция на $[0,T]^n$, то мы определим ее *симметризацию* $\widetilde{f}$ формулой

$$\widetilde{f}(t_1,\dots,t_n) = \frac{1}{n!}\sum_{\alpha} f(t_{\alpha_1},\dots,t_{\alpha_n}),$$

где сумма берется по всем подстановкам α на множестве $\{1,2,\dots,n\}$. Мы будем говорить, что f *симметрична*, если $\widetilde{f} = f$. Пусть $\widetilde{L}^2(\lambda^n)$ обозначает множество всех симметричных функций в $L^2(\lambda^n)$. Положим

$$\mathscr{S}_n = \{(t_1,\dots,t_n) \in [0,T]^n;\ 0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant T\}.$$

Если $f \in L^2(\mathscr{S}_n)$, то мы определим n-кратный повторный интеграл относительно $B(\,\cdot\,)$ формулой

$$J_n(f) = \int_0^T \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} f(t_1, \dots, t_n)\, dB(t_1) \cdots dB(t_n)$$

и при $f \in \widetilde{L}^2(\lambda^n)$ положим

$$I_n(f) := \int_{[0,T]^n} f(t_1, \dots, t_n)\, dB^{\otimes n}(t) := n!\, J_n(f).$$

Теперь мы можем сформулировать теорему Винера–Ито о хаотическом представлении.

Теорема 2.3. *Любая $\mathscr{F}_T$-измеримая случайная величина $F \in L^2(\mathsf{P})$ может быть записана в виде*

$$F = \mathsf{E}[F] + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n) := \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$$

для некоторой однозначно определенной последовательности детерминированных функций $f_n \in \widetilde{L}^2(\lambda^n)$. Кроме того, имеет место изометрия

$$\mathsf{E}[F^2] = (\mathsf{E}[F])^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n!\, \|f_n\|_{L^2(\lambda^n)}. \tag{2.14}$$

Это представление используется в определении интегралов Скорохода и производных Маллявена следующим образом.

Пусть $\phi(t,\omega)\colon [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ – измеримый процесс, удовлетворяющий условию

$$\mathsf{E}[\phi^2(t,\,\cdot\,)] < \infty,$$

причем

$$\text{функция } \phi(t,\,\cdot\,)\ \ \mathscr{F}_T\text{-измерима для любого } t \in [0,T].$$

Пусть

$$\phi(t,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(\,\cdot\,,t))$$

– хаотическое представление для $\phi(t,\,\cdot\,)$, и пусть $\widetilde{f}(t_1, \dots, t_n, t_{n+1})$ – симметризация функции $f(t_1, \dots, t_n, t)$ относительно $n+1$ переменных $t_1, \dots, t_n, t_{n+1} = t$.

Определение 2.4. Предположим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!\,\|\widetilde{f}_n\|^2_{L^2(\lambda^{n+1})} < \infty. \tag{2.15}$$

Тогда мы определим *интеграл Скорохода* от ϕ относительно $B(\,\cdot\,)$ формулой

$$\int_0^T \phi(t,\omega)\,\delta B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\widetilde{f}_n).$$

Заметим, что из (2.14) следует соотношение

$$\mathsf{E}\biggl[\biggl(\int_0^T \phi(t,\omega)\,\delta B(t)\biggr)^2\biggr] = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!\,\|\widetilde{f}_n\|^2_{L^2(\lambda^{n+1})} < \infty, \tag{2.16}$$

так что интеграл Скорохода, если он определен, принадлежит $L^2(\mathsf{P})$. Кроме того,

$$\mathsf{E}\biggl[\int_0^T \phi(t,\omega)\,\delta B(t)\biggr] = 0. \tag{2.17}$$

Можно показать, что интеграл Скорохода является расширением интеграла Ито в том смысле, что если $\phi(t,\omega)$ $\mathscr{F}_t$-согласована и интегрируема в смысле Скорохода, то

$$\int_0^T \phi(t,\omega)\,\delta B(t) = \int_0^T \phi(t,\omega)\,dB(t).$$

Определение 2.5. Пусть $F \in L^2(\mathsf{P})$ $\mathscr{F}_T$-измерима и имеет разложение

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n), \qquad f_n \in \widetilde{L}^2(\lambda^n).$$

Мы назовем функцию F *дифференцируемой по Маллявену* и будем писать $F \in \mathbb{D}_{1,2}$, если

$$\|F\|^2_{\mathbb{D}_{1,2}} := (\mathsf{E}[F])^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n\,n!\,\|f_n\|^2_{L^2(\lambda^n)} < \infty. \tag{2.18}$$

Если $F \in \mathbb{D}_{1,2}$, то мы определяем *производную Маллявена* функции F в точке $t \in [0,T]$ формулой

$$D_t F = \sum_{n=1}^{\infty} n\,I_{n-1}(f_n(\,\cdot\,,t)),$$

где $I_{n-1}(f_n(\,\cdot\,,t))$ – $(n-1)$-кратный повторный интеграл от $f(t_1,\dots,t_{n-1},t)$ как функции первых $n-1$ переменных $t_1,\dots,t_{n-1}$.

Так как

$$\mathsf{E}\biggl[\int_0^T (D_tF)^2\,dt\biggr] = \sum_{n=1}^{\infty} n\,n!\,\|f_n\|^2_{L^2(\lambda^n)}, \tag{2.19}$$

мы видим, что если (2.18) выполняется, то D_tF существует для почти всех $t \in [0,T]$.

Производная Маллявена D_t подчиняется обычному цепному правилу. Например, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.6. *Пусть* $f \in C^1(\mathbb{R})$ – *функция с ограниченными производными, и пусть* $F \in \mathbb{D}_{1,2}$. *Тогда* $f(F) \in \mathbb{D}_{1,2}$ *и*

$$D_t(f(F)) = f'(F) \cdot D_t F. \tag{2.20}$$

Напомним теперь определение *прямых интегралов* относительно $B(\,\cdot\,)$. Более подробную информацию об этих интегралах можно найти в [10], [13] и [14].

Определение 2.7. Пусть $\phi\colon [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}$ – измеримый процесс, который не обязательно $\mathscr{F}_t$-согласован. Тогда мы определяем *прямой интеграл* от ϕ относительно $B(\,\cdot\,)$ формулой

$$\int_0^T \phi(t)d^- B(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \phi(t)\frac{B(t+\varepsilon)-B(t)}{\varepsilon}\,dt, \tag{2.21}$$

если предел существует по вероятности.

Используя стохастическую теорему Фубини, мы получаем следующее более продуктивное описание прямого интеграла.

Лемма 2.8. а) *Пусть прямой интеграл от* $\phi\colon [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}$ *существует и* ϕ *непрерывна слева и имеет пределы справа. Тогда*

$$\int_0^T \phi(t)\,d^- B(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\sum_{j=0}^{N-1}\phi(t_j)(B(t_{j+1})-B(t_j)) \tag{2.22}$$

(*предел по вероятности*), *где* $0=t_0<t_1<\dots<t_N=T$ – *разбиение* $[0,T]$ *и* $\Delta t = t_{j+1}-t_j$ *для всех* $j=0,\dots,N-1$.

