Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

И. И. Ерёмин, С. В. Пацко, Фейеровские процессы для бесконечных систем выпуклых неравенств,
Тр. ИММ УрО РАН, 2002, том 8, номер 1, 45–65

https://www.mathnet.ru/timm288

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.82
11 декабря 2025 г., 00:19:31

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 8 № 1 2002

УДК 519.6

ФЕЙЕРОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ВЫПУКЛЫХ НЕРАВЕНСТВ[1]

И. И. Еремин, С. В. Пацко

Статья посвящена аппарату фейеровских отображений, применяемому к построению итерационных процедур решения бесконечных (в том числе континуальных) систем выпуклых неравенств над пространством $\mathbb{R}^n$.

1. Введение

Первоначальными источниками фейеровских методов послужили работы Моцкина [1] и Агмона [2]. В 60-х годах Ереминым была опубликована серия работ, развивающих это направление [3–6]. В этих работах были даны базовые конструкции фейеровских отображений по отношению к конечным системам выпуклых (в частности, линейных) неравенств, а также к задачам линейного и выпуклого программирования. Базовые конструкции реализованы в формах *последовательной релаксации, взвешенной релаксации* и *экстремальной релаксации.* Применительно к конечной системе выпуклых неравенств

$$f_i(x) \le 0, \qquad i = 1, \dots, m \tag{1.1}$$

с множеством решений $M \neq \emptyset$ указанные реализации выглядят следующим образом. Пусть

$$\varphi_i(x) := \left\{ x - \lambda_i \frac{f_i^+(x)}{\|h_i\|^2} \cdot h_i \mid h_i \in \partial f_i(x) \right\}, \tag{1.2}$$

$\lambda_i \in (0,2)$, $f_i^+(x) = \max\{f_i(x), 0\}$, $\partial f_i(x)$ — субдифференциал функции $f(x)$ в точке x (т.е. совокупность $h \in \mathbb{R}^n$ таких, что $(h, y-x) \le f(y) - f(x)$, $\forall\, y \in \mathbb{R}^n$). Отображение (1.2) является, вообще говоря, многозначным. Образуем отображения:

$$\varphi^{(1)}(x) = \varphi_1(\varphi_2(\dots(\varphi_m(x))\dots)) \tag{1.3}$$

— последовательная релаксация;

$$\varphi^{(2)}(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi_i(x), \qquad \alpha_i > 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \tag{1.4}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, коды проектов 00-15-96041, 01-01-00563.

— взвешенная релаксация;

$$\varphi^{(3)}(x) = \left\{ x - \lambda \frac{d^+(x)}{\|h\|^2} \cdot h \mid h \in \partial f_i(x), \quad i \in J(x) \right\} \tag{1.5}$$

— экстремальная релаксация; здесь $\lambda \in (0,2)$, $d(x) := \max\limits_{(i)} f_i(x)$, $J(x) = \{i \mid d(x) = f_i(x)\}$. Суперпозиция двух произвольных многозначных отображений $\varphi : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ и $\psi : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ понимается как отображение $x \longrightarrow \bigcup\limits_{y \in \psi(x)} \varphi(y)$.

Каждое из отображений (1.3)–(1.5) является M-фейеровским и реализует соответствующую базовую конструкцию. Последовательности, индуктивно порождаемые ими, сходятся к тому или иному решению выписанной системы (1.1) (при произвольном начальном $x_0 \in \mathbb{R}^n$).

Частные реализации фейеровских методов, основанные на конструкциях фейеровских отображений (1.3) и (1.4), применительно к счетным системам выпуклых неравенств были рассмотрены в работах [6, теорема 3.2.7, стр. 114] и [7].

В данной работе строятся и обосновываются фейеровские методы для бесконечных систем выпуклых неравенств счетной и континуальной мощности, при этом в основу берется конструкция *экстремальной релаксации* типа (1.5). Предлагается метод синтеза фейеровского отображения из совокупности частичных отображений, области значений которых лежат в разных пространствах, а их аргументы связаны между собой. Этот метод позволяет решать декомпозиционные вопросы при решении задач оптимизации, редуцируемых к системам линейных (или выпуклых) неравенств. Предположений дифференцируемости функций, формирующих рассматриваемые системы неравенств, в работе нет. В этом смысле изучаемые здесь релаксационные методы относятся к области негладкого анализа задач математического программирования.

