Е. А. Романова, В. Е. Федоров, Разрешающие операторы линейного вырожденного эволюционного уравнения с производной Капуто. Секториальный случай, *Математические заметки СВФУ*, 2016, том 23, выпуск 4, 58–72

https://www.mathnet.ru/svfu39

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2016. Том 23, № 4

УДК 517.9

РАЗРЕШАЮЩИЕ ОПЕРАТОРЫ ЛИНЕЙНОГО ВЫРОЖДЕННОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО. СЕКТОРИАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ

Е. А. Романова, В. Е. Федоров

Аннотация. Исследуется однозначная разрешимость задачи Коши для уравнения в банаховом пространстве с вырожденным оператором при дробной производной Капуто. Используются найденные ранее условия существования аналитического в секторе семейства разрешающих операторов такого уравнения, вырождающихся на ядре оператора при производной, а также вид разрешающих операторов. При выполнении этих условий показано существование единственного решения задачи Коши для исследуемого уравнения при начальных данных из дополнения к ядру оператора при производной, решение представлено с использованием разрешающих операторов. Полученные результаты использованы при изучении линеаризованной квазистационарной системы уравнений фазового поля дробного порядка по времени.

Ключевые слова: вырожденное эволюционное уравнение, дробная производная Капуто, аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов, задача Коши, начально-краевая задача, система уравнений в частных производных.

§ 1. Введение

Пусть $L : D_L \to \mathfrak{V}$, $M : D_M \to \mathfrak{V}$ — линейные замкнутые плотно определенные в банаховом пространстве $\mathfrak{U}$ операторы, действующие в банахово пространство $\mathfrak{V}$. Рассмотрим эволюционное уравнение дробного порядка

$$D_t^\alpha Lu(t) = Mu(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$, D_t^α — дробная производная Капуто. Предполагается выполнение условия вырожденности уравнения $\ker L \neq \{0\}$. В работе исследуется задача Коши

$$u^{(k)}(0) = u_k, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1, \tag{2}$$

для уравнения (1). Здесь m — наименьшее целое число, не превосходимое числом α.

В [1] получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи (2) для разрешенного относительно производной уравнения

$$D_t^\alpha u(t) = Au(t), \quad t \geq 0, \tag{3}$$

с линейным замкнутым плотно определенным в $\mathfrak{U}$ оператором A в терминах семейств разрешающих операторов, представляющих собой обобщение полугрупп операторов. В частности, на оператор A получены необходимые и достаточные условия существования аналитических в секторе $\Sigma_{\theta_0} \equiv \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \theta_0 - \pi/2,\ t \neq 0\}$ семейств разрешающих операторов уравнения (3), экспоненциально ограниченных в каждом меньшем подсекторе. Для класса операторов A, удовлетворяющих таким условиям, используется обозначение $\mathscr{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$ при $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$.

В [2] эти результаты в некотором смысле обобщены на случай уравнения (1): определен класс пар операторов $\mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, такой, что при $(L, M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ уравнение (1) имеет аналитическое в секторе семейство разрешающих операторов и задача Коши для него однозначно разрешима. При этом отметим, что рассмотренный класс уравнений является слабо вырожденным — его подпространство вырождения совпадает с ядром $\ker L$, при этом оператор L не имеет M-присоединенных векторов, которые, вообще говоря, тоже лежат в подпространстве вырождения (в более простом случае (L, p)-ограниченного оператора M см. [3, 4]).

В данной работе некоторые результаты статьи [2] получили свое развитие — уточняется оценка экспоненциальной ограниченности на операторы разрешающего семейства уравнения (1) при $(L, M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, решение задачи Коши для него строится в явном виде. Полученные результаты используются при исследовании однозначной разрешимости начально-краевой задачи для линеаризованной квазистационарной системы уравнений фазового поля.

Условия существования, вообще говоря, сильно вырожденных семейств разрешающих операторов уравнения (1), аналитических в комплексной плоскости с разрезом вдоль отрицательной полуоси, получены в [3]. Эти условия были использованы для исследования соответствующего неоднородного уравнения в [4], для изучения однозначной разрешимости начально-краевых задач для систем уравнения Соболева и Осколкова в [5]. Некоторые классы полулинейных уравнений дробного и высокого порядков, линейная часть которых имеет вид (1) с (L, p)-ограниченным оператором M, разрешимость начальных задач и задач оптимального управления для них исследованы в работах М. В. Плехановой [6–9]. Обобщение понятия (L, p)-ограниченного оператора на случай локально выпуклых пространств используется в [10] для вырожденного эволюционного уравнения первого порядка и в [11] для уравнения (1). Различные типы разрешающих операторов для некоторых дробных дифференциальных уравнений, в том числе вырожденных, в секвенциально полных локально выпуклых пространствах рассмотрены в работах М. Костича и его соавторов (см. [11–13] и библиографию в них). Во многих статьях [14–17] уравнения вида (1), не разрешенные относительно дробной производной, рассматриваются при условии существования обратного оператора $L^{-1} : \mathfrak{V} \to \mathfrak{U}$, который предполагается непрерывным или даже компактным. В них получены интересные результаты, но они не касаются вырожденных эволюционных уравнений (при $\ker L \neq \{0\}$).

В § 2 приведены используемые далее результаты работы [1] об уравнении (3) и статьи [2] для (1). Кроме того, в этом параграфе проведено некоторое дополнительное исследование семейств операторов, построенных в [2]. Третий параграф содержит формулировки и доказательства двух теорем об однозначной разрешимости задачи (1), (2). В отличие от [2] решение этой задачи здесь построено в явном виде с использованием результатов предыдущего параграфа. В § 4 результаты о задаче Коши в банаховом пространстве использованы при исследовании начально-краевой задачи для одной системы уравнений в частных производных, не разрешимой относительно дробной производной по времени.

§ 2. Аналитические в секторе разрешающие операторы вырожденного дробного эволюционного уравнения

При $\beta > 0$ обозначим $g_\beta(t) = t^{\beta-1}/\Gamma(\beta)$ для $t > 0$,

$$J_t^\beta h(t) = (g_\beta * h)(t) = \int\limits_0^t g_\beta(t-s)h(s)\,ds = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^t (t-s)^{\beta-1}h(s)\,ds.$$

Пусть $\alpha > 0$, $m-1 < \alpha \leq m$, D_t^m — обычная производная порядка $m \in \mathbb{N}$, D_t^α — дробная производная Капуто [18], называемая часто также *производной Герасимова — Капуто* [19], т. е.

$$D_t^\alpha h(t) = D_t^m J_t^{m-\alpha}\left(h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} h^{(k)}(0)g_{k+1}(t)\right).$$

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ — банаховы пространства, обозначим через $\mathscr{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ банахово пространство всех линейных непрерывных операторов из $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{V}$. Множество всех линейных замкнутых операторов с областями определения, плотными в $\mathfrak{U}$, действующих в пространство $\mathfrak{V}$, обозначим через $\mathscr{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$. Если $\mathfrak{V} = \mathfrak{U}$, то соответствующие обозначения примут вид $\mathscr{L}(\mathfrak{U})$ и $\mathscr{C}l(\mathfrak{U})$. Обозначим также $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, D_A — область определения оператора A, снабженная нормой его графика.