б) *Предположим, кроме того, что* $B(t)$ – *семимартингал относительно* $(\mathscr{G}_t)$ *и что* $\phi(t)$ $\mathscr{G}_t$-*измерим для любого* $t\in[0,T]$. *Тогда*

$$\int_0^T \phi(t)\,d^- B(t) = \int_0^T \phi(t)\,dB(t),$$

где интеграл в правой части – обычный интеграл Ито (*по семимартингалу*).

Доказательство. Этот хорошо известный результат следует из соображений, использованных в [1; (2.2) и следствие 2.5].

Доказательство следующего основного соотношения между прямым интегралом и интегралом Скорохода можно найти в [1; лемма 2.2].

Лемма 2.9. *Предположим, что процесс* $\phi\colon [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}$ *интегрируем по Скороходу, непрерывен слева и имеет пределы справа. Кроме того, предположим, что производная*

$$D_{t^+}\phi(t) := \lim_{s\to t^+} D_s\phi(t)$$

существует для почти всех $t\in[0,T]$ *и*

$$\int_0^T |D_{t^+}\phi(t)|\,dt < \infty.$$

Тогда прямой интеграл от ϕ *существует и*

$$\int_0^T \phi(t)\,d^- B(t) = \int_0^T \phi(t)\,\delta B(t) + \int_0^T D_{t^+}\phi(t)\,dt. \tag{2.23}$$

Так как интегралы Скорохода имеют нулевое математическое ожидание (см. (2.17)), то из леммы 2.9 получаем следующий результат.

Следствие 2.10. *Пусть* ϕ – *как в лемме* 2.9. *Тогда*

$$\mathsf{E}\left[\int_0^T \phi(t)\,d^- B(t)\right] = \mathsf{E}\left[\int_0^T D_{t+}\phi(t)\,dt\right], \tag{2.24}$$

если математические ожидания существуют.

Нам также нужна следующая формула Ито для прямых интегралов.

Теорема 2.11 [14]. *Пусть* $X(t)$ – *стохастический процесс вида*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \alpha(s)\,ds + \int_0^t \gamma(s)\,d^- B(s).$$

Пусть $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^2)$. *Положим*

$$Y(t) = f(t, X(t)).$$

Тогда

$$\begin{aligned} Y(t) = Y(0) &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X(s))\,ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X(s))\,d^- X(s) \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X(s))\gamma^2(s)\,ds, \end{aligned} \tag{2.25}$$

где

$$d^- X(s) = \alpha(s)\,ds + \gamma(s)\,d^- B(s).$$

Мы теперь переходим к решению задачи 2.2.

Применяя теорему 2.11 к прямому уравнению (2.13), мы получаем (единственное) решение

$$\begin{aligned} X^{(\pi)}(T) = x\exp\biggl\{&\int_0^T \left[\rho(t) + (\mu(t) - \rho(t))\pi(t) - \frac{1}{2}\pi^2(t)\sigma^2(t)\right] dt \\ &+ \int_0^T \pi(t)\sigma(t)\,d^- B(t)\biggr\}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Поэтому из (2.24) следует, что

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}[\ln X^{(\pi)}(T)] - \ln x \\ &\quad= \mathsf{E}\left[\int_0^T \left\{\rho(t) + (\mu(t) - \rho(t))\pi(t) - \frac{1}{2}\pi^2(t)\sigma^2(t)\right\} dt + \int_0^T \pi(t)\sigma(t)\,d^- B(t)\right] \\ &\quad= \mathsf{E}\left[\int_0^T \left\{\rho(t) + (\mu(t) - \rho(t))\pi(t) - \frac{1}{2}\pi^2(t)\sigma^2(t) + D_{t+}(\pi(t)\sigma(t))\right\} dt\right]. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Так как все $\pi(t)$ $\mathscr{E}_t$-измеримы и $\mathscr{E}_t \subseteq \mathscr{F}_t$, то

$$D_s\pi(t) = 0 \quad \text{для всех} \quad s > t. \tag{2.28}$$

Следовательно, по цепному правилу для производной Маллявена,

$$D_{t^+}(\pi(t)\sigma(t)) = \sigma(t)D_{t^+}\pi(t) + \pi(t)D_{t^+}\sigma(t) = \pi(t)D_{t^+}\sigma(t),$$

и, подставляя это соотношение в (2.27), получаем

$$\mathsf{E}[\ln X^{(\pi)}(T)] - \ln x = \mathsf{E}\left[\int_0^T \left\{\rho(s) + \beta(s)\pi(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\pi^2(s)\right\} ds\right],$$

где

$$\beta(s) := \mu(s) - \rho(s) + D_{s^+}\sigma(s). \tag{2.29}$$

Предположим теперь, что

$$\sigma(t) \neq 0 \quad \text{для почти всех} \quad (t, \omega). \tag{2.30}$$

Так как

$$\beta\pi - \frac{1}{2}\sigma^2\pi^2 = -\frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{\beta}{\sigma^2} - \pi\right)^2 + \frac{\beta^2}{2\sigma^2}\,,$$

то

$$\Phi(x) := \sup_{\pi \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}}} \mathsf{E}^x[\ln X^{(\pi)}(T)] = \ln x + \mathsf{E}\left[\int_0^T \left\{\rho(s) + \frac{\beta^2(s)}{2\sigma^2(s)}\right\} ds\right] - \frac{1}{2}\Psi, \tag{2.31}$$

где

$$\Psi := \inf_{\pi \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}}} \int_0^T \mathsf{E}\left[\left(\frac{\beta(s)}{\sigma^2(s)} - \pi(s)\right)^2 \sigma^2(s)\right] ds. \tag{2.32}$$

Для фиксированного $s \in [0, T]$ определим меру $\mathsf{Q}_s(\,\cdot\,)$ на $\mathscr{G}_T$ формулой

$$d\mathsf{Q}_s(\omega) = \sigma^2(s, \omega)\, d\mathsf{P}(\omega). \tag{2.33}$$

Теперь мы видим, что оптимумом $\pi = \widehat{\pi}$ для задачи (2.32) является

$$\widehat{\pi}(s) = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}_s}\left[\frac{\beta(s)}{\sigma^2(s)} \;\middle|\; \mathscr{E}_s\right].$$

По формуле Байеса

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}_s}\left[\frac{\beta(s)}{\sigma^2(s)} \;\middle|\; \mathscr{E}_s\right] = \frac{\mathsf{E}\left[\sigma^2(s)\frac{\beta(s)}{\sigma^2(s)} \mid \mathscr{E}_s\right]}{\mathsf{E}[\sigma^2(s) \mid \mathscr{E}_s]} = \frac{\mathsf{E}[\beta(s) \mid \mathscr{E}_s]}{\mathsf{E}[\sigma^2(s) \mid \mathscr{E}_s]}\,, \tag{2.34}$$

где $\mathsf{E} = \mathsf{E}_{\mathsf{P}}$.

