Н. А. Баженов, Р. Р. Тухбатуллина, О вычислимой категоричности булевой алгебры $\mathfrak{B}(\omega)$ с выделенным автоморфизмом, *Алгебра и логика*, 2013, том 52, номер 2, 131–144

Алгебра и логика, 52, № 2 (2013), 131—144

УДК 512.563+510.5+510.6

О ВЫЧИСЛИМОЙ КАТЕГОРИЧНОСТИ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ $\mathfrak{B}(\omega)$ С ВЫДЕЛЕННЫМ АВТОМОРФИЗМОМ*)

Н. А. БАЖЕНОВ, Р. Р. ТУХБАТУЛЛИНА

Введение

Изучение категоричности вычислимых моделей относительно различных классов начал ван дер Варден, исследовавший следующий вопрос: существует ли эффективный алгоритм построения изоморфизма между двумя алгебраическими замыканиями поля, построенными различными способами. Эту проблему решили Фрейлих и Шефердсон [1]. Мальцев [2] доказал, что конечно порождённые алгебраические системы являются вычислимо категоричными. Это положило начало систематическому изучению проблемы описания категоричных моделей.

Пусть α — вычислимый ординал. Вычислимая модель $\mathfrak{A}$ называется *вычислимо категоричной* (*Δ^0_α-категоричной*), если для любого вычислимого представления $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$ существует вычислимый изоморфизм (Δ^0_α-изоморфизм) $\varphi\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$.

Вычислимая модель $\mathfrak{A}$ называется *относительно Δ^0_α-категоричной*, если для любой модели $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$, такой что носитель $\mathfrak{B}$ является подмножеством множества натуральных чисел, существует $\Delta^0_\alpha(D(\mathfrak{B}))$-изоморфизм $\varphi\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$, где $D(\mathfrak{B})$ — атомная диаграмма $\mathfrak{B}$.

*)Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ, проект НШ-276.2012.1, и Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 11-01-00236.

Если вычислимая модель относительно Δ^0_α-категорична, то она является Δ^0_α-категоричной, но, вообще говоря, понятия Δ^0_α-категоричности и относительной Δ^0_α-категоричности не совпадают. Гончаров, Харизанов, Найт, Мак-Кой, Миллер и Соломон [3] доказали, что для любого непредельного вычислимого ординала α существует Δ^0_α-категоричная модель, не являющаяся относительно Δ^0_α-категоричной. Чисхолм, Фокина, Гончаров, Харизанов, Найт и Куинн [4] получили аналогичный результат для произвольного предельного ординала α.

Пусть $\mathbf{d}$ — тьюрингова степень. Вычислимая модель $\mathfrak{A}$ называется $\mathbf{d}$-*вычислимо категоричной*, если для любого вычислимого представления $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$ существует $\mathbf{d}$-вычислимый изоморфизм $\varphi\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$.

Заметим, что вычислимая модель Δ^0_{n+1}-категорична тогда и только тогда, когда она $\mathbf{0}^{(n)}$-вычислимо категорична.

Фокина, Калимуллин и Миллер [5] ввели понятия *спектра категоричности* и *степени категоричности* вычислимой модели. Если $\mathfrak{A}$ — вычислимая модель, то *спектром категоричности* $\mathfrak{A}$ называется множество

$$\mathrm{CatSpec}(\mathfrak{A}) = \{\mathbf{d} \mid \mathfrak{A}\ \mathbf{d}\text{-вычислимо категорична}\}.$$

Говорят, что тьюрингова степень $\mathbf{d}_0$ является *степенью категоричности* $\mathfrak{A}$, если $\mathbf{d}_0$ является наименьшей степенью в $\mathrm{CatSpec}(\mathfrak{A})$.

Фокина, Калимуллин и Миллер [5] показали, что для любого $m \in \omega$ и любой тьюринговой степени $\mathbf{d} \geqslant \mathbf{0}^{(m)}$, являющейся 2-вычислимо перечислимой относительно $\mathbf{0}^{(m)}$, существует вычислимая модель $\mathfrak{A}$, для которой $\mathbf{d}$ является степенью категоричности. Чима, Франклин и Шор [6] обобщили этот результат для тьюринговых степеней $\mathbf{d} \geqslant \mathbf{0}^{(\alpha)}$, 2-вычислимо перечислимых относительно $\mathbf{0}^{(\alpha)}$, где α — произвольный вычислимый непредельный ординал.

Перейдём к описанию результатов, касающихся булевых алгебр. Гончаров, Дзгоев [7] и Реммел [8] независимо получили описание вычислимо категоричных булевых алгебр: вычислимая булева алгебра $\mathfrak{B}$ является вычислимо категоричной тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B}$ содержит только конечное число атомов. Мак-Кой [9, 10] получил алгебраическое описание относительно Δ_2^0- и относительно Δ_3^0-категоричных булевых алгебр. Харрис [11] доказал, что для произвольного $n \in \omega$ классы Δ_n^0-категоричных булевых алгебр и относительно Δ_n^0-категоричных булевых алгебр совпадают. Алаев [12] получил описание вычислимо категоричных булевых алгебр с конечным числом выделенных идеалов; Баженов [13] показал, что никакая тьюрингова степень $\mathbf{d}$, $\mathbf{0} < \mathbf{d} < \mathbf{0}'$, не может быть степенью категоричности вычислимой булевой алгебры.