Функция $u \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; D_A) \cap C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U})$, для которой

$$g_{m-\alpha} * \left(u - \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0)g_{k+1}\right) \in C^m(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U}),$$

называется *решением уравнения* (3), если при всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ справедливо равенство (3).

Множество операторов $\{Z(t) \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ называется *семейством разрешающих операторов уравнения* (3), если

(i) оператор-функция $Z(\cdot)$ сильно непрерывна на $\overline{\mathbb{R}}_+$, $Z(0) = I$;

(ii) $Z(t)[D_A] \subset D_A$, $Z(t)Au_0 = AZ(t)u_0$ при каждом $u_0 \in D_A$ для всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$;

(iii) для любого $u_0 \in D_A$ функция $Z(t)u_0$ является решением задачи Коши $u(0) = u_0$, $u^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 2, \dots, m-1$, для уравнения (3).

Следуя [1], будем говорить, что линейный замкнутый плотно определенный в $\mathfrak{U}$ оператор A *принадлежит классу* $\mathscr{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$ при $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, если существует разрешающее семейство операторов $\{Z(t) \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ уравнения (3), аналитически продолжимое в сектор $\Sigma_{\theta_0} \equiv \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \theta_0 - \pi/2,\ t \neq 0\}$, и при каждых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такая константа $C(a, \theta)$, что $\|Z(t)\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U})} \leq C(a, \theta) e^{a \mathrm{Re} t}$ для всех $t \in \Sigma_\theta$. Согласно теореме 2.14 в [1] (см. также более общую теорему I.2.1 в [20] для эволюционных интегральных уравнений) $A \in \mathscr{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$ при $\alpha \in (0, 2)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

(i) при всех $\lambda \in S_{a_0, \theta_0} \equiv \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_0)| < \theta_0, \mu \neq a_0\}$ выполняется включение $\lambda^\alpha \in \rho(A)$;

(ii) при любых $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ существует такая константа $K = K(a, \theta) > 0$, что для всех $\mu \in S_{a,\theta}$

$$\|(\mu^\alpha I - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U})} \leq \frac{K(a, \theta)}{|\mu^{\alpha-1}(\mu - a)|}.$$

Показано также, что оператор $A \in \mathscr{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$ при $\alpha > 2$ ограничен на пространстве $\mathscr{U}$.

Пусть операторы $L, M \in \mathscr{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$ имеют области определения $D_L, D_M \subset \mathfrak{U}$, $\ker L \neq \{0\}$. Множество точек $\mu \in \mathbb{C}$ таких, что оператор $\mu L - M : D_L \cap D_M \to \mathfrak{V}$ инъективен и $(\mu L - M)^{-1} L \in \mathscr{L}(\mathfrak{U})$, $L(\mu L - M)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V})$, называется L-*резольвентным множеством* $\rho^L(M)$ *оператора* M. Обозначим

$$R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1} L, \quad L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}.$$

Определение 1. Пусть $\alpha > 0$. Будем говорить, что пара операторов (L, M) *принадлежит классу* $\mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, если

(i) существуют $a_0 \geq 0$ и $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$ такие, что для всех $\lambda \in S_{a_0, \theta_0}$ выполняется $\lambda^\alpha \in \rho^L(M)$;

(ii) при любых $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ существует такая константа $K = K(a, \theta) > 0$, что для всех $\mu \in S_{a,\theta}$

$$\max\left\{\left\|R^L_{\mu^\alpha}(M)\right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U})}, \left\|L^L_{\mu^\alpha}(M)\right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{V})}\right\} \leq \frac{K(a, \theta)}{|\mu^{\alpha-1}(\mu - a)|}.$$

Замечание 1. Если при $\alpha \in (0, 2)$ существует обратный оператор $L^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{U})$, то $(L, M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ тогда и только тогда, когда $L^{-1} M \in \mathscr{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$ и $M L^{-1} \in \mathscr{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$.

Нетрудно показать, что $\ker R^L_\mu(M) = \ker L$, $\mathrm{im}\, R^L_\mu(M)$, $\ker L^L_\mu(M)$, $\mathrm{im}\, L^L_\mu(M)$ не зависят от $\mu \in \rho^L(M)$. Введем обозначения $\ker R^L_\mu(M) = \mathfrak{U}^0$, $\ker L^L_\mu(M) = \mathfrak{V}^0$. Через $\mathfrak{U}^1$ ($\mathfrak{V}^1$) обозначим замыкание линеала $\mathrm{im}\, R^L_\mu(M)$ ($\mathrm{im}\, L^L_\mu(M)$) в норме пространства $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{V}$). Через L_k (M_k) будет обозначаться сужение оператора L (M) на $D_{L_k} \equiv D_L \cap \mathfrak{U}^k$ ($D_{M_k} \equiv D_M \cap \mathfrak{U}^k$), $k = 0, 1$.

Теорема 1. *Пусть* $(L, M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$. *Тогда при* $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\Gamma = \partial S_{a_0,\theta_0} + 1$ *семейства операторов*

$$\left\{U_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \mu^{\alpha-\beta} R^L_{\mu^\alpha}(M) e^{\mu t}\, d\mu \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}) : t \in \mathbb{R}_+\right\},$$

$$\left\{V_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \mu^{\alpha-\beta} L^L_{\mu^\alpha}(M) e^{\mu t}\, d\mu \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}) : t \in \mathbb{R}_+\right\}$$

допускают аналитическое продолжение в сектор Σ_{θ_0}. *При любых* $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $n \in \mathbb{N}_0$ *существует такое* $C_{n,\beta} = C_{n,\beta}(a, \theta)$, *что для всех* $\tau \in \Sigma_\theta$

$$\left\|U^{(n)}_{\alpha,\beta}(\tau)\right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U})} \le \frac{C_{n,\beta}(a,\theta) e^{a\mathrm{Re}\tau}}{|\tau|^{n+1-\beta}}, \quad \left\|V^{(n)}_{\alpha,\beta}(\tau)\right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{V})} \le \frac{C_{n,\beta}(a,\theta) e^{a\mathrm{Re}\tau}}{|\tau|^{n+1-\beta}}. \tag{4}$$

При этом

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}U_{\alpha,\beta} = U_{\alpha+1,\beta}, \quad \frac{d}{dt}V_{\alpha,\beta} = V_{\alpha+1,\beta}, \\ J^k_t U_{\alpha,\beta} = U_{\alpha,\beta+k}, \quad J^k_t V_{\alpha,\beta} = V_{\alpha,\beta+k}, \quad k \in \mathbb{N},\ \beta > 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Доказательство. Основная часть теоремы доказана в [2]. Уточним лишь оценки (4), которые в [2] имеют несколько другой вид, и покажем выполнение равенств (5).

