Г. Ш. Цициашвили, М. А. Осипова, А. С. Лосев, Асимптотика вероятности связности графа с низконадёжными рёбрами, *ПДМ*, 2013, номер 1, 93–98

УДК 519.248:62-192+519.176

АСИМПТОТИКА ВЕРОЯТНОСТИ СВЯЗНОСТИ ГРАФА С НИЗКОНАДЁЖНЫМИ РЁБРАМИ[1]

Г. Ш. Цициашвили, М. А. Осипова, А. С. Лосев

Институт прикладной математики ДВО РАН, г. Владивосток, Россия

E-mail: guram@iam.dvo.ru, mao1975@list.ru, alexax@bk.ru

Для графов с низконадёжными ребрами построены асимптотики вероятностей связности всего графа и любой пары его вершин. Параметрами полученных соотношений являются характеристики остовных деревьев графа и кратчайших путей. Для вычисления характеристик остовных деревьев получены формулы с помощью теорем Кирхгофа — Трента, а для вычисления характеристик кратчайших путей разработаны модификации классических алгоритмов.

Ключевые слова: *остовное дерево, матрица Кирхгофа, кратчайший путь, вероятность связности, вычислительная сложность.*

Введение

В работе [1] для планарных графов с высоконадёжными рёбрами построен алгоритм вычисления вероятности несвязности на основе асимптотической формулы Буртина — Питтеля [2], параметрами которой являются минимальное число рёбер в разрезах графа и число таких разрезов. Асимптотические константы вычислены с помощью теоремы Уитни [3] о соответствии разрезов планарного графа циклам в двойственном графе и формул Харари [4], определяющих число простых циклов. Предложенный алгоритм имеет сложность не более кубической по числу граней двойственного графа, что значительно проще известных методов перечисления всех разрезов минимального объёма, имеющих геометрическую сложность.

В настоящей работе для случайных графов с низконадёжными рёбрами построены удобные в реализации алгоритмы вычисления вероятности связности в основном кубической сложности. При различных условиях, накладываемых на вероятности работоспособности рёбер, доказаны асимптотические соотношения для вероятности связности всего графа и любой пары его вершин. Параметрами полученных соотношений являются характеристики остовных деревьев графа и кратчайших путей. Для вычисления характеристик остовных деревьев получены формулы с помощью теорем Кирхгофа — Трента, а для вычисления характеристик кратчайших путей разработаны модификации классических алгоритмов. Особенностью предлагаемых алгоритмов является тот факт, что в них требуется не перечислять экстремальные подграфы (остовные деревья, кратчайшие пути между узлами), а лишь определять их количество. Ещё одним существенным фактором упрощения вычислений является рассмотрение графов с ограниченным диаметром, которые в последние годы вызывают большой теоретический и практический интерес [5–7].

1. Вероятность связности всего графа

Рассмотрим неориентированный связный простой (без петель и кратных рёбер) граф G с множеством узлов $U = \{1, \ldots, n\}$ и множеством рёбер V. Определим матрицу

[1]Работа поддержана грантом РФФИ № 12-01-00114-а.

Кирхгофа $K = ||k(i,j)||_{i,j=1}^{n}$:

$$k(i,j) = \begin{cases} \text{степень узла } i, \ i = j, \\ -1, \ (i,j) \in V, \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases}$$

Под степенью узла понимается число инцидентных этому узлу рёбер. Обозначим m число остовных деревьев в графе G и предположим, что каждое ребро $v = (i,j)$, $i \neq j$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, графа G с вероятностью $p(v)$ работоспособно, причём все рёбра функционируют независимо. Если $p(v) = h$, $v \in V$, то для вероятности связности $P(G)$ графа G справедливо соотношение [8, формула (5)] (далее запись $f(x) \sim g(x), \ x \to x_0$ означает, что существует и равен единице предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)/g(x)$)

$$P(G) \sim mh^{n-1}, \ h \to 0. \tag{1}$$

В силу теоремы Кирхгофа — Трента (см., например, [9]) алгебраические дополнения всех элементов матрицы K равны между собой и совпадают с m. Известно (см., например, [10]), что вычисление определителя порядка $n-1$ и, значит, коэффициента m методом Гаусса требует $\mathrm{O}(n^3)$ арифметических операций.

Замечание 1. Если $p(v) = h^{l(v)}$, $v \in V$, при некоторых натуральных $l(v)$, то, заменяя каждое ребро графа на $l(v)$ последовательно соединённых рёбер, можно к построенному таким образом графу применить формулу (1). Одним из приложений этого результата является исследование распределения случайного времени потери связности сети при $p(v) = P(\tau(v) > T)$, $T \to \infty$, где $\tau(v)$ — случайное время до отказа ребра v.