Данная работа продолжает работы [14, 15]. В § 1 приводятся необходимые предварительные сведения. В § 2 доказывается, что любая вычислимо перечислимая тьюрингова степень является степенью категоричности некоторой вычислимой булевой алгебры с выделенным автоморфизмом. В § 3 строится вычислимо категоричная булева алгебра с выделенным автоморфизмом, имеющая множество атомов заданной вычислимо перечислимой тьюринговой степени. Все результаты получены в неразделимом соавторстве.

§ 1. Предварительные сведения

Используемые в данной работе основные понятия и определения теории вычислимых моделей содержатся в [16–18].

Если $\mathfrak{B}$ — модель некоторого языка, $\bar{a} = a_1, \ldots, a_n$, то запись $\bar{a} \in \mathfrak{B}$ означает, что $a_1, \ldots, a_n$ принадлежат носителю модели $\mathfrak{B}$. Через p_x обозначается x-ое в естественной нумерации простое число. Сокращение *в. п.* будет использоваться вместо термина *вычислимо перечислимый.*

Будем считать, что булевы алгебры рассматриваются как модели языка $\mathcal{L}_{BA} = \{\vee^2, \wedge^2, \mathrm{C}^1; 0, 1\}$. На булевых алгебрах стандартным образом определяется порядок: $a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $a \wedge b = a$. Под булевой алгеброй с выделенным автоморфизмом $\mathfrak{B}^* = \langle \mathfrak{B}, \varphi \rangle$ будем понимать булеву алгебру $\mathfrak{B}$ с заданным на ней автоморфизмом φ, рассматриваемым как новый одноместный функциональный символ.

Пусть $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ — булевы алгебры. Через $\mathrm{Atom}(\mathfrak{B})$ обозначается множество атомов $\mathfrak{B}$, через $\mathrm{F}(\mathfrak{B})$ — идеал Фреше $\mathfrak{B}$. Если C — подмножество носителя $\mathfrak{B}$, то $\mathrm{gr}_{\mathfrak{B}}(C)$ обозначает подалгебру $\mathfrak{B}$, порождённую C. Запись вида $\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{C}$ означает, что $\mathfrak{B}$ является подалгеброй $\mathfrak{C}$. Для $k \geqslant 2$ и $a, b_1, \ldots, b_k \in \mathfrak{B}$ будем говорить, что кортеж $b_1, \ldots, b_k$ является *разбиением* a (на k элементов), если

$$(a = b_1 \vee \ldots \vee b_k) \mathbin{\&} \mathop{\&}_{1 \leqslant i < j \leqslant k} (b_i \wedge b_j = 0), \tag{1}$$

и использовать $(b_1, \ldots, b_k \mid a)$ как сокращенную форму записи формулы (1).

Если L — линейный порядок, то через $\mathfrak{B}(L)$ обозначается подалгебра $\langle P(L), \cup, \cap, \mathrm{C}; \varnothing, L \rangle$, порождённая элементами вида $[x, y) \leftrightharpoons \{z \mid x \leqslant z < y\}$ и $[x, \infty) \leftrightharpoons \{z \mid x \leqslant z\}$, где $x, y \in L$.

Пусть $\mathfrak{A}^* = \langle \mathfrak{A}, \varphi \rangle$ — булева алгебра с выделенным автоморфизмом. Для $a \in \mathfrak{A}$ *орбитой* a в $\mathfrak{A}^*$ называется множество

$$\mathrm{Orb}_{\varphi}(a) = \{\varphi^n(a), \varphi^{-n}(a) \mid n \in \omega\}.$$

Множество C, являющееся подмножеством носителя $\mathfrak{A}$, называется *орбитой* (*атомной орбитой*), если существует $a \in \mathfrak{A}$ ($a \in \mathrm{Atom}(\mathfrak{A})$), такое что $C = \mathrm{Orb}_{\varphi}(a)$.

Определим частичную функцию $|\cdot|_{\varphi}$, действующую из носителя $\mathfrak{A}$ в ω следующим образом:

$$|a|_{\varphi} = \begin{cases} \min\{n \mid n \geqslant 1 \mathbin{\&} \varphi^n(a) = a\}, & \text{если } (\exists n_0 \geqslant 1)(\varphi^{n_0}(a) = a), \\ \text{не определено} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{A}^* = \langle \mathfrak{A}, \varphi \rangle$ — счётная булева алгебра с выделенным автоморфизмом. *Характером* $\mathfrak{A}^*$ называется множество

$$\chi(\mathfrak{A}^*) \leftrightharpoons \{\langle n, k \rangle \mid n, k > 0 \mathbin{\&} \exists^{\geqslant k} \text{ попарно различных} \\ \text{атомных орбит мощности } n \text{ в } \mathfrak{A}^*\}.$$

Всюду далее счётную булеву алгебру с выделенным автоморфизмом будем кратко называть *A-алгеброй*.