Возьмем контур

$$\Gamma = \Gamma_\varepsilon = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = \varepsilon - |x| - ix\,\mathrm{tg}\,\theta_0,\ x \in \mathbb{R}\}, \quad \varepsilon > a_0.$$

В [2] показано, что от выбора $\varepsilon > a$ значения рассматриваемых интегралов не меняются, поэтому можно выбрать $\varepsilon = a(1 + 2\sin^{-1}\theta_0)$. При $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $\delta = \frac{1}{2}(\theta_0 - \theta)$, $k \in \mathbb{N}_0$ выберем также контур

$$\Gamma_2 = \left\{\nu \in \mathbb{C} : \nu = \varepsilon - |x| - ix\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right),\ x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Для любого $\tau \in \Sigma_\theta$ построим контур $\Gamma_\tau = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + \nu\tau^{-1},\ \nu \in \Gamma_2\}$. Легко увидеть, что $\Gamma_\tau \subset S_{a,\theta_1}$, где $\theta_1 = \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta) \in (\pi/2, \theta_0)$. Действительно, при $\mu \in \Gamma_\tau$

$$|\arg(\mu - a)| = |\arg(\nu\tau^{-1})| = |\arg\nu - \arg\tau| \le |\arg\nu| + |\arg\tau| < \frac{1}{2}(\theta_0 - \theta) + \theta = \theta_1.$$

Нетрудно непосредственно показать сходимость интегралов

$$\int\limits_{\Gamma_\tau} \mu^{k+\alpha-\beta} R^L_{\mu^\alpha}(M) e^{\mu\tau}\, d\mu = \int\limits_{\Gamma} \mu^{k+\alpha-\beta} R^L_{\mu^\alpha}(M) e^{\mu\tau}\, d\mu = 2\pi i U^{(k)}_{\alpha,\beta}(\tau),$$

так как $\mu\tau = a\tau + \nu$, $|\arg\nu| = \pi/2 + \delta \in (\pi/2, \pi)$. Равенство интегралов в этом случае следует из аналитичности подынтегральных выражений на множестве S_{a_0,θ_0}.

Для $\beta \le k+1$

$$\begin{aligned}\left\|U^{(k)}_{\alpha,\beta}(\tau)\right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U})} &\le \frac{K(a,\theta_1)}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\tau}|\mu|^{k+1-\beta}\frac{|e^{\mu\tau}|}{|\mu-a|}\,|d\mu| \\ &\le \frac{K(a,\theta_1)e^{a\mathrm{Re}\tau}}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\tau-a}(|\lambda|+a)^{k+1-\beta}\frac{|e^{\lambda\tau}|}{|\lambda|}\,|d\lambda| \\ &\le \frac{K(a,\theta_1)e^{a\mathrm{Re}\tau}}{2\pi}\left(1+\frac{a}{(\varepsilon-a)\sin\theta_0}\right)^{k+1-\beta}\int\limits_{\Gamma_\tau-a}|\lambda|^{k-\beta}|e^{\lambda\tau}|\,|d\lambda| \\ &= \frac{(3/2)^{k+1-\beta}K(a,\theta_1)e^{a\mathrm{Re}\tau}}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\tau-a}|\lambda|^{k-\beta}|e^{\lambda\tau}|\,|d\lambda|.\end{aligned}$$

В случае $\beta > k+1$ имеем

$$\begin{aligned}\left\|U^{(k)}_{\alpha,\beta}(\tau)\right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U})} &\le \frac{K(a,\theta_1)e^{a\mathrm{Re}\tau}}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\tau-a}(|\lambda|-a)^{k+1-\beta}\frac{|e^{\lambda\tau}|}{|\lambda|}\,|d\lambda| \\ &\le \frac{K(a,\theta_1)e^{a\mathrm{Re}\tau}}{2\pi}\left(1-\frac{a}{(\varepsilon-a)\sin\theta_0}\right)^{k+1-\beta}\int\limits_{\Gamma_\tau-a}|\lambda|^{k-\beta}|e^{\lambda\tau}|\,|d\lambda| \\ &= \frac{2^{\beta-k-1}K(a,\theta_1)e^{a\mathrm{Re}\tau}}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\tau-a}|\lambda|^{k-\beta}|e^{\lambda\tau}|\,|d\lambda|.\end{aligned}$$

Сделаем замену переменной $\lambda = \nu\tau^{-1}$, тогда правые части неравенств примут вид

$$\frac{b^{k+1-\beta}K(a,\theta_1)e^{a\mathrm{Re}\tau}}{2\pi|\tau|^{k+1-\beta}}\int\limits_{\Gamma_2}|\nu|^{k-\beta}|e^{\nu}|\,|d\nu| = \frac{C_{k,\beta}(a,\theta)e^{a\mathrm{Re}\tau}}{|\tau|^{k+1-\beta}},$$

где

$$C_{k,\beta}(a,\theta) = \frac{b^{k+1-\beta}K(a,\theta_1)}{2\pi}\left(1-\frac{a}{\varepsilon\cos\theta_0}\right)^{k+1-\beta}\int\limits_{\Gamma_2}|\nu|^{k-\beta}|e^{\nu}|\,|d\nu|,$$

$b = 3/2$ при $\beta \le k+1$, $b = 1/2$ в противном случае.