2. Фейеровские отображения: основные понятия и свойства

Ниже приводятся основные определения и свойства, касающиеся фейеровских отображений и фейеровских последовательностей [3]. При этом затрагиваются только те свойства, которые необходимы для обоснования сходимости рассматриваемых здесь фейеровских процессов.

Определение 2.1. Отображение $\varphi \in \{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$ называется *M-фейеровским*, если

$$\varphi(y) = y, \qquad \|\varphi(x) - y\| < \|x - y\|, \qquad \forall\, y \in M, \qquad \forall\, x \notin M.$$

Как видно из определения, основной особенностью фейеровского отображения является то, что такое отображение переводит точку, не лежащую в множестве M, в другую точку таким образом, что расстояние от нее до каждой точки множества M уменьшается.

Определение 2.2. Многозначное отображение $\varphi \in \{\mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}\}$ называется *M-фейеровским*, если

$$\varphi(y) = y, \qquad \|z - y\| < \|x - y\|, \qquad \forall\, y \in M, \qquad \forall\, x \notin M, \qquad \forall\, z \in \varphi(x).$$

Согласно определению, точки множества M и только они являются неподвижными точками отображения φ.

Класс M-фейеровских отображений (как однозначных, так и многозначных) обозначим через F_M.

Свойство 2.1. *Если $F_M \neq \emptyset$, то M автоматически является выпуклым и замкнутым* (см., например, [5, свойство 39.4]).

Определение 2.3. Последовательность $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{x_k\} \cap M = \emptyset$ называется *M-фейеровской*, если для любого $y \in M$:

$$\|x_{k+1} - y\| < \|x_k - y\|, \quad \forall k.$$

Приведем несколько простых фактов, которые используются в дальнейшем. Доказательство этих утверждений можно найти в работе [3, глава II]. Пусть $\{x_k\}'$ — множество предельных точек последовательности $\{x_k\}$.

Лемма 2.1. *Пусть $\varphi \in F_M$ и последовательность $\{x_k\}$ рекуррентно порождена соотношением $x_{k+1} \in \varphi(x_k)$ при произвольном начальном x_0. Если $\{x_k\} \cap M = \emptyset$, то $\{x_k\}$ — M-фейеровская.*

Лемма 2.2. *Если x', x'' — две различные предельные точки M-фейеровской последовательности $\{x_k\}$, то любая точка $y \in M$, следовательно, и само множество M, лежат в гиперплоскости, являющейся геометрическим местом точек, равноудаленных от x' и x''.*

Доказательство. Из определения M-фейеровской последовательности следует, что $\forall y \in M : \inf\limits_{(k)} \|x_k - y\| = \|x' - y\| = \|x'' - y\|$, т.е. $(x' - y, x' - y) = (x'' - y, x'' - y)$. Преобразование этого равенства дает $(x'' - x', y) = \|x''\|^2 - \|x'\|^2$, т.е. все точки $y \in M$ принадлежат гиперплоскости $(x'' - x', x) = \gamma := \|x''\|^2 - \|x'\|^2$, полученной как геометрическое место точек, равноудаленных от x' и x''.

Следствие 2.1. *Если $\varphi \in F_M$ и M - множество телесное, то*

$$\{\varphi^k(x_0)\}_k \to x' \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма 2.3. *Если $\{x_k\}$ — M-фейеровская последовательность и $(\{x_k\}' \cap M) \neq \emptyset$, то $\{x_k\} \to x' \in M$.*

Доказательство. Предполагая противное, т.е. существование предельной точки $x'' \neq x'$, с помощью леммы 2.2 приходим к выводу, что все точки $y \in M$ равноудалены от x' и x''. Поэтому, взяв $y := x'$, получим противоречие.

Лемма 2.4. *Отображение $\mathrm{Pr}_M(x)$, осуществляющее проектирование точки x на выпуклое замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^n$, является непрерывным M-фейеровским.*

Доказательство: см. [5, лемма 40.2].

Определение 2.4. Отображение $\varphi \in \{\mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}\}$ называется *замкнутым*, если из того, что $\{x_k\} \to x'$, $\{y_k\} \to y'$, $y_k \in \varphi(x_k)$, $\forall k$, следует $y' \in \varphi(x')$.

Класс замкнутых M-фейеровских отображений обозначим $\overline{F}_M$.

Приведем пример M-фейеровского отображения, играющего базовую роль в характеризации всего множества фейеровских отображений и построении релаксационных методов решения систем выпуклых неравенств конечной, счетной и континуальной мощности.