Множество $K \subseteq (\omega \setminus \{0\})^2$ называется *характером*, если для любых n и $k > 0$ из условия $\langle n, k+1 \rangle \in K$ следует $\langle n, k \rangle \in K$. Для характера K

определим функцию $F_K : \omega \to \omega + 1$ по правилу

$$F_K(n) = \sup(\{k \mid \langle n, k\rangle \in K\} \cup \{0\}),$$

при этом договоримся считать, что $F_K(n) = \omega$, если $\sup(\{k \mid \langle n, k\rangle \in \in K\}) = \infty$. Заметим, что для любых характеров K и L равенство $K = L$ справедливо тогда и только тогда, когда $F_K = F_L$. Также легко понять, что любой характер A-алгебры является характером.

Следующее замечание показывает, что если мы хотим рассматривать A-алгебры вида $\langle\mathfrak{B}(\omega), \varphi\rangle$ с точностью до изоморфизма, то достаточно ограничиться рассмотрением только их характеров и числа бесконечных атомных орбит в этих A-алгебрах.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $\mathfrak{B}^* = \langle\mathfrak{B}, \varphi\rangle$ и $\mathfrak{C}^* = \langle\mathfrak{C}, \psi\rangle$ — A-алгебры, такие что $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{C} \cong \mathfrak{B}(\omega)$, $\mathfrak{B}^*$ содержит β попарно различных бесконечных атомных орбит, $\mathfrak{C}^*$ содержит γ попарно различных бесконечных атомных орбит. Изоморфизм $\mathfrak{B}^* \cong \mathfrak{C}^*$ имеет место тогда и только тогда, когда $\chi(\mathfrak{B}^*) = \chi(\mathfrak{C}^*)$ и $\beta = \gamma$.

В работе [15] доказаны следующие результаты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Пусть $\mathfrak{B}^* = \langle\mathfrak{B}, \varphi\rangle$ — вычислимая A-алгебра. Тогда $\chi(\mathfrak{B}^*)$ является в. п. относительно* $\mathrm{Atom}(\mathfrak{B})$.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть $\mathfrak{B}^* = \langle\mathfrak{B}, \varphi\rangle$ — A-алгебра, такая что $\mathfrak{B} \cong \cong \mathfrak{B}(\omega)$. A-алгебра $\mathfrak{B}^*$ имеет вычислимое представление тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

(1) $\chi(\mathfrak{B}^*)$ *— конечное множество;*

(2) *существует вычислимая функция $f\colon \omega \times \omega \to \omega \setminus \{0\}$, такая что*

(a) $(\forall x)(f(x, 0) = 1)$,

(b) $(\forall x)(\forall s)(f(x, s)$ *делит* $f(x, s + 1))$,

(c) *для любого x существует* $\lim_s f(x, s)$,

(d) $(\forall n)(F_{\chi(\mathfrak{B}^*)}(n) = |\{x \mid \lim_s f(x, s) = n\}|)$.

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть $\mathfrak{B}^* = \langle\mathfrak{B}, \varphi\rangle$ — A-алгебра, такая что $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(\omega)$. A-алгебра $\mathfrak{B}^*$ имеет вычислимое представление с вычисли-*

мым множеством атомов тогда и только тогда, когда $\chi(\mathfrak{B}^*)$ — *в. п. множество.*

§ 2. В. п. степень категоричности

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Пусть* $\mathfrak{B}^* = \langle \mathfrak{B}, \varphi \rangle$ *и* $\mathfrak{C}^* = \langle \mathfrak{C}, \psi \rangle$ — *вычислимые A-алгебры, такие что* $\mathfrak{B}^* \cong \mathfrak{C}^*$, $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(\omega)$, $\mathfrak{B}^*$ *содержит* $n < \omega$ *бесконечных атомных орбит, а множества* $\mathrm{Atom}(\mathfrak{B})$ *и* $\mathrm{Atom}(\mathfrak{C})$ *вычислимы относительно тьюринговой степени* $\mathbf{d}$. *Тогда существует* $\mathbf{d}$-*вычислимый изоморфизм A-алгебр* $f\colon \mathfrak{B}^* \to \mathfrak{C}^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $n \neq 0$. Пусть $I_1, \ldots, I_n$ — все бесконечные атомные орбиты в $\mathfrak{B}^*$, $J_1, \ldots, J_n$ — все бесконечные атомные орбиты в $\mathfrak{C}^*$. Зафиксируем $d_i \in I_i$, $e_i \in J_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n$.

Построим $\mathbf{d}$-вычислимую биекцию $g\colon \mathrm{Atom}(\mathfrak{B}) \to \mathrm{Atom}(\mathfrak{C})$ по шагам.