Для доказательства равенств (5) запишем при $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}e^{\mu s}\,ds &= -\frac{t^{k-1}}{(k-1)!\mu}+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{k-2}}{(k-2)!\mu}e^{\mu s}\,ds \\ &= \dots = -\sum_{l=1}^{k-1}\frac{t^{k-l}}{(k-l)!\mu^l}+\int\limits_0^t\frac{e^{\mu s}}{\mu^{k-1}}\,ds = -\sum_{l=1}^{k}\frac{t^{k-l}}{(k-l)!\mu^l}+\frac{e^{\mu t}}{\mu^k},\end{aligned}$$

поэтому при $\beta > 0$

$$J^k_tU_{\alpha,\beta}(t) = U_{\alpha,\beta+k}(t) - \frac{1}{2\pi i}\sum_{l=1}^{k}\frac{t^{k-l}}{(k-l)!}\int\limits_{\Gamma}\mu^{\alpha-\beta-l}R^L_{\mu^\alpha}(M)\,d\mu. \qquad (6)$$

Последние интегралы сходятся, ибо норма подынтегральных выражений ограничивается сверху функцией $|\mu|^{-\beta-1}$. Проинтегрируем функции $\mu^{\alpha-\beta-l}R^L_{\mu^\alpha}(M)$ по части Γ, лежащей внутри круга $B_R(\varepsilon)\equiv\{\mu\in\mathbb{C}:|\mu-\varepsilon|<R\}$, дополненной правой частью Γ_R окружности $\partial B_R(\varepsilon)$ до замкнутого контура, и получим нуль по теореме Коши. При этом интеграл по части Γ, лежащей вне круга $\partial B_R(\varepsilon)$, стремится к нулю при $R\to\infty$ в силу сходимости интегралов из (6) и

$$\left\|\int\limits_{\Gamma_R}\mu^{\alpha-\beta-l}R_{\mu^\alpha}(A)\,d\mu\right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U})}\le\frac{2\pi Rc}{R^{\beta+l}}\to 0\quad\text{при } R\to\infty.$$

В результате

$$\int\limits_{\Gamma}\mu^{\alpha-\beta-l}R^L_{\mu^\alpha}(M)\,d\mu=0,\quad l\in\mathbb{N},\ \beta>0,$$

и равенства (5) доказаны.

Аналогичные утверждения для операторов $V_{\alpha,\beta}(t)$ доказываются таким же образом. $\square$

Теорема 2 [2]. *Пусть банаховы пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ рефлексивны, пара операторов (L,M) принадлежит $\mathscr{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$. Тогда*

(i) $\mathfrak{U}=\mathfrak{U}^0\oplus\mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{V}=\mathfrak{V}^0\oplus\mathfrak{V}^1$;

(ii) *проектор P (Q) на подпространство $\mathfrak{U}^1$ $(\mathfrak{V}^1)$ вдоль подпространства $\mathfrak{U}^0$ $(\mathfrak{V}^0)$ имеет вид* $P=s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}nR^L_n(M)$ $(Q=s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}nL^L_n(M))$;

(iii) $L_0=0$, $M_0\in\mathscr{C}l(\mathfrak{U}^0;\mathfrak{V}^0)$, $L_1,M_1\in\mathscr{C}l(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{V}^1)$;

(iv) *существуют обратные операторы* $L_1^{-1}\in\mathscr{C}l(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$, $M_0^{-1}\in\mathscr{L}(\mathfrak{U}^0;\mathfrak{V}^0)$;

(v) *при всех* $t>0$

$$U_{\alpha,\beta}(t)=U^1_{\alpha,\beta}(t)P,\quad\mathfrak{U}^0\subset\ker U_{\alpha,\beta}(t),\quad\operatorname{im}U_{\alpha,\beta}(t)\subset\mathfrak{U}^1,$$

$$V_{\alpha,\beta}(t)=V^1_{\alpha,\beta}(t)Q,\quad\mathfrak{V}^0\subset\ker V_{\alpha,\beta}(t),\quad\operatorname{im}V_{\alpha,\beta}(t)\subset\mathfrak{V}^1,$$

где $U^1_{\alpha,\beta}(t)=U_{\alpha,\beta}(t)|_{\mathfrak{U}^1}$, $V^1_{\alpha,\beta}(t)=V_{\alpha,\beta}(t)|_{\mathfrak{V}^1}$.

Введем обозначения $S=L_1^{-1}M_1:D_S\to\mathfrak{U}^1$, $D_S=\{u\in D_{M_1}:M_1u\in\operatorname{im}L_1\}$; $T=M_1L_1^{-1}:D_T\to\mathfrak{V}^1$, $D_T=\{v\in\operatorname{im}L_1:L_1^{-1}v\in D_{M_1}\}$.

Теорема 3 [2]. *Пусть банаховы пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ рефлексивны, $\alpha\in(0,2)$, $(L,M)\in\mathscr{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$.*

(i) *Если $L_1\in\mathscr{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{V}^1)$ или $M_1\in\mathscr{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{V}^1)$, то $S\in\mathscr{A}^\alpha(\theta_0,a_0)$ и семейство операторов $\{U^1_{\alpha,1}(t)\in\mathscr{L}(\mathfrak{U}^1):t\in\overline{\mathbb{R}}_+\}$ разрешающее для уравнения $D^\alpha_t u(t)=Su(t)$.*

(ii) *Если $L_1^{-1}\in\mathscr{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$ или $M_1^{-1}\in\mathscr{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$, то $T\in\mathscr{A}^\alpha(\theta_0,a_0)$ и семейство операторов $\{V^1_{\alpha,1}(t)\in\mathscr{L}(\mathfrak{V}^1):t\in\overline{\mathbb{R}}_+\}$ разрешающее для уравнения $D^\alpha_t v(t)=Tv(t)$.*

Следствие 1. *Пусть банаховы пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ рефлексивны, $\alpha\in(0,2)$, $(L,M)\in\mathscr{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$.*

(i) *Если* $L_1 \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{V}^1)$ *или* $M_1 \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$, *то существуют пределы*

$$s\text{-}\lim_{t\to 0+} D_t^k U_{\alpha,k+1}(t) = P, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

(ii) *Если* $L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$ *или* $M_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$, *то существуют пределы*

$$s\text{-}\lim_{t\to 0+} D_t^k V_{\alpha,k+1}(t) = Q, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Доказательство. (i) Существование предела $s\text{-}\lim\limits_{t\to 0+} U_{\alpha,1}(t) = P$ доказано в [2]. Возьмем $k \in \mathbb{N}$, тогда в силу формул (5)

$$s\text{-}\lim_{t\to 0+} D_t^k U_{\alpha,k+1}(t) = s\text{-}\lim_{t\to 0+} D_t^k J_t^k U_{\alpha,1}(t) = s\text{-}\lim_{t\to 0+} U_{\alpha,1}(t) = P.$$

Утверждение (ii) доказывается аналогично. □

Следствие 2. *Пусть банаховы пространства* $\mathfrak{U}$ *и* $\mathfrak{V}$ *рефлексивны,* $(L, M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $\alpha\theta_0 > \pi$, $L_1 \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{V}^1)$, $L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$. *Тогда оператор* M $(L, 0)$*-ограничен* [3, 4].