Теорема 1. Если при некоторых $s(v) > 0$, $v \in V$, выполняется $p(v) \sim s(v)h$, $h \to 0$, то

$$P(G) \sim m_1 h^{n-1}, \ h \to 0. \tag{2}$$

Здесь m_1 — алгебраическое дополнение любого элемента (они все совпадают) матрицы $K_1 = ||k_1(i,j)||_{i,j=1}^{n}$ вида

$$k_1(i,j) = \begin{cases} \sum\limits_{t \in U, \ (i,t) \in V} s((i,t)), \ i = j, \\ -s((i,j)), \ (i,j) \in V, \\ 0 \text{ иначе,} \end{cases}$$

причём вычислительная сложность определения коэффициента m_1 равна $\mathrm{O}(n^3)$.

Доказательство. Обозначим $G_1, \ldots, G_m$ остовные деревья графа G, каждое из которых имеет $n-1$ ребро. Положим A_k событие, состоящее в работоспособности всех рёбер дерева G_k, $1 \leqslant k \leqslant m$. Тогда справедлива формула $P(G) = P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{m} A_k\right)$ и вытекающие из неё неравенства

$$\sum_{k=1}^{m} P(A_k) - \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant m} P(A_{k_1} A_{k_2}) \leqslant P(G) \leqslant \sum_{k=1}^{m} P(A_k).$$

Из условий теоремы на $p(v)$ следует, что

$$\sum_{k=1}^{m} P(A_k) \sim \sum_{k=1}^{m} \prod_{v \in G_k} hs(v) = h^{n-1} m_1, \ h \to 0, \ m_1 = \sum_{k=1}^{m} \prod_{v \in G_k} s(v),$$

$$\sum_{1\leqslant k_1<k_2\leqslant m} P(A_{k_1}A_{k_2}) \sim \sum_{1\leqslant k_1<k_2\leqslant m} \prod_{v\in G_{k_1}\cup G_{k_2}} hs(v) \sim h^n \sum_{1\leqslant k_1<k_2\leqslant m} \prod_{v\in G_{k_1}\cup G_{k_2}} s(v) = \mathrm{O}(h^n).$$

Из полученных соотношений приходим к формуле (2). В силу обобщения теоремы Кирхгофа — Трента (см., например, [9, теорема 1]) выражение m_1 совпадает с алгебраическим дополнением любого элемента матрицы K_1, вычислительная сложность определения которого $\mathrm{O}(n^3)$. ■

Замечание 2. Утверждение теоремы 1 автоматически переносится на мультиграф, полученный из графа G заменой каждого ребра $v \in V$ на $s(v)$ параллельно соединённых и независимо функционирующих рёбер с вероятностью работоспособности h. Такое параллельное соединение имеет вероятность работоспособности $\sim s(v)h,\ h \to 0$.

2. Вероятность связности пар вершин графа

Обозначим $D(i,j)$ минимальное число рёбер в путях, соединяющих узлы i,j графа G, $C(i,j)$ — число путей с $D(i,j)$ рёбрами, $\Gamma_1(i,j),\ldots,\Gamma_{C(i,j)}(i,j)$ — пути с $D(i,j)$ рёбрами. Для вероятности связности $P_{ij}(G)$ узлов i,j графа G доказаны следующие утверждения.

Теорема 2.

1. Если $p(v)=h,\ v\in V$, то

$$P_{ij}(G) \sim C(i,j)h^{D(i,j)},\ h\to 0. \tag{3}$$

2. Если при некоторых $s(v)>0,\ v\in V$, выполняется $p(v){\sim}s(v)h,\ h\to 0$, то

$$P_{ij}(G) \sim m(i,j)h^{D(i,j)},\ h\to 0,\ m(i,j)=\sum_{t=1}^{C(i,j)} \prod_{v\in\Gamma_t(i,j)} s(v). \tag{4}$$

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 1, с тем лишь отличием, что в нем остовные деревья заменяются на кратчайшие пути между узлами i,j.

Следствие 1. Если $p(v)=h,\ v\in V$, то

$$\min_{1\leqslant i,j\leqslant n} P_{ij}(G) \sim Ch^D,\ h\to 0,$$

$$D=\max_{1\leqslant i,j\leqslant n} D(i,j),\ C=\min_{(i,j):\ D(i,j)=D} C(i,j).$$

Остановимся на вычислении коэффициентов $D(i,j),\ C(i,j)$ асимптотической формулы (3). Найдем все элементы матриц $||D(i,j)||_{i,j=1}^n,\ ||C(i,j)||_{i,j=1}^n$, так как это более экономичная процедура, чем последовательное определение элементов этой матрицы.