Шаг 0. Полагаем $g_0 = \{\langle d_i, e_i \rangle \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$, $B_0 = \mathrm{Atom}(\mathfrak{B}) \setminus \{d_i \mid 1 \leqslant \leqslant i \leqslant n\}$, $C_0 = \mathrm{Atom}(\mathfrak{C}) \setminus \{e_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

Шаг $s+1$. Пусть $B_s = \{b_0^s < b_1^s < \ldots\}$, $C_s = \{c_0^s < c_1^s < \ldots\}$. Полагаем

$$\tilde{g}_s = g_s \cup \{\langle \varphi^{s+1}(d_i), \psi^{s+1}(e_i) \rangle, \langle \varphi^{-(s+1)}(d_i), \psi^{-(s+1)}(e_i) \rangle \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Случай 1. Пусть $s = 2t$. Ищем наименьшее $i \leqslant s+1$, для которого найдётся $1 \leqslant m \leqslant s+1$, такое что

$$\mathfrak{B}^* \models \varphi^m(b_i^s) = b_i^s \ \& \ \mathop{\&}_{1 \leqslant k < l \leqslant m} \varphi^k(b_i^s) \neq \varphi^l(b_i^s). \tag{2}$$

Если такие i и m нашлись, то находим наименьшее j с условием

$$\mathfrak{C}^* \models \psi^m(c_j^s) = c_j^s \ \& \ \mathop{\&}_{1 \leqslant k < l \leqslant m} \psi^k(c_j^s) \neq \psi^l(c_j^s) \tag{3}$$

и полагаем $g_{s+1} = \tilde{g}_s \cup \{\langle \varphi^k(b_i^s), \psi^k(c_j^s) \rangle \mid 1 \leqslant k \leqslant m\}$. В противном случае полагаем $g_{s+1} = \tilde{g}_s$.

Случай 2. Пусть $s = 2t+1$. Ищем наименьшее $j \leqslant s+1$, для которого найдётся $1 \leqslant m \leqslant s+1$, такое что выполняется (3). Если такие j и m нашлись, то находим наименьшее i, такое что выполняется (2). Определяем g_{s+1} так же, как и в случае 1.

Вне зависимости от того, какой из случаев 1 или 2 выполняется, полагаем $B_{s+1} = B_s \setminus \mathrm{dom}(g_{s+1})$ и $C_{s+1} = C_s \setminus \mathrm{range}(g_{s+1})$. Описание конструкции завершено.

Полагаем $g = \bigcup_{s\in\omega} g_s$. Легко понять, что построенное отображение g действительно является $\mathbf{d}$-вычислимой биекцией, действующей из $\mathrm{Atom}(\mathfrak{B})$ на $\mathrm{Atom}(\mathfrak{C})$. Кроме того, $g(\varphi(b)) = \psi(g(b))$ для любого $b \in \mathrm{Atom}(\mathfrak{B})$.

Отображение g можно расширить до $\mathbf{d}$-вычислимого изоморфизма A-алгебр f следующим образом. Если $b \in \mathfrak{B}$, то либо $b \in \mathrm{F}(\mathfrak{B})$, либо $\mathrm{C}(b) \in \mathrm{F}(\mathfrak{B})$. Если $b \in \{0_{\mathfrak{B}}, 1_{\mathfrak{B}}\}$, то $f(b)$ определяется тривиальным образом. Будем считать, что $b \notin \{0_{\mathfrak{B}}, 1_{\mathfrak{B}}\}$. Находим наименьшее s, для которого существуют $b_1, \ldots, b_n \in \mathrm{dom}(g_s)$, такие что $(b_1, \ldots, b_n \mid b)$ или $(b_1, \ldots, b_n \mid \mathrm{C}(b))$. Если $(b_1, \ldots, b_n \mid b)$, то полагаем $f(b) = g(b_1) \vee \ldots \vee g(b_n)$. В противном случае полагаем $f(b) = \mathrm{C}(g(b_1) \vee \ldots \vee g(b_n))$. $\Box$

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Любая вычислимая A-алгебра $\mathfrak{B}^* = \langle \mathfrak{B}, \varphi \rangle$, такая что $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(\omega)$ и $\mathfrak{B}^*$ содержит только конечное число бесконечных атомных орбит, является $\mathbf{0}'$-вычислимо категоричной.*

Для $l, n \geqslant 2$ и одноместного функционального символа φ определим формулы

$$\Psi_l^{\varphi}(a) \leftrightharpoons (a \neq 0) \ \& \ (\varphi^l(a) = a) \ \& \ \mathop{\&}_{1\leqslant i<j\leqslant l} \varphi^i(a) \wedge \varphi^j(a) = 0,$$

$$\Phi_{l,n}^{\varphi}(a) \leftrightharpoons \exists b_1 \ldots \exists b_n \Big(a = b_1 \ \& \ \mathop{\&}_{1\leqslant i\leqslant n} \Psi_l^{\varphi}(b_i)$$
$$\& \mathop{\&}_{1\leqslant i<j\leqslant n} \ \mathop{\&}_{1\leqslant s,t\leqslant l} \varphi^s(b_i) \wedge \varphi^t(b_j) = 0 \Big).$$

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть $\mathbf{d}$ — в.п. тьюрингова степень. Существует вычислимая A-алгебра $\mathfrak{B}^* = \langle \mathfrak{B}, \varphi \rangle$, такая что $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(\omega)$ и $\mathbf{d}$ является степенью категоричности $\mathfrak{B}^*$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем некоторое в.п. множество $D \in \mathbf{d}$ и сильно вычислимую последовательность конечных множеств $D^0 \subseteq D^1 \subseteq \subseteq \ldots$, такую что $\bigcup_{s\in\omega} D^s = D$. Рассмотрим A-алгебру $\mathfrak{B}^* = \langle \mathfrak{B}, \varphi \rangle$, такую что $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(\omega)$, в $\mathfrak{B}^*$ нет бесконечных атомных орбит и

$$\chi(\mathfrak{B}^*) = \{\langle p_x, 1\rangle \mid x \in \omega\} \cup \{\langle p_x, 2\rangle \mid x \in D\}.$$

По теореме 1.2 у $\mathfrak{B}^*$ есть вычислимое представление с вычислимым множеством атомов. Без ограничения общности можно считать, что сама A-алгебра $\mathfrak{B}^*$ является таким представлением.