Доказательство. Условие $L_1 \in (\mathfrak{U}^1;\mathfrak{V}^1)$ с необходимостью используется для определения (L, σ)-ограниченности оператора M [3, 4]. Поэтому из теоремы 2 и условия $\alpha\theta_0 > \pi$ вытекает, что для всех $\mu \neq a_0$ оператор

$$(\mu L - M)^{-1} = (\mu L_1 - M_1)^{-1} Q - M_0^{-1}(I - Q) = L_1^{-1} L_\mu^{L_1}(M_1) Q - M_0^{-1}(I - Q)$$

непрерывен как разность двух непрерывных операторов. □

Замечание 2. Таким образом, случай $\alpha\theta_0 > \pi$, в частности $\alpha \geq 2$, может представлять интерес только если $L_1 : \mathfrak{U}^1 \to \mathfrak{V}^1$ не является гомеоморфизмом, поскольку уравнение (1) с (L, p)-ограниченным оператором M исследовано в [3, 4].

§ 3. Задача Коши для вырожденного дробного эволюционного уравнения в банаховом пространстве

При $\alpha \in (0, 2)$ рассмотрим уравнение

$$D_t^\alpha L u(t) = M u(t), \quad t \geq 0. \tag{7}$$

Его *решением* назовем функцию $u \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; D_L \cap D_M)$, для которой

$$Lu \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{V}), \quad g_{m-\alpha} * \left(Lu - \sum_{k=0}^{m-1} (Lu)^{(k)}(0) g_{k+1} \right) \in C^m(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{V})$$

и для всех $t \geq 0$ справедливо равенство (7). *Решением задачи Коши*

$$u^{(k)}(0) = u_k, \quad k = 0, \dots, m-1, \tag{8}$$

для уравнения (7) называется решение уравнения $u \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$, для которого выполняются условия (8).

Замечание 3. Очевидно, что $m = 1$ при $\alpha \in (0, 1]$, $m = 2$ для $\alpha \in (1, 2)$.

Теорема 4. *Пусть банаховы пространства* $\mathfrak{U}$ *и* $\mathfrak{V}$ *рефлексивны,* $\alpha \in (0,2)$, $(L,M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $L_1 \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{V}^1)$ *или* $M_1 \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{V}^1)$, $u_k \in D_{L_1^{-1}M_1}$, $k = 0,\dots,m-1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (7), (8), *при этом оно имеет вид*

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} U_{\alpha,k+1}(t)u_k. \tag{9}$$

Доказательство. Положим $u^0(t) \equiv (I-P)u(t)$, $u^1(t) \equiv Pu(t)$. В силу теоремы 2 уравнение (7) может быть редуцировано к системе двух уравнений: $0 = u^0(t)$ и

$$D_t^\alpha u^1(t) = Su^1(t). \tag{10}$$

В силу первого из уравнений u_k должны принадлежать $\mathfrak{U}^1$, $k = 0,\dots,m-1$. Если $L_1 \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{V}^1)$ или $M_1 \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{V}^1)$, то по теореме 3 $S \in \mathscr{A}^\alpha(\theta_0,a_0)$, поэтому существует единственное решение задачи Коши $u^{1(k)}(0) = u_k \in D_S$, $k = 0,\dots,m-1$, для уравнения (10), и оно имеет вид

$$u^1(t) = \sum_{k=0}^{m-1} J_t^k U_{\alpha,1}(t)u_k = \sum_{k=0}^{m-1} U_{\alpha,k+1}(t)u_k. \quad \square$$

Теорема 5. *Пусть банаховы пространства* $\mathfrak{U}$ *и* $\mathfrak{V}$ *рефлексивны,* $\alpha \in (0,2)$, $(L,M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$ *или* $M_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$, $u_k \in D_{M_1}$, $k = 0,\dots,m-1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (7), (8), *при этом оно имеет вид* (9).

Доказательство. Если $L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$ или $M_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$, вместо уравнения (10) будет получено уравнение

$$D_t^\alpha v^1(t) = Tv^1(t), \tag{11}$$

где $v(t) = L_1u^1(t)$. По теореме 3 $T \in \mathscr{A}^\alpha(\theta_0,a_0)$, поэтому существует единственное решение задачи Коши $v^{(k)}(0) = L_1u_k \in D_T$, $k = 0,\dots,m-1$, для уравнения (11). Ее решение имеет вид

$$v(t) = \sum_{k=0}^{m-1} J_t^k V_{\alpha,1}L_1u_k = \sum_{k=0}^{m-1} V_{\alpha,k+1}L_1u_k = L_1\sum_{k=0}^{m-1} U_{\alpha,k+1}u_k$$

в силу очевидного равенства $LU_{\alpha,\beta}(t) = V_{\alpha,\beta}(t)L$. Следовательно,

$$u(t) = u^1(t) = L_1^{-1}v(t) = \sum_{k=0}^{m-1} U_{\alpha,k+1}u_k. \quad \square$$

§ 4. Линеаризованная система уравнений фазового поля дробного порядка по времени

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^k v}{\partial t^k}(x,0) = v_k(x), \quad \frac{\partial^k w}{\partial t^k}(x,0) = w_k(x), \quad x \in \Omega,\ k = 0,\dots,m-1, \tag{12}$$

$$\theta v(x,t)+(1-\theta)\frac{\partial v}{\partial n}(x,t)=\theta w(x,t)+(1-\theta)\frac{\partial w}{\partial n}(x,t)=0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+, \tag{13}$$

$$D_t^\alpha v(x,t)+\nu D_t^\alpha w(x,t)=\kappa\Delta v(x,t), \quad (x,t)\in\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+, \tag{14}$$

$$\Delta w(x,t)+\beta w(x,t)+\gamma v(x,t)=0, \quad (x,t)\in\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+. \tag{15}$$

Здесь $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\kappa>0$, $\beta,\gamma,\nu\in\mathbb{R}$, $v=v(x,t)$, $w=w(x,t)$ — неизвестные функции.

Замечание 4. В случае $\alpha=1$ система уравнений (14), (15) представляет собой линеаризацию квазистационарной системы уравнений фазового поля, описывающей в линейном приближении фазовые переходы первого рода в рамках мезоскопической теории [21, 22].

Пусть оператор $A:D_A\to L_2(\Omega)$ имеет область определения $D_A=H_0^2(\Omega)\equiv\{z\in H^2(\Omega): z(x)=0,\ x\in\partial\Omega\}\subset L_2(\Omega)$, $Az=\Delta z$ при $z\in H_0^2(\Omega)$. Через $\{\lambda_k\}$ обозначим собственные значения оператора A, занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности. Ортонормированная система соответствующих собственных функций $\{\varphi_k\}$, как известно, образует базис в $L_2(\Omega)$.

