А. П. Осколков, Замечание об оценке постоянной Гельдера для некоторых неравномерно эллиптических квазилинейных уравнений, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1968, том 7, 178–183

А.П.Осколков

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОЦЕНКЕ ПОСТОЯННОЙ ГЕЛЬДЕРА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕРАВНОМЕРНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим в n -мерной ограниченной области Ω квазилинейное уравнение

$$\frac{dA_i}{dx_i}(x,u,u_x)+A(x,u,u_x)=0 \qquad (1)$$

и предположим, что коэффициенты $A_i(x,u,u_x)$, $i=1,\ldots,n$, непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам и удовлетворяют следующим условиям:

$$\nu(|u|)|\nabla u|^m \leq A_i(x,u,u_x)u_{x_i}, \qquad (2)$$

$$\sum |A_i| \leq \mu(|u|)(1+|\nabla u|)^{m-1+\alpha}, \qquad (3)$$

а коэффициент $A(x,u,u_x)$ удовлетворяет условию

$$|A| \leq \mu(|u|)(1+|\nabla u|)^m, \qquad (4)$$

причем $\nu(t)$ и $\mu(t)$, $t \geq 0$, - соответственно невозрастающая и неубывающая положительные функции, а показатели α и m удовлетворяют таким условиям:

$$n-1 < m < n, \quad 0 < \alpha < \frac{n-m}{n}. \tag{5}$$

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема I. Пусть $u(x)$ - решение уравнения (I)-(5) из класса $C^{(2)}(\Omega)$ и пусть для него априори известен $\max_{\Omega}|u(x)| \equiv M[u]$. Тогда в произвольной строго внутренней подобласти $\Omega' \subset \Omega$ постоянная Гельдера решения $u(x)$:

$$|u|_{(\lambda),\Omega'} \equiv \max_{x,x'\in\Omega'} \frac{|u(x)-u(x')|}{|x-x'|^{\lambda}} \tag{6}$$

с некоторым показателем $0 < \lambda < 1$ оценивается только через $M[u]$, постоянные $\nu(M)$, $\mu(M)$, m, n, α из условий (2)-(5), $\mathrm{mes}\,\Omega'$ и расстояние от Ω' до границы области Ω. Показатель Гельдера λ определяется только постоянными n, m, α.

Замечание. Для равномерно эллиптических уравнений (I)-(4), т.е. при $\alpha = 0$, теорема I при любых $1 < m \leq n$, недифференцируемых $A_i(x,u,u_x)$ и для произвольных ограниченных обобщенных решений из $W_m^{(1)}(\Omega)$ доказана в известных работах О.А.Ладыженской и Н.Н.Уральцевой ([I], гл. IV, § I).

Переходя к доказательству теоремы I, введем следующие обозначения: пусть $K_r(x_0)$ – шар радиуса r с центром в точке $x_0 \in \Omega$, $S_r(x_0)$ – граница шара $K_r(x_0)$ и пусть $A_{k,r}(x_0) = \{x \in K_r(x_0),\ u(x) > k\}$, $B_{k,r}(x_0) = \{x \in K_r(x_0), u(x) < k\}$.

Будем говорить, следуя С.Ф.Морозову и В.И.Плотникову [2], что функция $v(x) \in W_s^{(1)}(\Omega)$ принадлежит классу $H_s(\Omega'', M, \gamma, \beta, \infty)$, $1 < s \leq n$, $0 < \beta < 1$, в произвольной строго внутренней подобласти Ω'' области Ω, если $\operatorname{vrai\,max}_{\Omega} |v(x)| < M$ и для любого шара $K_r(x_0)$, $x_0 \in \bar{\Omega}''$, лежащего вместе с шаром $K_{2r}(x_0)$ внутри Ω, выполняются неравенства:

$$\int_{K_r(x_0)} |\nabla v|^s dx \leq \gamma r^{\beta}; \tag{7}$$

$$\int_{A_{k,r}(x_0)} |\nabla v|^s dx \leq \gamma \operatorname{mes} A_{k,r} \tag{8}$$

для $k \geq k_1 \equiv \operatorname{vrai\,max}_{S_r(x_0)} v(x)$;

$$\int_{B_{k,r}(x_0)} |\nabla v|^s dx \leq \gamma \operatorname{mes} B_{k,r} \tag{9}$$

для $k \leq k_2 \equiv \operatorname{vrai\,min}_{S_r(x_0)} v(x)$.