Заметим: $b \in \mathrm{Atom}(\mathfrak{B})$ тогда и только тогда, когда существует $x \in \omega$, такой что

$$(x \notin D \ \& \ \Psi^{\varphi}_{p_x}(b)) \ \vee \ (x \in D \ \& \ \Phi^{\varphi}_{p_x,2}(b)).$$

Следовательно, для любого вычислимого представления $\mathfrak{C}^* = \langle \mathfrak{C}, \psi \rangle \cong \mathfrak{B}^*$ множество атомов $\mathrm{Atom}(\mathfrak{C})$ вычислимо относительно D. В силу предложения 2.1 получаем, что $\mathfrak{B}^*$ $\mathbf{d}$-вычислимо категорична.

Рассмотрим вычислимую безатомную нетривиальную булеву алгебру $\mathfrak{B}^0 = \langle \omega, \vee, \wedge, \mathrm{C}, 0, 1\rangle$. Всюду далее запись вида $\mathrm{gr}(C)$ (где $C \subseteq \omega$) будет служить сокращением для $\mathrm{gr}_{\mathfrak{B}^0}(C)$.

Построим булеву алгебру $\mathfrak{C} \leqslant \mathfrak{B}^0$ и частичную функцию ψ на ней по шагам. На шаге s будем строить конечную подалгебру $\mathfrak{C}_s = = \langle C_s, \vee, \wedge, \mathrm{C}, 0, 1\rangle \leqslant \mathfrak{B}^0$ и частичную функцию ψ_s, действующую из C_s в C_s так, чтобы $\mathfrak{C}_s \leqslant \mathfrak{C}_{s+1}$ и $\psi_s \subseteq \psi_{s+1}$. Кроме того, будем определять конечное множество E_s, элемент $d(s) \in \mathrm{Atom}(\mathfrak{C}_s)$ и конечную частичную функцию g_s, действующую из ω в $C_s^{<\omega}$ так, чтобы для любого $t \in \mathrm{dom}(g_s)$ значение $g_s(t)$ было кортежем длины p_t.

Ш а г 0. Полагаем $\mathfrak{C}_0 = \mathrm{gr}(\{0,1\})$, $\psi_0 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle\}$, $d(0) = 1$, $g_0 = = E_0 = \varnothing$.

Ш а г $s+1 = 2t+1$. Находим в $\mathfrak{B}^0$ некоторое разбиение $d(s)$ на p_t+1 ненулевых элементов: $a_0, a_1, \ldots, a_{p_t}$. Полагаем

$$\mathfrak{C}_{s+1} = \mathrm{gr}(C_s \cup \{a_0, a_1, \ldots, a_{p_t}\}),$$
$$\psi_{s+1} = \psi_s \cup \{\langle a_i, a_{i+1}\rangle \mid 1 \leqslant i < p_t\} \cup \{\langle a_{p_t}, a_1\rangle\},$$

$$d(s+1) = a_0,\ E_{s+1} = E_s,\ g_{s+1} = g_s \cup \{\langle t, \langle a_1, \ldots, a_{p_t}\rangle\rangle\}.$$

Шаг $s+1 = 2t+2$. Полагаем $d(s+1) = d(s)$ и $g_{s+1} = g_s$. Ищем наименьшее $r \in (D^s \cap \mathrm{dom}(g_s)) \setminus E_s$.

Если такое r нашлось, то рассмотрим $g_s(r) = \langle a_1, \ldots, a_{p_r}\rangle$. Для каждого $1 \leqslant i \leqslant p_r$ находим в $\mathfrak{B}^0$ разбиение a_i на два ненулевых элемента: b_i, c_i. Определим

$$\mathfrak{C}_{s+1} = \mathrm{gr}(C_s \cup \{b_i, c_i \mid 1 \leqslant i \leqslant p_r\}), \quad E_{s+1} = E_s \cup \{r\},$$
$$\psi_{s+1} = \psi_s \cup \{\langle b_i, b_{i+1}\rangle, \langle c_i, c_{i+1}\rangle \mid 1 \leqslant i < p_r\} \cup \{\langle b_{p_r}, b_1\rangle, \langle c_{p_r}, c_1\rangle\}.$$

Если такого r нет, то полагаем $\mathfrak{C}_{s+1} = \mathfrak{C}_s$, $E_{s+1} = E_s$ и $\psi_{s+1} = \psi_s$. Описание конструкции завершено.

Полагаем $\mathfrak{C} = \mathrm{gr}\left(\bigcup\limits_{s\in\omega} C_s\right)$, $\psi = \bigcup\limits_{s\in\omega} \psi_s$. Носитель $\mathfrak{C}$ является в.п. множеством, а $\mathfrak{C}$ — подалгеброй вычислимой булевой алгебры $\mathfrak{B}^0$, поэтому без ограничения общности можно считать, что булева алгебра $\mathfrak{C}$ вычислима. Легко понять, что построенная ψ является частично вычислимой функцией. Заметим, что $\mathrm{Atom}(\mathfrak{C}) \subseteq \mathrm{dom}(\psi)$.