Положим $\mathfrak{U}=\mathfrak{V}=(L_2(\Omega))^2$, $D_M=\left(H_0^2(\Omega)\right)^2$,

$$L=\begin{pmatrix} I & \nu I\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{pmatrix}\in\mathscr{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}), \quad M=\begin{pmatrix}\kappa A & \mathbb{O}\\ \gamma I & \beta I+A\end{pmatrix}\in\mathscr{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V}). \tag{16}$$

Лемма 1 [2]. *Пусть* $\alpha>1$,

$$\exists\theta_1\in(\pi/2,\pi)\ \exists a_1\geq 0\ \forall\mu\in S_{a_1,\theta_1}\quad \mu^\alpha\in\rho^L(M),$$

$$\exists C_1>0\ \forall\mu\in S_{a_1,\theta_1}\quad \max\left\{\left\|R_{\mu^\alpha}^L(M)\right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U})},\left\|L_{\mu^\alpha}^L(M)\right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{V})}\right\}\leq\frac{C_1}{|\mu^\alpha-a_1|}.$$

Тогда $(L,M)\in\mathscr{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$ *при некоторых* $\theta_0\in(\pi/2,\theta_1)$, $a_0\geq a_1$, $a_0>1$.

Лемма 2 [2]. *Пусть* $\alpha\in(0,1)$,

$$\exists\theta_1\in(\pi/2,\pi)\ \exists a_0\in[0,1)\ \forall\mu\in S_{a_0,\theta_1}\quad \mu^\alpha\in\rho^L(M),$$

$$\exists C_1>0\ \forall\mu\in S_{a_0,\theta_1}\quad \max\left\{\left\|R_{\mu^\alpha}^L(M)\right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U})},\left\|L_{\mu^\alpha}^L(M)\right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{V})}\right\}\leq\frac{C_1}{|\mu^\alpha-a_0|}.$$

Тогда $(L,M)\in\mathscr{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$ *для некоторого* $\theta_0\in(\pi/2,\theta_1)$.

Лемма 3. *Пусть* $\alpha\in(0,2)$, $\kappa>0$, $\beta,\gamma,\nu,\theta\in\mathbb{R}$, $\gamma\nu-\beta\notin\sigma(A)$, *при* $\alpha\in(0,1)$

$$\max\left\{\frac{\kappa\lambda_k(\beta+\lambda_k)}{\beta-\gamma\nu+\lambda_k}:k\in\mathbb{N}\right\}<1, \tag{17}$$

операторы L *и* M *определены формулами* (16). *Тогда* $(L,M)\in\mathscr{H}_\alpha(a_0,\theta_0)$ *при некоторых* $a_0\geq 0$, $\theta_0\in(\pi/2,\pi)$, *проекторы имеют вид*

$$P=\begin{pmatrix}(\beta+\Delta)(\beta-\gamma\nu+\Delta)^{-1} & \nu(\beta+\Delta)(\beta-\gamma\nu+\Delta)^{-1}\\ -\gamma(\beta-\gamma\nu+\Delta)^{-1} & -\gamma\nu(\beta-\gamma\nu+\Delta)^{-1}\end{pmatrix},$$

$$Q=\begin{pmatrix} I & \kappa\nu\Delta(\beta-\gamma\nu+\Delta)^{-1}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пространства $\mathfrak{U} = \mathfrak{V} = (L_2(\Omega))^2$ гильбертовы, а значит, рефлексивны. Возьмем $\alpha \in [1,2)$, $\delta \in (0, \pi(1/\alpha - 1/2))$, $\theta_1 = \pi/2 + \delta$, $\mu \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\mu^\alpha L - M = \begin{pmatrix} \mu^\alpha I - \kappa A & \mu^\alpha \nu I \\ -\gamma I & -\beta I - A \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\delta_k = \frac{\kappa \lambda_k (\beta + \lambda_k)}{\beta - \gamma\nu + \lambda_k} \in \mathbb{R},$$

тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = -\infty$, так как $\kappa > 0$. Пусть $a_1 = \max\{\delta_k : k \in \mathbb{N}\}$, тогда при $\mu \in S_{a_1,\theta_1}$ непрерывны операторы

$$(\mu^\alpha L - M)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{\beta+\lambda_k}{(\beta-\gamma\nu+\lambda_k)(\mu^\alpha-\delta_k)} & \frac{\mu^\alpha\nu}{(\beta-\gamma\nu+\lambda_k)(\mu^\alpha-\delta_k)} \\ \frac{-\gamma}{(\beta-\gamma\nu+\lambda_k)(\mu^\alpha-\delta_k)} & \frac{-\mu^\alpha+\kappa\lambda_k}{(\beta-\gamma\nu+\lambda_k)(\mu^\alpha-\delta_k)} \end{pmatrix} \langle\cdot, \varphi_k\rangle \varphi_k,$$

$$R^L_{\mu^\alpha}(M) = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{\beta+\lambda_k}{(\beta-\gamma\nu+\lambda_k)(\mu^\alpha-\delta_k)} & \frac{(\beta+\lambda_k)\nu}{(\beta-\gamma\nu+\lambda_k)(\mu^\alpha-\delta_k)} \\ \frac{-\gamma}{(\beta-\gamma\nu+\lambda_k)(\mu^\alpha-\delta_k)} & \frac{-\gamma\nu}{(\beta-\gamma\nu+\lambda_k)(\mu^\alpha-\delta_k)} \end{pmatrix} \langle\cdot, \varphi_k\rangle \varphi_k,$$

$$L^L_{\mu^\alpha}(M) = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu^\alpha-\delta_k} & \frac{\kappa\nu\lambda_k}{(\beta-\gamma\nu+\lambda_k)(\mu^\alpha-\delta_k)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \langle\cdot, \varphi_k\rangle \varphi_k,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, при этом

$$\max\left\{\left\|R^L_{\mu^\alpha}(M)\right\|_{\mathscr{L}((L_2(\Omega))^2)}, \left\|L^L_{\mu^\alpha}(M)\right\|_{\mathscr{L}((L_2(\Omega))^2)}\right\} \le \frac{C_1}{|\mu^\alpha - a_1|},$$

где можно взять

$$C_1 = \max\left\{1, \max\{1, |\nu|\} \max_{k\in\mathbb{N}} \left\{\left|\frac{\beta+\lambda_k}{\beta-\gamma\nu+\lambda_k}\right|, \left|\frac{\gamma}{\beta-\gamma\nu+\lambda_k}\right|, \left|\frac{\kappa\nu\lambda_k}{\beta-\gamma\nu+\lambda_k}\right|\right\}\right\}.$$

Если $\alpha = 1$, то $(L, M) \in \mathscr{H}_1(a_1, \theta_1)$. В случае $\alpha \in (1,2)$ будет $(L, M) \in \mathscr{H}_\alpha(a_0, \theta_0)$ при некоторых $a_0 \ge a_1$, $a_0 > 1$, $\theta_0 \in (\pi/2, \theta_1)$ в силу леммы 1.