Суммируя сказанное выше, мы получаем части а) и б) следующего результата.

Теорема 2.12. а) *Предположим, что* $\sigma(t) \neq 0$ *для почти всех* (t, ω) *и*

$$\mathsf{E}\left[\int_0^T \frac{\beta^2(s)}{\sigma^2(s)}\,ds\right] < \infty, \tag{2.35}$$

где $\beta(s)$ *определено формулой* (2.29). *Тогда функция цены* Φ *в задаче* 2.2 *удовлетворяет соотношению*

$$\Phi(x) = \ln x + \mathsf{E}\left[\int_0^T \left\{\rho(s) + \frac{\beta(s)\mathsf{E}[\beta(s) \mid \mathscr{E}_s]}{\mathsf{E}[\sigma^2(s) \mid \mathscr{E}_s]} - \frac{\sigma^2(s)}{2}\left(\frac{\mathsf{E}[\beta(s) \mid \mathscr{E}_s]}{\mathsf{E}[\sigma^2(s) \mid \mathscr{E}_s]}\right)^2\right\} ds\right] < \infty. \tag{2.36}$$

б) *Предположим, что* $\sigma(t) \neq 0$ *для почти всех* (t, ω) *и что*

$$\widehat{\pi}(s) := \frac{\mathsf{E}[\beta(s) \mid \mathscr{E}_s]}{\mathsf{E}[\sigma^2(s) \mid \mathscr{E}_s]} \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}}. \tag{2.37}$$

Тогда $\pi^*(s) := \widehat{\pi}(s)$ *– оптимальное управление для задачи* 2.2.

в) *Предположим, что существует оптимальный портфель* $\pi^* \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}}$ *для задачи* 2.2. *Тогда*

$$\pi^*(s)\mathsf{E}[\sigma^2(s) \mid \mathscr{E}_s] = \mathsf{E}[\beta(s) \mid \mathscr{E}_s]. \tag{2.38}$$

Доказательство. Остается доказать утверждение в). При $\pi \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}}$ положим

$$\begin{aligned}
F(\pi) &= \mathsf{E}\left[\ln \frac{X^{(\pi)}(T)}{x}\right] \\
&= \mathsf{E}\left[\int_0^T \left\{\rho(s) + (\mu(s) - \rho(s))\pi(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\pi^2(s)\right\} ds + \int_0^T \pi(s)\sigma(s)\,d^-B(s)\right] \\
&= \mathsf{E}\left[\int_0^T \left\{\rho(s) + \beta(s)\pi(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\pi^2(s)\right\} ds\right].
\end{aligned}$$

Если π^* – оптимальный портфель, то функция

$$r \to F(\pi^* + r\eta), \qquad r \in \mathbb{R},$$

максимальна при $r = 0$ для любого $\eta \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
0 = \frac{d}{dr}F(\pi^* + r\eta)\big|_{r=0} &= \mathsf{E}\left[\int_0^T \{\beta(s)\eta(s) - \sigma^2(s)\pi^*(s)\eta(s)\}\,ds\right] \\
&= \int_0^T \mathsf{E}[\{\beta(s) - \sigma^2(s)\pi^*(s)\}\eta(s)]\,ds.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Так как это выполняется для любого $\eta \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}}$ и множество случайных величин $\eta(s)$, $\eta \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}}$, порождает всю σ-алгебру $\mathscr{E}_s$, то мы можем заключить из (2.39), что

$$\mathsf{E}[\beta(s) - \sigma^2(s)\pi^*(s) \mid \mathscr{E}_s] = 0,$$

или

$$\pi^*(s)\mathsf{E}[\sigma^2(s) \mid \mathscr{E}_s] = \mathsf{E}[\beta(s) \mid \mathscr{E}_s],$$

что совпадает с (2.38).

Следствие 2.13. а) *Предположим, что*

$$\sigma(s) \quad \mathscr{F}_s\text{-}\textit{измерима для любого } s \in [0,T]. \tag{2.40}$$

Тогда

$$D_{s^+}\sigma(s) = 0 \quad \textit{для} \quad \textit{любого} \quad s \in [0,T] \tag{2.41}$$

и, следовательно,

$$\beta(s) = \mu(s) - \rho(s). \tag{2.42}$$

Если выполнены условия теоремы 2.12, *то отсюда следует, что*

$$\pi^*(s) = \frac{\mathsf{E}[\mu(s) - \rho(s) \mid \mathscr{E}_s]}{\sigma^2(s)} \tag{2.43}$$

с соответствующей функцией цены

$$\Phi(x) = \ln x + \mathsf{E}\biggl[\int_0^T \biggl\{\rho(s) + \frac{\beta(s)\mathsf{E}[\beta(s) \mid \mathscr{E}_s]}{\sigma^2(s)} - \frac{1}{2}\frac{(\mathsf{E}[\beta(s) \mid \mathscr{E}_s])^2}{\sigma^2(s)}\biggr\}\,ds\biggr]. \tag{2.44}$$

б) *В частности, если предположить, что*

$$\mathscr{E}_t = \mathscr{F}_t = \mathscr{G}_t \quad \textit{для} \quad \textit{любого} \quad t \in [0,T], \tag{2.45}$$

то мы получим хорошо известный результат

$$\pi^*(s) = \frac{\mu(s) - \rho(s)}{\sigma^2(s)} \tag{2.46}$$

и

$$\Phi(x) = \ln x + \mathsf{E}\biggl[\int_0^T \biggl\{\rho(s) + \frac{1}{2}\biggl(\frac{\mu(s) - \rho(s)}{\sigma(s)}\biggr)^2\biggr\}\,ds\biggr] \tag{2.47}$$

при условии, что

$$\mathsf{E}\biggl[\int_0^T \biggl(\frac{\mu(s) - \rho(s)}{\sigma(s)}\biggr)^2 ds\biggr] < \infty. \tag{2.48}$$

Пример 2.14 (запаздывающий шумовой эффект). Предположим, что $\mathscr{E}_t = \mathscr{F}_t$ и $\mathscr{G}_t = \mathscr{F}_{t+\delta}$ для некоторого $\delta > 0$. Пусть $\mu(s)$ и $\rho(s)$ ограничены и $\mathscr{F}_{s+\delta}$-измеримы; выберем

$$\sigma(s) = \exp(B(s+\delta)), \qquad s \in [0,T].$$

(См. пример 1.4.) Тогда $D_{s^+}\sigma(s) = \sigma(s)$ и, следовательно, соответствующий оптимальный портфель по теореме 2.12 определяется формулой

$$\pi^*_\delta(s) = \frac{\mathsf{E}[\mu(s) - \rho(s) + \sigma(s) \mid \mathscr{F}_s]}{\mathsf{E}[\sigma^2(s) \mid \mathscr{F}_s]} \quad \text{при} \quad \delta > 0. \tag{2.49}$$