Для вычисления матрицы $||D(i,j)||_{i,j=1}^n$ воспользуемся алгоритмом Флойда — Стейнберга. Следуя [11], введём матрицу $R=||r(i,j)||_{i,j=1}^n$ равенствами

$$r(i,j)=\begin{cases} 1,\ (i,j)\in V,\\ 0,\ i=j,\\ +\infty \text{ иначе.}\end{cases}$$

На множестве квадратных матриц размера $n\times n$ введём операцию произведения $\otimes$ следующего вида: $T\otimes Q=||(t\otimes q)(i,j)||_{i,j=1}^n$, где

$$(t\otimes q)(i,j)=\min_{1\leqslant p\leqslant n}\left(t(i,p)+q(p,j)\right),\ 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

Обозначим $t = \min(f : 2^f \geqslant n)$, тогда матрицу $||D(i,j)||_{i,j=1}^n$ можно вычислить с помощью рекуррентной процедуры

$$R^2 = R \otimes R,\ R^{2^{f+1}} = R^{2^f} \otimes R^{2^f},\ 1 \leqslant f < t,\ ||D(i,j)||_{i,j=1}^n = R^n = R^{2^t}. \qquad (5)$$

Для вычисления матрицы $||D(i,j)||_{i,j=1}^n$ в соответствии с алгоритмом Флойда — Стейнберга требуется $2n^3 \log_2 n$ арифметических операций. Зная матрицу $||D(i,j)||_{i,j=1}^n$, можно вычислить диаметр D графа G.

Перейдём теперь к вычислению матрицы $||C(i,j)||_{i,j=1}^n$. Обозначим $||C_1(i,j)||_{i,j=1}^n$ матрицу смежности графа G :

$$C_1(i,j) = \begin{cases} 1, & (i,j) \in V, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Известно [12], что матрицы $||C_k(i,j)||_{i,j=1}^n$, элементами которых являются количества путей длины k между узлами i,j в графе G, удовлетворяют равенствам

$$||C_{k+1}(i,j)||_{i,j=1}^n = ||C_k(i,j)||_{i,j=1}^n \cdot ||C_1(i,j)||_{i,j=1}^n,\ 1 \leqslant k < n. \qquad (6)$$

В свою очередь, справедливы очевидные соотношения

$$C(i,j) = C_{D(i,j)}(i,j),\ 1 \leqslant i,j \leqslant n. \qquad (7)$$

Таким образом, для вычислении матрицы $||C(i,j)||_{i,j=1}^n$ с помощью формул (6), (7) требуется определить матрицы $||C_1(i,j)||_{i,j=1}^n, \ldots, ||C_{n-1}(i,j)||_{i,j=1}^n$. Эта процедура имеет вычислительную сложность $\mathrm{O}(n^4.)$

Замечание 3. Для сетей с ограниченным диаметром D в формуле (5) можно заменить величину t на $\min\{f : 2^f \geqslant D\}$, при этом сложность вычисления матрицы $||D(i,j)||_{i,j=1}^n$ составляет $2n^3 \log_2 D$ арифметических операций. В свою очередь, для вычисления матрицы $||C(i,j)||_{i,j=1}^n$ с помощью формул (6), (7) понадобится вычислить матрицы $||C_l(i,j)||_{i,j=1}^n$, $l = 1, \ldots, D$, что потребует $\mathrm{O}(Dn^3)$ арифметических операций.

Замечание 4. Для вычисления матрицы $||m(i,j)||_{i,j=1}^n$ в соотношении (4) надо ввести матрицу $||C_1(i,j)||_{i,j=1}^n$ следующим образом:

$$C_1(i,j) = \begin{cases} s((i,j)), & (i,j) \in V, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

и, воспользовавшись равенством (6) и $m(i,j) = C_{D(i,j)}(i,j),\ 1 \leqslant i,j \leqslant n$, найти матрицы $||C_l(i,j)||_{i,j=1}^n,\ l = 1, \ldots, n-1$.

3. Вычислительный эксперимент

Зададим граф G графически (рис. 1).