Если $f(\cdot)$ — выпуклая на $\mathbb{R}^n$ функция, то под $\partial f(x)$ понимается субдифференциал функции $f(\cdot)$ в точке x, т.е. множество $h \in \mathbb{R}^n$ таких, что $(h, y - x) \leq f(y) - f(x)$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$. Известно, что $\partial f(x)$ является множеством непустым, выпуклым и ограниченным.

Для выпуклой функции $f(x)$ с $M := \{f(x) \leq 0\} \neq \emptyset$ определим отображение

$$\varphi(x) = \left\{ x - \lambda \frac{f^+(x)}{|h|^2} \cdot h \,|\, h \in \partial f(x) \right\} \quad \textit{для } f^+(x) > 0 \quad \textit{и} \quad \varphi(x) = x \quad \textit{для } f^+(x) = 0. \tag{2.1}$$

Заметим, что если $f(\overline{x}) > 0$, $h \in \partial f(\overline{x})$, то $h \neq 0$. Действительно, если бы было $h = 0$, то из неравенства $(h, x - \overline{x}) \leq f(x) - f(\overline{x})$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ следовало бы $f(\overline{x}) \leq f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, т.е. $f(\overline{x}) > 0$ — значение абсолютного минимума функции $f(x)$, между тем $M = \{f(x) \leq 0\} \neq \emptyset$. Получилось противоречие.

Нам понадобится простая

Лемма 2.5. *Пусть $f(x)$ — выпуклая функция и S — ограниченное множество. Тогда множество $\{\partial f(x) \mid x \in S\}$ $(= \bigcup\limits_{x \in S} \partial f(x))$ ограничено.*

Доказательство. Пусть $h_x \in \partial f(x)$, что влечет $(h_x, z - x) \leq f(z) - f(x)$, $\forall z \in \mathbb{R}^n$. Положим $z = x + \dfrac{h_x}{|h_x|}$, при этом нулевые h_x мы исключаем (что, естественно, не несет ущербности нашему доказательству). Тогда из выписанного неравенства получается $|h_x| = (h_x, \dfrac{h_x}{|h_x|}) \leq f(x + \dfrac{h_x}{|h_x|}) - f(x)$. Поскольку $f(x)$ непрерывна, то в силу ограниченности аргументов функции $f(\cdot)$ в правой части последнего неравенства будет ограничена на S и сама правая часть, т.е.

$$\sup\{|h_x| \mid h_x \in \partial f(x), \quad x \in S\} < +\infty.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Отображение* (2.1) *является замкнутым M-фейеровским при $M = \{f(x) \leq 0\} \neq \emptyset$.*

Доказательство. Если $x \in M$, т.е. $f^+(x) = 0$, то $\varphi(x) = x$ в силу (2.1). Отметим, что если бы в (2.1) h из $\partial f(x)$ было нулевым, то это бы порождало выполнимость неравенства $f(x) \leq 0$ (см. замечание после (2.1)).

Пусть теперь $y \in M$ и $x \notin M$. Для фейеровости $\varphi(x)$ нужно доказать строгое неравенство (для упрощения выкладок считаем φ однозначным)

$$|z - y| < |x - y|, \qquad \forall z \in \varphi(x). \tag{2.2}$$

Действительно (h зависит от z),

$$|z - y|^2 = (x - \lambda \frac{f(x)}{|h|^2} \cdot h - y,\ x - \lambda \frac{f(x)}{|h|^2} \cdot h - y) =$$

$$= |x-y|^2 + 2\lambda \frac{f(x)}{|h|^2}(h, y-x) + \lambda^2 \frac{f^2(x)}{|h|^2} \le |x-y|^2 + 2\lambda \frac{f(x)}{|h|^2}[f(y)-f(x)] + \lambda^2 \frac{f^2(x)}{|h|^2} =$$

$$= |x-y|^2 - \lambda(2-\lambda)\frac{f^2(x)}{|h|^2} + 2\lambda \frac{f(x)\cdot f(y)}{|h|^2} \le |x-y|^2 - \lambda(2-\lambda)\frac{f^2(x)}{|h|^2} < |x-y|^2.$$

Итак, неравенство (2.2) доказано.