С.Ф.Морозов и В.И.Плотников показали [2], что для функций из класса $H_s(\Omega'', M, \gamma, \beta, \infty)$ при $n-1<s\le n$ справедливо следующее предложение.

<u>Лемма I</u>. Пусть $v(x)$ - произвольная функция из класса $H_s(\Omega'', M, \gamma, \beta, \infty)$ и пусть $n-1<s\le n$. Тогда функция $v(x)$ непрерывна по Гельдеру с некоторым показателем $0<\lambda<1$ в произвольной строго внутренней подобласти $\Omega' \subset \Omega''$, причем постоянная Гельдера $|v|_{(\lambda),\Omega'}$ оценивается только через постоянные M, γ, β, n, s и расстояние от Ω' до границы подобласти Ω'', а показатель Гельдера λ зависит лишь от β, s и n.

Покажем, что решение $u(x)$ уравнения (I)-(5) из класса $C^{(2)}(\Omega)$ принадлежит классу $H_m(\Omega'', M[u], \gamma, n-\frac{m}{1-\alpha}, \infty)$ в произвольной строго внутренней подобласти $\Omega''\subset\Omega$, причем постоянная γ зависит только от $M[u]$, постоянных $\nu(M)$, $\mu(M), m, n, \alpha, \operatorname{mes}\Omega''$ и расстояния от Ω'' до границы области Ω. Тогда теорема I будет сразу следовать из леммы I.

Пусть $\zeta(x)$ - срезающая функция для шара $K_{2r}(x_0)\subset\Omega$, $x_0 \in \bar\Omega''$, определенная следующим образом:

$$\zeta(x)=\begin{cases} 1, & |x-x_0|\le r, \\ 0\le\zeta\le 1, & r\le|x-x_0|\le 2r, \\ 0, & |x-x_0|\ge 2r, \end{cases} \tag{IO}$$

$$|\nabla\zeta| < C_1 \frac{\zeta^\alpha}{r}, \qquad 0 < \alpha < \frac{n-m}{n} < 1 \tag{II}$$

(о построении такой функции см. [3] , § I). Умножим уравнение (I) на функцию $\zeta^m e^{\lambda u(x)}$, $\lambda > 0$, и проинтегрируем по шару $K_{2r}(x_0)$. Интегрируя по частям в первом члене, используя условия (2)-(5) и свойства (I0)-(II) срезающей функции $\zeta(x)$, применяя неравенства Гельдера и Юнга и выбирая λ достаточно большим, мы получим следующее неравенство (ср. [I], гл. IV , § I):

$$\int_{K_r(x_0)} |\nabla u|^m dx \le \gamma r^{n-\frac{m}{1-\alpha}}, \tag{I2}$$

причем постоянная γ зависит только от тех величин, которые были перечислены выше.

Возьмем , далее, шар $K_r(x_0) \subset \Omega$, $x_0 \in \bar{\Omega}''$, и пусть $k \ge k_1 \equiv \max\limits_{S_r(x_0)} u(x)$. Умножим уравнение (I) на функцию $\max\{u(x)-k; 0\} e^{\lambda u(x)}$, $\lambda > 0$ и проинтегрируем по шару $K_r(x_0)$. Интегрируя по частям в первом члене, используя условия (2),(4) и выбирая λ снова достаточно большим, мы получим следующее неравенство:

$$\int_{A_{k,r}(x_0)} |\nabla u|^m dx \le \gamma \operatorname{mes} A_{k,r}, \tag{I3}$$

причем γ снова зависит только от перечисленных выше величин, исключая расстояние от Ω'' до границы области Ω .

Аналогичные неравенства получаются и для множеств $B_{k,r}(x_0)$, $x_0 \in \bar{\Omega}''$, $k \leq k_2 \equiv \min\limits_{S_r(x_0)} u(x)$. Тем самым теорема I доказана.

Литература

I. О.А.Ладыженская и Н.Н.Уральцева. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., Физматгиз,1964.

2. С.Ф.Морозов, В.И.Плотников. О свойствах непрерывности по Гельдеру обобщенных решений многомерных вариационных задач. Матем. сб., 1966, 71, 4, 586-597.

3. А.П.Осколков. Априорные оценки первых производных решений задачи Дирихле для неравномерно эллиптических квазилинейных уравнений. Труды Матем. ин-та им.В.А. Стеклова, 1967, т.102, 105-127.