Составим для графа G матрицу Кирхгофа:

$$K = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

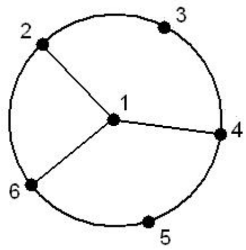

Рис. 1. Граф G

Число остовных деревьев графа m совпадает с алгебраическим дополнением любого элемента матрицы K. В нашем случае $m = 35$. Полагая, что вероятность работоспособности рёбер равна $p(v) = h = 0{,}1$, вычислим вероятность связности графа по формуле (1) и методом Монте-Карло при 10^7 итераций, обозначив её $P^*(G)$:

$$P(G) \approx 0{,}00035, \ P^*(G) \approx 0{,}000283.$$

Время счета по формуле (1) составило 2 с, а методом Монте-Карло — 12 ч.

Для заданного графа вычислим вероятности связности между всеми парами вершин, полагая $p(v) = h = 0{,}01$. С использованием рекуррентных процедур (5) и (6) вычислены матрицы $||D(i,j)||_{i,j=1}^n$, $||C(i,j)||_{i,j=1}^n$, характеризующие минимальное число рёбер в путях и количество путей с минимальным числом рёбер:

$$||D(i,j)||_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad ||C(i,j)||_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Результаты вычислений вероятностей связности пар вершин $P_{ij}(G)$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, по формуле (3) и методом Монте-Карло ($P^*_{ij}(G)$) при 10^6 итераций следующие:

$$||P_{ij}(G)||_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}01 & 0{,}0002 & 0{,}01 & 0{,}0002 & 0{,}01 \\ 0{,}01 & 1 & 0{,}01 & 0{,}0002 & 0{,}0001 & 0{,}01 \\ 0{,}0002 & 0{,}01 & 1 & 0{,}01 & 0{,}0001 & 0{,}0001 \\ 0{,}01 & 0{,}0002 & 0{,}01 & 1 & 0{,}01 & 0{,}0002 \\ 0{,}0002 & 0{,}0001 & 0{,}0001 & 0{,}01 & 1 & 0{,}01 \\ 0{,}01 & 0{,}01 & 0{,}0001 & 0{,}0002 & 0{,}01 & 1 \end{pmatrix},$$

$$||P^*_{ij}(G)||_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}01035 & 0{,}000203 & 0{,}010027 & 0{,}000192 & 0{,}010205 \\ 0{,}01035 & 1 & 0{,}010001 & 0{,}000198 & 0{,}000095 & 0{,}009764 \\ 0{,}000203 & 0{,}010001 & 1 & 0{,}010083 & 0{,}000094 & 0{,}000103 \\ 0{,}010027 & 0{,}000198 & 0{,}010083 & 1 & 0{,}010051 & 0{,}000208 \\ 0{,}000192 & 0{,}000095 & 0{,}000094 & 0{,}010051 & 1 & 0{,}009973 \\ 0{,}010205 & 0{,}009764 & 0{,}000103 & 0{,}000208 & 0{,}009973 & 1 \end{pmatrix}.$$

Время счета по формуле (3) составило 10 с, методом Монте-Карло — 6 ч.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tsitsiashvili G. Sh.*Complete calculation of disconnection probability in planar graphs // Reliability: Theory and Applications. 2012. V. 1. No. 1. P. 154–159.

2. *Буртин Ю., Питтель Б.* Асимптотические оценки надёжности сложных систем // Техническая кибернетика. 1972. Т. 10. № 3. С. 90–96.
3. *Whithney H.* Nonseparable and planar graphs // Transact. Amer. Math. Soc. 1932. V. 34. P. 339–369.
4. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973. 314 с.
5. *Мигов Д. А.* Расчет надежности сети с ограничением на диаметр с применением точек сочленения // Автоматика и телемеханика. 2011. № 7. С. 69–74.
6. *Мигов Д. А.* Расчет надежности сети с ограничением на диаметр с использованием сочленений // Проблемы информатики. 2011. № 3. С. 4–9.
7. *Райгородский А. М.* Модели случайных графов и их применение // Труды МФТИ. 2010. Т. 2. № 4. С. 130-140.
8. *Ломоносов М. В., Полесский В. П.* Нижняя оценка надежности сетей // Проблемы передачи информации. 1972. Т. 8. № 2. С. 47–53.
9. *Чеботарев П. Ю., Шамис Е. В.* Матричная теорема о лесах и измерение связей в малых социальных группах // Автоматика и телемеханика. 1997. Т. 9. С. 125–137.
10. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра. М.: Физматлит, 2004. 280 с.
11. *Floid R. W. and Steinberg L.* An adaptive algorithm for spatial grayscale // SID 75 Digest. New York, N.Y.: Lewis Winner, 1975. P. 36–37.
12. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.* Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 2000. 893 с.