Используя рассуждения, аналогичные рассуждениям из [15, док-во леммы 2.2], можно показать, что $\mathfrak{C} \cong \mathfrak{B}(\omega)$, существует единственный автоморфизм ξ алгебры $\mathfrak{C}$, для которого $\xi \restriction \mathrm{Atom}(\mathfrak{C}) = \psi \restriction \mathrm{Atom}(\mathfrak{C})$; более того, ξ является вычислимым автоморфизмом.

Рассмотрим вычислимую A-алгебру $\mathfrak{C}^* = \langle \mathfrak{C}, \xi\rangle$. Легко показать, что $\chi(\mathfrak{C}^*) = \chi(\mathfrak{B}^*)$ и в $\mathfrak{C}^*$ нет бесконечных атомных орбит. Следовательно, согласно замечанию 1.1, $\mathfrak{C}^* \cong \mathfrak{B}^*$.

Определим вычислимую функцию h следующим образом: для $x \in \omega$ в качестве $h(x)$ выберем первый элемент кортежа $g_{2x+1}(x)$. Заметим, что $h(x) \in \mathrm{Atom}(\mathfrak{C})$ тогда и только тогда, когда $x \notin D$. Следовательно, $D \leqslant_T \leqslant_T \mathrm{Atom}(\mathfrak{C})$.

Пусть $\mathbf{c}$ — тьюрингова степень и $f\colon \mathfrak{C}^* \to \mathfrak{B}^*$ — $\mathbf{c}$-вычислимый изоморфизм A-алгебр. Тогда

$$D \leqslant_T \mathrm{Atom}(\mathfrak{C}) \leqslant_T \mathrm{Atom}(\mathfrak{B}) \oplus f \equiv_T f,$$

откуда $\mathbf{d} \leqslant \mathbf{c}$. Значит, $\mathfrak{B}^*$ не может быть $\mathbf{c}$-вычислимо категоричной ни для какой степени $\mathbf{c} \ngeqslant \mathbf{d}$.

Итак, $\mathbf{d}$ является степенью категоричности $\mathfrak{B}^*$. $\square$

§ 3. Вычислимая категоричность и множество атомов

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть* $\mathbf{d}$ *— в.п. тьюрингова степень. Существует вычислимо категоричная* A*-алгебра* $\mathfrak{B}^* = \langle \mathfrak{B}, \varphi \rangle$*, такая что* $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(\omega)$ *и* $\mathrm{Atom}(\mathfrak{B}) \in \mathbf{d}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем в.п. множество $D \in \mathbf{d}$ и сильно вычислимую последовательность конечных множеств $D^0 \subseteq D^1 \subseteq \ldots$, такую что $\bigcup\limits_{s\in\omega} D^s = D$.

Рассмотрим A-алгебру $\mathfrak{B}^* = \langle \mathfrak{B}, \varphi \rangle$, для которой $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(\omega)$, в $\mathfrak{B}^*$ нет бесконечных атомных орбит и

$$\chi(\mathfrak{B}^*) = \{\langle p_{x+1}, 1\rangle \mid x \notin D\} \cup \{\langle 2p_{x+1}, 1\rangle \mid x \in D\}.$$

Определим функцию $f(x,s)$ следующим образом:

$$f(x,0) = 1,\ \ f(x,s+1) = \begin{cases} p_{x+1}, & \text{если } x \notin D^s, \\ 2p_{x+1}, & \text{если } x \in D^s. \end{cases}$$

Ясно, что функции f и $F_{\chi(\mathfrak{B}^*)}$ удовлетворяют условиям теоремы 1.1, поэтому у $\mathfrak{B}^*$ есть вычислимое представление. Без ограничения общности можно считать, что A-алгебра $\mathfrak{B}^*$ вычислима.

Заметим, что для $b \in \mathfrak{B}$ условие $b \in \mathrm{Atom}(\mathfrak{B})$ выполняется тогда и только тогда, когда $|b|_\varphi = 2^t p_{x+1}$ для некоторых $x \in \omega$, $t \in \{0,1\}$ и имеет место

$$(x \notin D \ \&\ t = 0 \ \&\ \Psi^{\varphi}_{p_{x+1}}(b)) \ \vee\ (x \in D \ \&\ t = 1 \ \&\ \Psi^{\varphi}_{2p_{x+1}}(b)).$$

Следовательно, $\mathrm{Atom}(\mathfrak{B}) \leqslant_T D$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \langle x,y\rangle \notin \chi(\mathfrak{B}^*) \iff\ & y \neq 1 \ \vee\ \neg(\exists t)(\exists z)(t \leqslant 1 \ \&\ x = 2^t p_{z+1}) \\ & \vee\ (\exists t)(\exists z)\Big(t \leqslant 1 \ \&\ x = 2^t p_{z+1} \ \&\ (\exists a \in \mathrm{Atom}(\mathfrak{B}))\Psi^{\varphi}_{2^{1-t}p_{z+1}}(a)\Big), \end{aligned}$$

т. е. $\chi(\mathfrak{B}^*)$ является ко-в.п. относительно $\mathrm{Atom}(\mathfrak{B})$. Вследствие предложения 1.1, $\chi(\mathfrak{B}^*) \leqslant_T \mathrm{Atom}(\mathfrak{B})$. Легко понять, что $D \equiv_T \chi(\mathfrak{B}^*)$, откуда $\mathrm{Atom}(\mathfrak{B}) \equiv_T D$.