Для $\alpha \in (0,1)$ предыдущие рассуждения справедливы для любого $\theta_1 \in (\pi/2, \pi)$ и $(L, M) \in \mathscr{H}_\alpha(0, \theta_0)$ при некотором $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$ согласно лемме 2 при выполнении дополнительного условия (17).

Формулы для проекторов могут быть легко найдены с использованием теоремы 2(ii). □

Замечание 5. Нетрудно показать, что предыдущая теорема справедлива и при $\kappa, \beta, \gamma, \nu \in \mathbb{C}$, если $\mathrm{Re}\,\kappa > 0$.

Из вида проекторов P, Q следует, что при $\gamma \ne 0$

$$\mathfrak{U}^0 = \ker P = \{(-\nu z, z) : z \in L_2(\Omega)\},$$

$$\mathfrak{U}^1 = \operatorname{im} P = \{(-\gamma^{-1}(\beta + \Delta)z, z) : z \in H_0^2(\Omega)\},$$

$$\mathfrak{V}^0 = \ker Q = \{(-\kappa\nu\Delta(\beta - \gamma\nu + \Delta)^{-1} z, z) : z \in L_2(\Omega)\},$$

$$\mathfrak{V}^1 = \operatorname{im} Q = L_2(\Omega) \times \{0\}.$$

При $\gamma = 0$

$$\mathfrak{U}^1 = L_2(\Omega) \times \{0\}.$$

При $\gamma \neq 0$ очевидно, что

$$L_1 \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{V}^1), \quad M_1 \notin \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{V}^1), \quad L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1; \mathfrak{U}^1),$$

поскольку ему соответствует оператор $-\gamma(\beta - \gamma\nu + A)^{-1}$. Только при $\kappa \neq 0$, $0, -\beta \notin \sigma(A)$ существует оператор $M_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1; \mathfrak{U}^1)$ и ему соответствует оператор $-\kappa^{-1}\gamma A^{-1}(\beta + A)^{-1}$. При $\gamma = 0$ отличие в том, что $L_1^{-1} = I \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1; \mathfrak{U}^1)$, а $M_1^{-1} = \kappa^{-1}A^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1; \mathfrak{U}^1)$ при $\kappa \neq 0$, $0 \notin \sigma(A)$.

Теорема 6. *Пусть* $\kappa > 0$, $\beta, \nu \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\gamma\nu - \beta \notin \sigma(A)$, $w_k \in H_0^2(\Omega)$, $v_k = -\gamma^{-1}(\beta + \Delta)w_k \in H_0^2(\Omega)$, $k = 0, \dots, m-1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (12)–(15).

Доказательство. Как отмечено выше, в условиях данной теоремы оператор L_1^{-1} принадлежит $\mathscr{L}(\mathfrak{V}^1; \mathfrak{U}^1)$, при этом $(v_k, w_k) \in D_M \cap \mathfrak{U}^1$. По теореме 5 получим требуемое. $\square$

Теорема 7. *Пусть* $\kappa > 0$, $\beta, \nu \in \mathbb{R}$, $\gamma = 0$, $-\beta \notin \sigma(A)$, $v_k \in H_0^2(\Omega)$, $w_k = 0$, $k = 0, \dots, m-1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (12)–(15).

Доказательство. В данной ситуации также $(v_k, w_k) \in D_M \cap \mathfrak{U}^1$ и из теоремы 5 следует существование единственного решения. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bajlekova E. G.* Fractional evolution equations in Banach spaces. PhD thesis. Eindhoven Univ. Technology: Univ. Press Facilities, 2001.
2. *Федоров В. Е., Романова Е. А., Дебуш А.* Аналитические в секторе разрешающие семейства операторов вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2016. Т. 16, №2. С. 93–107.
3. *Федоров В. Е., Гордиевских Д. М.* Разрешающие операторы вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной по времени // Изв. вузов. Математика. 2015. №1. С. 71–83.
4. *Федоров В. Е., Гордиевских Д. М., Плеханова М. В.* Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, №10. С. 1367–1375.
5. *Гордиевских Д. М., Федоров В. Е.* Решения начально-краевых задач для некоторых вырожденных систем уравнений дробного порядка по времени // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2015. Т. 12. С. 12–22.
6. *Плеханова М. В.* Квазилинейные уравнения, не разрешимые относительно старшей производной по времени // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, №4. С. 909–921.
7. *Plekhanova M. V.* Optimal control for quasilinear degenerate systems of higher order // J. Math. Sci. 2016. V. 219, N 2. P. 236–244.
8. *Plekhanova M. V.* Strong solutions of quasilinear equations in Banach spaces not solvable with respect to the highest-order derivative // Discrete Continuous Dyn. Syst. Ser. S. 2016. V. 9, N 3. P. 833–847.
9. *Plekhanova M. V.* Distributed control problems for a class of degenerate semilinear evolution equations // J. Comput. Appl. Math. 2017. V. 312. P. 39–46.
10. *Федоров В. Е.* Сильно голоморфные группы линейных уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, №5. С. 702–712.

11. *Костич М., Федоров В. Е.* Вырожденные дробные дифференциальные уравнения в локально выпуклых пространствах с σ-регулярной парой операторов // Уфим. мат. журн. 2016. Т. 8, №4. С. 100–113.
12. *Kostić M.* Abstract time-fractional equations: existence and growth of solutions // Fract. Calc. Appl. Anal. 2014. V. 14, N 2. P. 301–316.
13. *Kostić M., Li C.-G., Li M.* Abstract multi-term fractional differential equations // Kragujevac J. Math. 2014. V. 38, N 1. P. 51–71.
14. *Li F., Liang J., Xu H. K.* Existence of mild solutions for fractional integrodifferential equations of Sobolev type with nonlocal conditions // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 391, N 2. P. 510–525.
15. *Wang J., Fečkan M., Zhou Y.* Controllability of Sobolev type fractional evolution systems // Dyn. Partial Differ. Equ. 2014. V. 11. P. 71–87.
16. *Debbouche A., Nieto J. J.* Sobolev type fractional abstract evolution equations with nonlocal conditions and optimal multi-controls // Appl. Math. Comput. 2014. V. 245, N C. P. 74–85.
17. *Debbouche A., Torres Delfim F. M.* Sobolev type fractional dynamic equations and optimal multi-integral controls with fractional nonlocal conditions // Fract. Calc. Appl. Anal. 2015. V. 18, N 1. P. 95–121.
18. *Caputo M.* Linear Model of Dissipation Whose Q is Almost Frequancy Independent. II // Geophys. J. R. Astronom. Soc. 1967. V. 13. P. 529–539.
19. *Герасимов А. Н.* Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // Прикл. математика и механика. 1948. Т. 12, вып. 3. С. 251–259.
20. *Prüss J.* Evolutionary integral equations and applications. Basel: Springer-Verl., 1993.
21. *Плотников П. И., Клепачева А. В.* Уравнения фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, №3. С. 651–669.
22. *Плотников П. И., Старовойтов В. Н.* Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел модели фазового поля // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, №3. С. 461–471.