С другой стороны, если $\mathscr{E}_t = \mathscr{F}_t = \mathscr{G}_t$ (что соответствует $\delta = 0$), то $D_{s^+}\sigma(s) = 0$, и из следствия 2.13 мы знаем, что оптимальный портфель равен

$$\pi_0^*(s) = \frac{\mu(s) - \rho(s)}{\sigma^2(s)}\,. \tag{2.50}$$

Сравнивая (2.49) и (2.50), мы видим, что, быть может неожиданно,

$$\lim_{\delta \to 0^+} \pi_\delta^*(s) \neq \pi_0^*(s). \tag{2.51}$$

Аналогично, если соответствующие функции цены обозначить через $\Phi_\delta(s)$ и $\Phi_0(x)$, то получим

$$\lim_{\delta \to 0^+} \Phi_\delta(x) = \ln x + \mathsf{E}\biggl[\int_0^T \biggl\{\rho(s) + \frac{1}{2}\biggl(\frac{\mu(s) - \rho(s)}{\sigma(s)} + 1\biggr)^2\biggr\}\,ds\biggr] \neq \Phi_0(x). \tag{2.52}$$

Мы заключаем, что любое положительное запаздывание информации δ, как бы оно ни было мало, оказывает существенное влияние на оптимальное управление и на функцию цены.

Арбитраж. Решение задачи 2.2 может быть использовано для изучения вопроса, существует ли арбитраж для этого рынка. Заметим, что, вообще говоря, процесс цен $S_1(t)$ – не семимартингал, так что мы не можем использовать результаты для семимартингальных моделей в финансах для подхода к решению этого вопроса.

Замечание. В [2] доказано, что если $S(t)$ – любой заданный процесс цен, для которого нет арбитража при использовании простых подынтегральных выражений (портфелей), то $S(t)$ необходимо является семимартингалом. Однако мы не можем применить этот результат здесь, поскольку простые портфели из [2] не обязательно допустимы в нашей модели.

Определение 2.15. Портфель $\pi \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}}$ называется *арбитражем* для рынка $\mathscr{M}(\mathscr{E}, \mathscr{G})$, определенного формулами (2.1)–(2.7), если

$$\overline{X}^{(\pi)}(T) \geqslant X^{(\pi)}(0) \quad \text{почти наверное} \tag{2.53}$$

и

$$\mathsf{P}[\overline{X}^{(\pi)}(T) > X^{(\pi)}(0)] > 0. \tag{2.54}$$

Здесь

$$\overline{X}^{(\pi)}(t) = \exp\biggl(-\int_0^t \rho(s)\,ds\biggr) X^{(\pi)}(t) \tag{2.55}$$

– *нормализованный* (дисконтированный) процесс обогащения.

Лемма 2.16. *Пусть $\Phi(x)$ – функция цены в задаче 2.2. Предположим, что*

$$\Phi(x) < \infty.$$

Тогда рынок $\mathscr{M}(\mathscr{E}, \mathscr{G})$ не допускает арбитража.

Доказательство. При $\pi \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}}$ имеем (для $X(0) = x$)

$$\mathsf{E}^x\left[\ln \frac{\overline{X}^{(\pi)}(T)}{x}\right] = \mathsf{E}\left[\int_0^T \left[(\mu(t) - \rho(t))\pi(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t)\pi^2(t)\right] dt + \int_0^T \pi(t)\sigma(t)\, d^- B(t)\right].$$

Если $\pi_1 \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}}$ – арбитраж, то из (2.53) и (2.54) следует, что

$$0 < \mathsf{E}^x\left[\ln \frac{\overline{X}^{(\pi_1)}(T)}{x}\right].$$

Поэтому,

$$\mathsf{E}\left[\int_0^T (\mu(t) - \rho(t))\pi_1(t)\, dt + \int_0^T \pi_1(t)\sigma(t)\, d^- B(t)\right] := \phi_1 > 0.$$

Тогда если мы заменим $\pi_1(t)$ на $\pi_m(t) := m\pi_1(t)$, $m = 1, 2, \ldots$, то получим

$$\Phi(x) \geqslant \mathsf{E}^x\left[\ln X^{(\pi_m)}(T)\right] = \ln x + \mathsf{E}\left[\int_0^T \rho(s)\, ds\right] + m\phi_1 \to \infty$$

при $m \to \infty$. Следовательно, если арбитраж $\pi_1 \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}}$ существует, то $\Phi(x) = \infty$. Лемма доказана.

Объединяя этот факт с теоремой 2.12, получаем следующее утверждение.

Теорема 2.17. *Предположим, что*

$$\mathsf{E}\left[\int_0^T \sigma^{-2}(s)(\mu(s) - \rho(s) + D_{s^+}\sigma(s))^2\, ds\right] < \infty. \tag{2.56}$$

Тогда рынок $\mathscr{M}(\mathscr{E}, \mathscr{G})$ не допускает арбитража.

3. Случай чистых скачков ($\sigma = 0$)

В рамках примера 1.2 мы теперь рассматриваем рынок $\mathscr{N}(\mathscr{E}, \mathscr{G})$, заданный условиями

(цена облигаций) $dS_0(t) = \rho(t)S_0(t)\, dt,\ S_0(0) = 1,$ (3.1)

(цена акций) $dS_1(t) = S_1(t^-)\left[\mu(t)\, dt + \int_{\mathbb{R}} \theta(t, z)\, \widetilde{N}(d^-t, dz)\right],\ S_1(0) > 0,$ (3.2)

где мы предполагаем, что $\rho(t)$, $\mu(t)$ и $\theta(t, z)$ удовлетворяют следующим условиям:

$\rho(t)$, $\mu(t)$ и $\theta(t, z)$ являются $\mathscr{G}_t$-измеримыми для любых $t \in [0, T]$ и $z \in \mathbb{R}$, (3.3)

$\theta(t, z)$ ограничена и дифференцируема по Маллявену,
и предел $D_{t^+,z}\theta(t, z) := \lim\limits_{s \to t^+} D_{s,z}\sigma(t, z)$ существует для почти всех t, z и ограничен,
где $D_{s,z}$ обозначает производную Маллявена в s, z (см. определение 3.5), (3.4)

$$\mathsf{E}\left[\int_0^T \left\{|\rho(s)| + |\mu(s)| + \int_{\mathbb{R}} (|\theta(s, z)| + |D_{s^+,z}\theta(s, z)|)\, \nu(dz)\right\} ds\right] < \infty,$$
где ν – мера Леви $\eta(\,\cdot\,)$, так что $\widetilde{N}(dt, dz) = N(dt, dz) - \nu(dz)\, dt$, (3.5)

уравнение (3.2) имеет единственное $\mathscr{G}_t$-согласованное решение $S_1(t)$, $t \in [0, T]$. (3.6)