Покажем, что $\mathfrak{B}^*$ вычислимо категорична. Пусть $\mathfrak{C}^* = \langle \mathfrak{C}, \psi \rangle$ — вычислимое представление $\mathfrak{B}^*$. Без ограничения общности можно считать, что как для $\mathfrak{B}$, так и для $\mathfrak{C}$ носителем является ω. Построим частичное отображение g, действующее из ω в ω.

Ш а г 0. Полагаем $g_0 = \varnothing$.

Ш а г $s+1$. Ищем наименьшее $t \leqslant s$ с условием

$$(\exists b \leqslant s)\Big(b \notin \mathrm{dom}(g_s)\ \&\ \Big(\mathfrak{B}^* \models \Psi^{\varphi}_{p_{t+1}}(b) \vee \Psi^{\varphi}_{2p_{t+1}}(b)\Big)\Big).$$

Если такие t и b нашлись, то выбираем наименьшее из таких b. Пусть $\mathfrak{B}^* \models \Psi^{\varphi}_l(b)$ для некоторого $l \in \{p_{t+1}, 2p_{t+1}\}$. Ищем наименьшее $c \in \omega \setminus \setminus \mathrm{range}(g_s)$, такое что $\mathfrak{C}^* \models \Psi^{\psi}_l(c)$. Полагаем

$$g_{s+1} = g_s \cup \{\langle \varphi^k(b), \psi^k(c) \rangle \mid 1 \leqslant k \leqslant l\}.$$

Если же таких t и b нет, то полагаем $g_{s+1} = g_s$. Описание конструкции завершено.

Определим g как $\bigcup\limits_{s\in\omega} g_s$. Ясно, что g является частично вычислимой функцией.

Заметим, что $\mathrm{Atom}(\mathfrak{B}) \subseteq \mathrm{dom}(g)$, g — инъективное отображение, а для любого $b \in \mathrm{dom}(g)$ значение $g(\varphi(b))$ определено и равно $\psi(g(b))$. Можно показать, что для любого $b \in \mathrm{dom}(g)$ выполняется в точности один из следующих случаев:

(1) $b \in \mathrm{Atom}(\mathfrak{B})$, $g(b) \in \mathrm{Atom}(\mathfrak{C})$, $|b|_\varphi = |g(b)|_\psi = p_{t+1}$ для некоторого $t \notin D$;

(2) $b \in \mathrm{Atom}(\mathfrak{B})$, $g(b) \in \mathrm{Atom}(\mathfrak{C})$, $|b|_\varphi = |g(b)|_\psi = 2p_{t+1}$ для некоторого $t \in D$;

(3) существует $b_0 \in \mathrm{Atom}(\mathfrak{B})$, такое что $g(b_0) \in \mathrm{Atom}(\mathfrak{C})$, $|b_0|_\varphi = = |g(b_0)|_\psi = 2p_{t+1}$, $b = b_0 \vee \varphi^{p_{t+1}}(b_0)$ и $g(b) = g(b_0) \vee \psi^{p_{t+1}}(g(b_0))$ для некоторого $t \in D$.

Следовательно, $g \restriction \mathrm{Atom}(\mathfrak{B})$ является биекцией $\mathrm{Atom}(\mathfrak{B})$ на $\mathrm{Atom}(\mathfrak{C})$, и для любых $b_0, b_1 \in \mathrm{dom}(g)$ соотношение $b_0 \leqslant_{\mathfrak{B}} b_1$ выполняется тогда и только тогда, когда $g(b_0) \leqslant_{\mathfrak{C}} g(b_1)$.

Отображение g можно расширить до вычислимого изоморфизма A-алгебр $h\colon \mathfrak{B}^* \to \mathfrak{C}^*$ аналогично тому, как производилось расширение до $\mathbf{d}$-вычислимого изоморфизма в доказательстве предложения 2.1. □

ТЕОРЕМА 3.2. *Существует вычислимая A-алгебра $\mathfrak{B}^* = \langle \mathfrak{B}, \varphi \rangle$, такая что $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(\omega)$, $\mathfrak{B}^*$ не вычислимо категорична и $\mathrm{Atom}(\mathfrak{C}) \in \mathbf{0}'$ для любого вычислимого представления $\mathfrak{C}^* = \langle \mathfrak{C}, \psi \rangle \cong \mathfrak{B}^*$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем в. п. множество $K \in \mathbf{0}'$. Рассмотрим A-алгебру $\mathfrak{B}^* = \langle \mathfrak{B}, \varphi \rangle$, для которой $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(\omega)$, в $\mathfrak{B}^*$ нет бесконечных атомных орбит и

$$\chi(\mathfrak{B}^*) = \{\langle p_{x+1}, 1\rangle \mid x \notin K\} \cup \{\langle 2p_{x+1}, 1\rangle \mid x \in K\} \cup \{\langle 2, y+1\rangle \mid y \in \omega\}.$$

Используя теорему 1.1, легко показать, что у $\mathfrak{B}^*$ есть вычислимое представление.