Статья поступила 18 сентября 2016 г.

Федоров Владимир Евгеньевич
Челябинский гос. университет,
ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454001;
Шадринский гос. педагогический университет,
ул. Карла Либкнехта, 3, Шадринск 641870, Курганской обл.
kar@csu.ru

Романова Елена Анатольевна
Челябинский гос. университет,
ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454001
linux_21@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2016. Том 23, № 4

UDC 517.95

RESOLVING OPERATORS OF A LINEAR DEGENERATE EVOLUTION EQUATION WITH CAPUTO DERIVATIVE. THE SECTORIAL CASE

E. A. Romanova and V. E. Fedorov

Abstract. Unique solvability of the Cauchy problem for an equation in a Banach space with degenerate operator at the fractional Caputo derivative is studied. Previously found conditions of the existence of analytic in a sector resolving operators family for the equation with the degeneration on the kernel of the operator at the derivative is used. The form of the resolving operators is established. Under the satisfied conditions, the existence is shown for the unique solution of the Cauchy problem to the researched equation with initial data from the complement of the kernel of the operator at the derivative and the solution is presented using the resolving operators. The obtained results are applied to studying the linearized quasistationary time-fractional order system of the phase field equations.
Keywords: degenerate evolution equation, fractional Caputo derivative, analytic in a sector resolving operators family, Cauchy problem, initial boundary value problem, system of partial differential equations.

REFERENCES

1. *Bajlekova E. G.* Fractional Evolution Equations in Banach Spaces. PhD thesis. Univ. Press Facilities, Eindhoven Univ. Technology (2001).
2. *Fedorov V. E., Romanova E. A., and Debbouche A.* “Analytic in a sector resolving operators families of degenerate evolution equations of fractional order,” Sib. J. Pure Appl. Math., **16**, No. 2, 93–107 (2016).
3. *Fedorov V. E. and Gordievskikh D. M.* “Resolving operators of degenerate evolution equations with fractional derivative with respect to time,” Russ. Math., **59**, No. 1, 60–70 (2015).
4. *Fedorov V. E., Gordievskikh D. M., and Plekhanova M. V.* “Equations in Banach spaces with a degenerate operator under a fractional derivative,” Differ. Equ., **51**, No. 10, 1360–1368 (2015).
5. *Gordievskikh D. M. and Fedorov V. E.* “Solutions of initial boundary value problems for some degenerate equations of systems of time-fractional order,” Izv. Irkutsk State Univ., Ser. Mat., **12**, 12–22 (2015).
6. *Plekhanova M. V.* “Quasilinear equations that are not solved for the higher-order time derivative,” Sib. Math. J., **56**, No. 4, 725–735 (2015).
7. *Plekhanova M. V.* “Optimal control for quasilinear degenerate systems of higher order,” J. Math. Sci., **219**, No. 2, 236–244 (2016).
8. *Plekhanova M. V.* “Strong solutions of quasilinear equations in Banach spaces not solvable with respect to the highest-order derivative,” Discrete Continuous Dyn. Syst., Ser. S., **9**, No. 3, 833–847 (2016).
9. *Plekhanova M. V.* “Distributed control problems for a class of degenerate semilinear evolution equations,” J. Comput. Appl. Math., **312**, 39–46 (2017).

10. *Fedorov V. E.* "Strongly holomorphic groups of linear equations of Sobolev type in locally convex spaces," Differ. Equ., **40**, No. 5, 753–765 (2004).

11. *Kostić M. and Fedorov V. E.* "Degenerate fractional differential equations in locally convex spaces with σ-regular pair of operators," Ufa Math. J., **8**, No. 4, 100–113 (2016).

12. *Kostić M.* "Abstract time-fractional equations: existence and growth of solutions," Fract. Calc. Appl. Anal., **14**, No. 2, 301–316 (2014).

13. *Kostić M., Li C.-G., and Li M.* "Abstract multi-term fractional differential equations," Kragujevac J. Math., **38**, No. 1, 51–71 (2014).

14. *Li F., Liang J., and Xu H. K.* "Existence of mild solutions for fractional integrodifferential equations of Sobolev type with nonlocal conditions," J. Math. Anal. Appl., **391**, No. 2, 510–525 (2012).

15. *Wang J., Fečkan M., and Zhou Y.* "Controllability of Sobolev type fractional evolution systems," Dyn. Partial Differ. Equations, **11**, 71–87 (2014).

16. *Debbouche A. and Nieto J. J.* "Sobolev type fractional abstract evolution equations with nonlocal conditions and optimal multi-controls," Appl. Math. Comput., **245**, 74–85 (2014).

17. *Debbouche A. and Torres Delfim F. M.* "Sobolev type fractional dynamic equations and optimal multi-integral controls with fractional nonlocal conditions," Fract. Calc. Appl. Anal., **18**, No. 1, 95–121 (2015).

18. *Caputo M.* "Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent. II," Geophys. J. R. Astronom. Soc., **13**, 529–539 (1967).

19. *Gerasimov A. N.* "Generalization of linear deformation laws and their applications to problems of internal friction," Prikl. Mat. Mekh., **12**, No. 3, 529–539 (1948).

20. *Prüss J.*, Evolutionary Integral Equations and Applications, Springer, Basel (1993).

21. *Plotnikov P. I. and Klepacheva A. V.* "The phase field equations and gradient flows of marginal functions," Sib. Math. J., **42**, No. 3, 551–567 (2001).

22. *Plotnikov P. I. and Starovoytov V. N.* "Stefan problem with the surface tension as the limit of the phase field model," Differ. Equ., **29**, No. 3, 394–404 (1993).

Submitted September 18, 2016

Vladimir Evgen′evich Fedorov
Mathematical Analysis Department,
Chelyabinsk State University,
129 Kashirin Brothers Street, Chelyabinsk 454001, Russia;
Shadrinsk State Pedagogical University,
3 Karl Liebknecht st7, Shadrinsk 641870, Kurgan reg.
`kar@csu.ru`

Elena Anatol′evna Romanova
Mathematical Analysis Department,
Chelyabinsk State University,
129 Kashirin Brothers Street, Chelyabinsk 454001, Russia
`linux_21@mail.ru`