Как и выше, $\{\mathscr{E}_t\}_{t\in[0,T]}$ и $\{\mathscr{G}_t\}_{t\in[0,T]}$ являются данными фильтрациями, удовлетворяющими условию

$$\mathscr{E}_t \subseteq \mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{G}_t \subseteq \mathscr{F} \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T]. \tag{3.7}$$

Определение 3.1. Множество $\mathscr{A}_{\mathscr{E}}$ допустимых портфелей состоит из всех процессов $\pi(t)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\pi(t) \ \ \mathscr{E}_t\text{-согласован,} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}&\pi(t)\theta(t,z) \text{ интегрируема по Скороходу относительно } \widetilde{N}(\,\cdot\,,\cdot\,)\\ &\text{(см. определение 3.4), непрерывна слева и имеет пределы справа,}\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}&\pi(t)\theta(t,z) > -1+\varepsilon \text{ для почти всех } t,z \text{ (где } \varepsilon>0 \text{ может зависеть от } \pi)\\ &\text{и } \mathsf{E}\biggl[\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |\ln(1+\pi(s)\theta(s,z))|\,\nu(dz)\,dt\biggr] < \infty,\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}&\pi(t)(\theta(t,z)+D_{t^+,z}\theta(t,z)) > -1+\varepsilon \text{ для почти всех } t,z\\ &\text{(где } \varepsilon>0 \text{ может зависеть от } \pi)\\ &\text{и } \mathsf{E}\biggl[\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |\ln(1+\pi(t)(\theta(t,z)+D_{t^+,z}\theta(t,z)))|\,\nu(dz)\,dt\biggr] < \infty.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Задача 3.2. Найти $\Phi(x)$ и $\pi^* \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}}$, удовлетворяющие условию

$$\Phi(x) = \sup_{\pi\in\mathscr{A}_{\mathscr{E}}} \mathsf{E}^x[\ln X^{(\pi)}(T)] = \mathsf{E}^x[\ln X^{(\pi^*)}(T)], \tag{3.12}$$

где $X^{(\pi)}(t)=X(t)$ определяется условием $X(0)=x>0$ и уравнением

$$dX(t) = X(t^-)\biggl[(\rho(t)+(\mu(t)-\rho(t))\pi(t))\,dt + \pi(t)\int_{\mathbb{R}}\theta(t,z)\,\widetilde{N}(d^-t,dz)\biggr]. \tag{3.13}$$

Функция $\Phi \leqslant \infty$ называется *функцией цены*, и портфель π^* (если он существует) называется *оптимальным* для задачи 3.2.

Прежде чем приступить к более подробному изучению задачи 3.2, мы приведем обзор некоторого математического аппарата, касающегося исчисления Маллявена и предваряющего исчисления в случае диффузий со скачками. Доказательства и детали можно найти в [3]. См. также [4], где сходные методы используются для отыскания оптимального портфеля хорошо информированного инвестора.

Сначала напомним хаотическое представление в терминах повторных интегралов по компенсированной пуассоновской случайной мере $\widetilde{N}(dt,dz)$, введенное в [5]. (См. также [8].)

Пусть λ обозначает меру Лебега на $[0,T]$, и пусть $L^2((\lambda\times\nu)^n)$ – пространство всех детерминированных функций $f\colon ([0,T]\times\mathbb{R})^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|^2_{L^2((\lambda\times\nu)^n)} := \int_{([0,T]\times\mathbb{R})^n} f^2(t_1,z_1,\dots,t_n,z_n)\,dt_1\,\nu(dz_1)\cdots dt_n\,\nu(dz_n) < \infty.$$

Если f – вещественная функция на $([0,T]\times\mathbb{R})^n$, то мы определяем ее *симметризацию* $\widetilde{f}$ относительно переменных $(t_1,z_1),\dots,(t_n,z_n)$ формулой

$$\widetilde{f}(t_1,z_1,\dots,t_n,z_n)=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma} f(t_{\sigma_1},z_{\sigma_1},\dots,t_{\sigma_n},z_{\sigma_n}),$$

где сумма берется по всем перестановкам σ множества $\{1,\dots,n\}$. Мы будем говорить, что f *симметрична*, если $\widetilde{f}=f$. Обозначим через $\widetilde{L}^2((\lambda\times\nu)^n)$ множество всех симметричных функций в $L^2((\lambda\times\nu)^n)$. Положим

$$G_n=\{(t_1,z_1,\dots,t_n,z_n);\ 0\leqslant t_1\leqslant\dots\leqslant t_n\leqslant T \text{ и } z_i\in\mathbb{R},\ i=1,\dots,n\},$$

и пусть $L^2(G_n)$ – множество функций $g\colon G_n\to\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию

$$\|g\|^2_{L^2(G_n)}:=\int_{G_n} g^2(t_1,z_1,\dots,t_n,z_n)\,dt_1\,\nu(dz_1)\cdots dt_n\,\nu(dz_n)<\infty.$$

Заметим, что

$$\|f\|^2_{L^2((\lambda\times\nu)^n)}=n!\,\|f\|^2_{L^2(G_n)},\qquad f\in\widetilde{L}^2((\lambda\times\nu)^n).$$

Если функция $f\in L^2(G_n)$, мы определим ее n-кратный повторный интеграл относительно $\widetilde{N}(\,\cdot\,,\cdot\,)$ формулой

$$J_n(f)=\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_0^{t_2}\int_{\mathbb{R}} f(t_1,z_1,\dots,t_n,z_n)\widetilde{N}(dt_1,dz_1)\cdots\widetilde{N}(dt_n,dz_n)$$

и, если $f\in\widetilde{L}^2((\lambda\times\nu)^n)$, положим

$$I_n(f):=\int_{([0,T]\times\mathbb{R})^n} f(t_1,z_1,\dots,t_n,z_n)\,\widetilde{N}^{\otimes n}(dt,dz):=n!\,J_n(f).$$

Тогда справедлива следующая теорема о хаотическом представлении.

Теорема 3.3 [5], [8]. *Любая $\mathscr{F}_T$-измеримая случайная величина $F\in L^2(\mathsf{P})$ может быть представлена в виде*

$$F=\mathsf{E}[F]+\sum_{n=1}^{\infty}I_n(f_n):=\sum_{n=0}^{\infty}I_n(f_n)\tag{3.14}$$

для некоторой однозначно определенной последовательности детерминированных функций $f_n\in\widetilde{L}^2((\lambda\times\nu)^n)$. Кроме того, имеет место изометрия

$$\mathsf{E}[F^2]=(\mathsf{E}[F])^2+\sum_{n=1}^{\infty}n!\,\|f_n\|^2_{L^2((\lambda\times\nu)^n)}.\tag{3.15}$$

Используя эту теорему, мы можем теперь определить интегрирование по Скороходу и дифференцирование по Маллявену следующим образом.