Пусть $\mathfrak{C}^* = \langle \mathfrak{C}, \psi \rangle$ — вычислимое представление $\mathfrak{B}^*$. Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям из доказательства теоремы 3.1, можно показать, что $K \equiv_T \chi(\mathfrak{B}^*) = \chi(\mathfrak{C}^*) \leqslant_T \mathrm{Atom}(\mathfrak{C})$, откуда $\mathrm{Atom}(\mathfrak{C}) \equiv_T K$.

Для завершения доказательства остаётся сослаться на [14, лемма 5], где утверждается: если для вычислимой A-алгебры $\mathfrak{B}^* = \langle \mathfrak{B}, \varphi \rangle$ (такой что $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(\omega)$), не содержащей бесконечных атомных орбит, найдётся $n \geqslant 1$, для которого $\mathfrak{B}^*$ содержит бесконечно много атомных орбит мощности n, то $\mathfrak{B}^*$ не является вычислимо категоричной. □

В заключение авторы выражают благодарность С. С. Гончарову за постановку задачи, постоянное внимание к работе и поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Fröhlich, J. Shepherdson*, Effective procedures in field theory, Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, **248**, No. 950 (1956), 407—432.
2. *А. И. Мальцев*, Конструктивные алгебры. 1, УМН, **16**, № 3 (1961), 3—60.

3. *S. S. Goncharov, V. S. Harizanov, J. F. Knight, C. McCoy, R. Miller, R. Solomon*, Enumerations in computable structure theory, Ann. Pure Appl. Logic, **136**, No. 3 (2005), 219—246.
4. *J. Chisholm, E. B. Fokina, S. S. Goncharov, V. S. Harizanov, J. F. Knight, S. Quinn*, Intrinsic bounds on complexity and definability at limit levels, J. Symb. Log., **74**, No. 3 (2009), 1047—1060.
5. *E. B. Fokina, I. Kalimullin, R. Miller*, Degrees of categoricity of computable structures, Arch. Math. Logic, **49**, No. 1 (2010), 51—67.
6. *B. F. Csima, J. N. Y. Franklin, R. A. Shore*, Degrees of categoricity and the hyperarithmetic hierarchy, Notre Dame J. Formal Logic, **54**, No. 2 (2013), 215—231.
7. *С. С. Гончаров, В. Д. Дзгоев*, Автоустойчивость моделей, Алгебра и логика, **19**, № 1 (1980) 45—58.
8. *J. B. Remmel*, Recursive isomorphism types of recursive Boolean algebras, J. Symb. Log., **46**, No. 3 (1981), 572—594.
9. *C. McCoy*, Δ_2^0-categoricity in Boolean algebras and linear orderings, Ann. Pure Appl. Logic, **119**, Nos. 1–3 (2003), 85—120.
10. *Ч. Ф. Д. Мак-Кой*, О Δ_3^0-категоричности для линейных порядков и булевых алгебр, Алгебра и логика, **41**, № 5 (2002), 531—552.
11. *K. Harris*, Categoricity in Boolean algebras, to appear.
12. *П. Е. Алаев*, Автоустойчивые I-алгебры, Алгебра и логика, **43**, № 5 (2004), 511—550.
13. *Н. А. Баженов*, О Δ_2^0-категоричности булевых алгебр, Вестник НГУ, Сер. матем., мех., информ., принято к печати.
14. *Р. Р. Тухбатуллина*, Автоустойчивость булевой алгебры $\mathfrak{B}_\omega$, обогащенной автоморфизмом, Вестник НГУ. Сер. матем., мех., информ., **10**, № 3 (2010), 110—118.
15. *Н. А. Баженов, Р. Р. Тухбатуллина*, Конструктивизируемость булевой алгебры $\mathfrak{B}(\omega)$ с выделенным автоморфизмом, Алгебра и логика, **51**, № 5 (2012), 579—607.
16. *С. С. Гончаров*, Счетные булевы алгебры и разрешимость (Сибирская школа алгебры и логики), Новосибирск, Научная книга (НИИ МИОО НГУ), 1996.

17. *С. С. Гончаров, Ю. Л. Ершов*, Конструктивные модели (Сибирская школа алгебры и логики), Новосибирск, Научная книга, 1999.

18. *C. J. Ash, J. F. Knight*, Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy (Stud. Logic Found. Math., **144**), Amsterdam etc., Elsevier Sci. B.V., 2000.

Поступило 24 июля 2012 г.

Адреса авторов:

БАЖЕНОВ Николай Алексеевич, Новосибирский гос. ун-т, ул. Пирогова, 2, г. Новосибирск, 630090, РОССИЯ. e-mail: nickbazh@yandex.ru

ТУХБАТУЛЛИНА Регина Расимовна, CERGE–EI, a joint workplace of Charles Univ. and Economics Inst. Acad. Sci. Czech Repub., Politických vězňů, 7, 11121 Prague, CZECH REPUBLIC. e-mail: regina88@bk.ru