Определение 3.4. Пусть $\phi(t,z,\omega)\colon [0,T]\times\mathbb{R}\times\Omega\to\mathbb{R}$ – случайное поле, удовлетворяющее условию

$$\mathsf{E}[\phi^2(t,z)]<\infty,$$

причем

$$\phi(t,z,\,\cdot\,)\ \ \mathscr{F}_T\text{-измеримы для любой точки } (t,z)\in[0,T]\times\mathbb{R}.$$

Пусть

$$\phi(t,z)=\sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(\,\cdot\,,t,z))$$

– хаотическое представление для $\phi(t,z,\,\cdot\,)$, данное в теореме 3.3. Пусть $\widetilde{f}_n(t_1,z_1,\dots,t_n,z_n,t_{n+1},z_{n+1})$ – симметризация $f_n(t_1,z_1,\dots,t_n,z_n,t,z)$ как функция $n+1$ переменных $(t_1,z_1),\dots,(t_n,z_n)$ и $(t_{n+1},z_{n+1})=(t,z)$. Предположим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!\,\|\widetilde{f}_n\|^2_{L^2((\lambda\times\nu)^n)}<\infty. \tag{3.16}$$

Тогда *интеграл Скорохода* от ϕ по мере $\widetilde{N}$ определяется равенством

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\phi(t,z)\,\widetilde{N}(\delta t,dz)=\sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\widetilde{f}_n). \tag{3.17}$$

Заметим, что

$$\mathsf{E}\biggl[\biggl(\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\phi(t,z)\,\widetilde{N}(\delta t,dz)\biggr)^2\biggr]=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!\,\|\widetilde{f}_n\|^2_{L^2((\lambda\times\nu)^n)}, \tag{3.18}$$

так что интеграл Скорохода от ϕ, если он существует, принадлежит $L^2(\mathsf{P})$. Кроме того,

$$\mathsf{E}\biggl[\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\phi(t,z)\,\widetilde{N}(\delta t,dz)\biggr]=0. \tag{3.19}$$

Интеграл Скорохода по пуассоновской случайной мере был впервые построен Ю. М. Кабановым [6], [7]. Он является расширением интеграла Ито в том смысле, что если $\phi(t,z)$ предполагается $\mathscr{F}_t$-измеримой для любой точки $(t,z)\in[0,T]\times\mathbb{R}$, то оба интеграла совпадают:

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\phi(t,z)\,\widetilde{N}(\delta t,dz)=\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\phi(t,z)\,\widetilde{N}(dt,dz). \tag{3.20}$$

(См. также [3; предложение 3.2].)

Определение 3.5. Пусть $F \in L^2(\mathsf{P})$ $\mathscr{F}_T$-измерима и имеет разложение

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n), \qquad f_n \in \widetilde{L}^2((\lambda \times \nu)^n).$$

Предположим, что $F \in \mathbb{D}_{1,2}$, т.е.

$$\|F\|^2_{\mathbb{D}_{1,2}} := (\mathsf{E}[F])^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n\, n!\, \|f_n\|^2_{L^2((\lambda\times\nu)^n)} < \infty. \tag{3.21}$$

Тогда мы определяем *производную Маллявена* (или *стохастическую производную*) F в $(t,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}$ формулой

$$D_{t,z}F := \sum_{n=1}^{\infty} n\, I_{n-1}(f_n(\,\cdot\,, t, z)), \tag{3.22}$$

где $I_{n-1}(f_n(\,\cdot\,,t,z))$ означает, что мы выполняем $n-1$ повторное интегрирование по первым $n-1$ парам переменных $(t_1,z_1),\dots,(t_{n-1},z_{n-1})$ и полагаем $(t_n,z_n)=(t,z)$.

Используя изометрию

$$\mathsf{E}\biggl[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (D_{t,z}F)^2\, \nu(dz)\, dt\biggr] = \sum_{n=1}^{\infty} n\, n!\, \|f_n\|^2_{L^2((\lambda\times\nu)^n)} < \infty, \tag{3.23}$$

мы видим, что если условие (3.22) выполняется, то $D_{t,z}F$ существует для почти всех $(t,z) \in [0,T]\times\mathbb{R}$ относительно $\lambda \times \nu$.

В чисто скачкообразном случае производная Маллявена $D = D_{t,z}$ является *разностным* оператором, в том смысле, что она удовлетворяет следующему правилу произведения:

$$D(F\cdot G) = F\cdot DG + G\cdot DF + DF\cdot DG, \tag{3.24}$$

если и F, и G являются случайными величинами, дифференцируемыми по Маллявену. (См. [3; лемма 3.9] и [8].)

Отсюда мы получаем следующий результат.

Лемма 3.6. *Пусть $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрерывна, а F – случайная величина, дифференцируемая по Маллявену. Тогда, полагая $D = D_{t,z}$, имеем*

$$D(f(F)) = f(F+DF) - f(F). \tag{3.25}$$

Доказательство. Из (3.24) следует, что

$$D(F^2) = 2F\cdot DF + DF\cdot DF = (F+DF)^2 - F^2$$

и по индукции

$$D(F^n) = (F+DF)^n - F^n.$$

Следовательно, формула (3.25) выполняется для всех полиномов f и поэтому, в силу теоремы Вейерштрасса о приближении, для всех непрерывных функций f с компактным носителем. Тогда результат следует из рассуждения о переходе к пределу, использующего замкнутость $D_{t,z}$.

Обратимся теперь к определению *прямого интеграла* по мере $\widetilde{N}(\,\cdot\,,\cdot\,)$. (Ср. с определением 2.7.)

Определение 3.7 [3]. *Прямой интеграл* случайного поля $\phi(t,z)=\phi(t,z,\omega)$ относительно $\widetilde N(\,\cdot\,,\cdot\,)$ определяется по правилу

$$\int_0^T\int_{\mathbb R}\phi(t,z,\omega)\,\widetilde N(d^-t,dz)=\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_{K_m}\phi(t,z)\,\widetilde N(dt,dz), \tag{3.26}$$

если предел существует по вероятности. Здесь $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$ – возрастающая последовательность компактных множеств в $\mathbb R\setminus\{0\}$, удовлетворяющих условиям

$$\mathbb R\setminus\{0\}=\bigcup_{m=1}^{\infty}K_m \quad\text{и}\quad \nu(K_m)<\infty \quad\text{для всех } m. \tag{3.27}$$

Как и в непрерывном случае (лемма 2.8), получаем следующее утверждение.

Лемма 3.8. *Предположим, что функция $t\to\phi(t,z,\omega)$ непрерывна слева и имеет пределы справа для почти всех z, ω относительно меры $\nu\times\mathsf P$ и что $\phi(t,z,\,\cdot\,)$ $\mathscr G_t$-измерима для любого $t\in[0,T]$ и почти любого z по мере ν. Кроме того, предположим, что $\eta(t)$ – семимартингал относительно $\mathscr G_t$. Тогда если для ϕ определен прямой интеграл относительно $\widetilde N$, то*

$$\int_0^T\int_{\mathbb R}\phi(t,z,\omega)\,\widetilde N(d^-t,dz)=\int_0^T\int_{\mathbb R}\phi(t,z,\omega)\,\widetilde N(dt,dz), \tag{3.28}$$

где интеграл в правой части – обычный интеграл по семимартингалу.

Приведем соотношение между прямыми интегралами и интегралами Скорохода (ср. с леммой 2.9).

Лемма 3.9 [3; лемма 4.3]. *Если прямой интеграл от ϕ существует в $L^2(\mathsf P)$, то*

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\mathbb R}\phi(t,z)\,\widetilde N(d^-t,dz)&=\int_0^T\int_{\mathbb R}D_{t+,z}\phi(t,z)\,\nu(dz)\,dt\\&\quad+\int_0^T\int_{\mathbb R}(\phi(t,z)+D_{t+,z}\phi(t,z))\,\widetilde N(\delta t,dz)\end{aligned} \tag{3.29}$$

при условии, что производная

$$D_{t+,z}\phi(t,z)=\lim_{s\to t^+}D_{s,z}\phi(t,z)$$

существует и интегрируема относительно $\lambda\times\nu$.

Лемма 3.10. *Пусть поле ϕ – такое же, как и в лемме 3.9. Тогда*

$$\mathsf E\biggl[\int_0^T\int_{\mathbb R}\phi(t,z)\,\widetilde N(d^-t,dz)\biggr]=\mathsf E\biggl[\int_0^T\int_{\mathbb R}D_{t+,z}\phi(t,z)\,\nu(dz)\,dt\biggr], \tag{3.30}$$

если эти интегралы существуют.

Наконец, выпишем формулу Ито для прямых интегралов относительно $\widetilde N(\,\cdot\,,\cdot\,)$ (ср. с теоремой 2.11):

Теорема 3.11 [3]. *Пусть $X(t)$ – процесс вида*

$$X(t) = x + \int_0^t \alpha(s)\,ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \theta(s,z)\,\widetilde{N}(d^- s, dz), \tag{3.31}$$

и пусть $f \in C^2(\mathbb{R})$. Тогда

$$\begin{aligned} f(X(t)) = f(x) &+ \int_0^t f'(X(s))\alpha(s)\,ds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \{f(X(s^-) + \theta(s,z)) - f(X(s^-)) - f'(X(s^-))\theta(s,z)\}\,\nu(dz)\,dt \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \{f(X(s^-) + \theta(s,z)) - f(X(s^-))\}\,\widetilde{N}(d^- s, dz), \end{aligned} \tag{3.32}$$

если хотя бы один из этих интегралов сходится.

Теперь мы располагаем математическим аппаратом, необходимым для решения задачи 3.2. Заметим сначала, что если применить формулу Ито для прямых интегралов (теорему 3.11), то получим, что решение уравнения (3.13) дается формулой

$$\begin{aligned} X(t) = x \exp\biggl[\int_0^t \biggl\{&\rho(s) + (\mu(s) - \rho(s))\pi(s) \\ &+ \int_{\mathbb{R}} [\ln(1 + \pi(s)\theta(s,z)) - \pi(s)\theta(s,z)]\,\nu(dz)\biggr\}\,ds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \pi(s)\theta(s,z))\,\widetilde{N}(d^- s, dz)\biggr]. \end{aligned} \tag{3.33}$$

(См., в частности, пример 1.2.2 в [12].) Следовательно, используя лемму 3.10, получаем

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\biggl[\ln \frac{X(T)}{x}\biggr] &= \mathsf{E}\biggl[\int_0^T \biggl\{\rho(s) + (\mu(s) - \rho(s))\pi(s) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} [\ln(1 + \pi(s)\theta(s,z)) - \pi(s)\theta(s,z)]\,\nu(dz)\biggr\}\,ds \\ &\quad + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \pi(s)\theta(s,z))\,\widetilde{N}(d^- s, dz)\biggr] \qquad (3.34) \\ &= \mathsf{E}\biggl[\int_0^T \biggl\{\rho(s) + (\mu(s) - \rho(s))\pi(s) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} [\ln(1 + \pi(s)\theta(s,z)) - \pi(s)\theta(s,z) \\ &\quad + D_{s+,z} \ln(1 + \pi(s)\theta(s,z))]\,\nu(dz)\biggr\}\,ds\biggr] =: F(\pi). \qquad (3.35) \end{aligned}$$

Из леммы 3.6 следует, что

$$
\begin{aligned}
&D_{s+,z} \ln(1+\pi(s)\theta(s,z)) \\
&\quad = \ln\bigl(1+\pi(s)\theta(s,z) + D_{s+,z}(\pi(s)\theta(s,z))\bigr) - \ln\bigl(1+\pi(s)\theta(s,z)\bigr) \\
&\quad = \ln\bigl(1+\pi(s)(\theta(s,z) + D_{s+,z}\theta(s,z))\bigr) - \ln\bigl(1+\pi(s)\theta(s,z)\bigr) \\
&\quad = \ln\biggl(1+\frac{\pi(s)D_{s+,z}\theta(s,z)}{1+\pi(s)\theta(s,z)}\biggr). \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

Подставляя это выражение в (3.35), находим

$$
\begin{aligned}
F(\pi) = \mathsf{E}\biggl[\int_0^T \biggl\{&\rho(s) + (\mu(s)-\rho(s))\pi(s) \\
&+ \int_{\mathbb{R}} [\ln(1+\pi(s)(\theta(s,z)+D_{s+,z}\theta(s,z))) - \pi(s)\theta(s,z)]\,\nu(ds)\biggr\}\,ds\biggr]. \quad (3.37)
\end{aligned}
$$

Мы хотим найти максимум функции

$$\pi \to F(\pi), \qquad \pi \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}}.$$

Предположим, что оптимальный элемент $\pi^* \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}}$ существует. Тогда для всех ограниченных $\eta \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}}$ существует $\delta > 0$ такое, что $\pi^* + r\eta \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}}$ при $r \in (-\delta, \delta)$ и функция

$$f(r) := F(\pi^* + r\eta), \qquad r \in (-\delta,\delta),$$

достигает максимума при $r = 0$. Поэтому

$$
\begin{aligned}
0 = f'(0) = \mathsf{E}\biggl[\int_0^T \biggl\{&(\mu(s)-\rho(s))\eta(s) \\
&+ \int_{\mathbb{R}} [(1+\pi^*(s)\widetilde{\theta}(s,z))^{-1}\widetilde{\theta}(s,z)\eta(s) - \theta(s,z)\eta(s)]\,\nu(dz)\biggr\}\,ds\biggr], \quad (3.38)
\end{aligned}
$$

где мы положили

$$\widetilde{\theta}(s,z) = \theta(s,z) + D_{s+,z}\theta(s,z). \qquad (3.39)$$

Следовательно,

$$\int_0^T \mathsf{E}\biggl[\biggl\{\mu(s)-\rho(s) + \int_{\mathbb{R}} [(1+\pi^*(s)\widetilde{\theta}(s,z))^{-1}\widetilde{\theta}(s,z) - \theta(s,z)]\,\nu(dz)\biggr\}\eta(s)\biggr]\,ds = 0.$$

Так как для любого s случайные величины $\eta(s)$, $\eta \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}}$, порождают всю σ-алгебру $\mathscr{E}_s$, то мы заключаем, что для любого $s \in [0,T]$ выполняется равенство

$$\mathsf{E}\biggl[\biggl\{\mu(s)-\rho(s) + \int_{\mathbb{R}} [(1+\pi^*(s)\widetilde{\theta}(s,z))^{-1}\widetilde{\theta}(s,z) - \theta(s,z)]\,\nu(dz)\biggr\} \biggm| \mathscr{E}_s\biggr] = 0. \quad (3.40)$$

Это доказывает часть а) следующего результата.

Теорема 3.12. а) *Предположим, что оптимальный портфель* $\pi^* \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}}$ *для задачи* 3.2 *существует. Тогда* $y = \pi^*(s)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\mathsf{E}\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\theta(s,z) + D_{s+,z}\theta(s,z)}{1 + y(\theta(s,z) + D_{s+,z}\theta(s,z))}\,\nu(dz) \;\Big|\; \mathscr{E}_s\right] = \mathsf{E}\left[\left\{\rho(s) - \mu(s) + \int_{\mathbb{R}} \theta(s,z)\,\nu(dz)\right\} \;\Big|\; \mathscr{E}_s\right], \qquad s \in [0,T]. \tag{3.41}$$

б) *Предположим, что*

$$\theta(s,z) + D_{s+,z}\theta(s,z) \geqslant 0 \quad \textit{для почти всех } s,\ z \tag{3.42}$$

и что для любого s *существует решение*

$$y =: \widehat{\pi}(s)$$

уравнения (3.41). *Предположим, что*

$$\widehat{\pi}(s) \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}}.$$

Тогда $\widehat{\pi}$ – *оптимальный портфель для задачи* 3.2.

Доказательство утверждения б). Если выполняется (3.42), то функция $F(\pi)$, заданная формулой (3.36), вогнута.

Пример 3.13 (пуассоновский процесс). Предположим, что $\eta(t)$ – пуассоновский процесс. Тогда мера Леви $\nu(dz)$ сосредоточена в точке $z = 1$ и (3.40) принимает вид

$$\mathsf{E}\left[\frac{\widetilde{\theta}(s)}{1 + y\widetilde{\theta}(s)} \;\Big|\; \mathscr{E}_s\right] = \mathsf{E}[\rho(s) - \mu(s) + \theta(s,1) \mid \mathscr{E}_s], \tag{3.43}$$

где

$$\widetilde{\theta}(s) = \theta(s,1) + D_{s+,1}\theta(s,1). \tag{3.44}$$

Мы дополнительно предположим, что

$$\widetilde{\theta}(s) \quad \mathscr{E}_s\text{-измерима}. \tag{3.45}$$

Тогда уравнение (3.43) имеет решение

$$y = \widehat{\pi}(s) = \pi^*(s) = (\mathsf{E}[\rho(s) - \mu(s) + \theta(s,1) \mid \mathscr{E}_s])^{-1} - (\widetilde{\theta}(s))^{-1}, \tag{3.46}$$

если

$$\mathsf{E}[\rho(s) - \mu(s) + \theta(s,1) \mid \mathscr{E}_s] \neq 0 \;\text{ и }\; \widetilde{\theta}(s) \neq 0, \quad s \in [0,T]. \tag{3.47}$$

Следствие 3.14 (случай полной информации). *Предположим, что*

$$\mathscr{E}_t = \mathscr{F}_t = \mathscr{G}_t \quad \textit{для любого} \quad t \in [0, T]$$

и что существует оптимальный портфель $\pi^* \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}}$ *для задачи* 3.2. *Тогда функция* $y = \pi^*(s)$ *является решением уравнения*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\theta(s,z)}{1 + y\theta(s,z)}\, \nu(dz) = \rho(s) - \mu(s) + \int_{\mathbb{R}} \theta(s,z)\, \nu(dz). \tag{3.48}$$

В частном случае марковских коэффициентов этот результат можно получить методами динамического программирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] F. Biagini, B. Øksendal. A general stochastic calculus approach to insider trading // Preprint № 17/2002. Oslo: Dept. of Mathematics, Univ. of Oslo, 2002.
[2] F. Delbaen, W. Schachermayer. A general version of the fundamental theorem of asset pricing // Math. Ann. 1994. V. 300. № 3. P. 463–520.
[3] G. Di Nunno, T. Meyer-Brandis, B. Øksendal, F. Proske. Malliavin calculus for Lévy processes // Preprint № 16/2003. Oslo: Dept. of Mathematics, Univ. of Oslo, 2003.
[4] G. Di Nunno, T. Meyer-Brandis, B. Øksendal, F. Proske. Optimal portfolio for an insider in a market driven by Lévy processes // Preprint № 36/2003. Oslo: Dept. of Mathematics, Univ. of Oslo, 2003.
[5] K. Itô. Spectral type of the shift transformation of differential processes with stationary increments // Trans. Amer. Math. Soc. 1956. V. 81. P. 253–263.
[6] Ю. М. Кабанов. Обобщенная формула Ито для расширенного стохастического интеграла по пуассоновской случайной мере // УМН. 1974. Т. 29. № 4. С. 167–168.
[7] Ю. М. Кабанов. О расширенных стохастических интегралах // Теория вероятн. и ее примен. 1975. Т. 20. № 4. С. 725–737.
[8] A. Løkka. Martingale representations and functionals of Lévy processes // Preprint № 21/2001. Oslo: Dept. of Mathematics, Univ. of Oslo, 2001.
[9] D. Nualart. The Malliavin Calculus and Related Topics. New York: Springer-Verlag, 1995.
[10] D. Nualart, É. Pardoux. Stochastic calculus with anticipating integrands // Probab. Theory Related Fields. 1988. V. 78. № 4. P. 535–581.
[11] B. Øksendal. An Introduction to Malliavin Calculus with Applications to Economics // Working Paper 3/1996, Norwegian School of Economics and Business Administration.
[12] B. Øksendal, A. Sulem. Applied Stochastic Control of Jump Diffusions. Berlin: Springer-Verlag, 2004 (to appear).
[13] F. Russo, P. Vallois. Forward, backward and symmetric stochastic integration // Probab. Theory Related Fields. 1993. V. 97. № 3. P. 403–421.
[14] F. Russo, P. Vallois. Stochastic calculus with respect to continuous finite quadratic variation processes // Stochastics Stochastics Rep. 2000. V. 70. № 1–2. P. 1–40.

Center of Mathematics for Applications, University of Oslo,
Norwegian School of Economics and Business Administration;
INRIA, France

Поступила в редакцию
20.06.2003