Теперь требуется доказать замкнутость отображения (2.1). Пусть $\{x_k\} \to x'$, $\{y_k\} \to y'$, при этом

$$y_k = x_k - \lambda \frac{f^+(x_k)}{|h_k|^2} \cdot h_k, \tag{2.3}$$

$h_k \in \partial f(x_k)$. Нужно доказать $y' \in \varphi(x')$, т.е.

$$y' = x' - \lambda \frac{f^+(x')}{|h'|^2} \cdot h', \tag{2.4}$$

где $h' \in \partial f(x')$. Соотношения (2.3) и (2.4) мы, согласно (2.1), понимаем как $y_k = x_k$ при $f(x_k) \le 0$ — в первом случае, и $y' = x'$ при $f(x') \le 0$ — во втором. Перейдем к доказательству (2.4). Рассмотрим случай, когда в последовательности $\{x_k\}$ есть подпоследовательность $\{x_{i_k}\}$ такая, что $f(x_{i_k}) \le 0$, $\forall k$. Как уже было сказано, это означает $y_{i_k} = x_{i_k}$, $\forall k$, что вместе с $f(x') \le 0$ дает $y' = x' = \varphi(x')$, т.е. $y' \in \varphi(x')$. Следовательно, можно считать $f(x_k) > 0$, $\forall k > \overline{k}$. В этом случае для $k > \overline{k}$: $h_k \ne 0$, h_k — из (2.3) (см. замечание после формулы (2.1)).

Далее, так как множество $\{h_k\}$, согласно лемме 2.5, ограничено, то, используя прием перехода к подпоследовательностям в (2.3), можно считать последовательность $\{h_k\}$ также сходящейся, пусть к h'. При $h' \ne 0$ соотношение (2.4) получается из (2.3) путем предельного перехода, а включение $h' \in \partial f(x')$ — путем предельного перехода по k в неравенстве $(h_k, x - x_k) \le f(x) - f(x_k)$, выполняющегося для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Последнее верно и при $h' = 0$, при этом, в силу $h' = 0 \in \partial f(x')$, получаем $f(x') = 0$. При альтернативе $h' = 0$ предельный переход в (2.3) также возможен. Действительно, из неравенства $(h_k, x' - x_k) \le f(x') - f(x_k)$ очевидным образом получается соотношение

$$\frac{f(x_k)}{|h_k|} \le \left|\left(\frac{h_k}{|h_k|}, x' - x_k\right)\right| \to 0, \qquad k \to +\infty,$$

т.е. второе слагаемое в (2.3) стремится к нулю, а потому равенство (2.4) превращается в $y' = x'$. Поскольку $\varphi(x') = x'$, то необходимое включение $y' \in \varphi(x')$ выполняется.
Лемма полностью доказана.

Следствие 2.2. *Пусть последовательность $\{x_k\}$ задана (при произвольном начальном $x_0 \in \mathbf{R}^n$) рекуррентным соотношением*

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \frac{f^+(x_k)}{|h_k|^2} \cdot h_k, \tag{2.5}$$

где $\lambda_k \in [\delta, 2-\delta]$, $\delta > 0$, $h_k \in \partial f(x_k)$. Если $\{x_k\} \cap M = \emptyset$, то $\{x_k\}$ — M-фейеровская последовательность.

В (2.5), в отличие от (2.3), коэффициент релаксации λ_k является переменным, однако равномерно отделен как от нуля, так и от 2.

Если $f(x)$ — дифференцируемая функция, то соотношение (2.1) примет вид

$$\varphi(x) = x - \lambda \frac{f^+(x)}{|\nabla f(x)|^2} \cdot \nabla f(x). \tag{2.6}$$

В случае линейности $f(x)$, т.е. $f(x) = (a, x) - \alpha$, $|a| \neq 0$, соотношение (2.6) переходит в

$$\varphi(x) = x - \lambda \frac{[(a, x) - \alpha]^+}{|a|^2} \cdot a. \tag{2.7}$$

Лемма 2.7. *Если отображение $\varphi \in F_M$ является замкнутым, то последовательность $\{x_k\}$, порожденная рекуррентно включением $x_{k+1} \in \varphi(x_k)$ при произвольном $x_0 \in \mathbb{R}^n$, сходится к $x' \in M$.*

Доказательство. Если $\{x_k\} \cap M \neq \emptyset$, то заключение леммы следует из определения M-фейеровского отображения.

В случае $\{x_k\} \cap M = \emptyset$ покажем, что M-фейеровская последовательность $\{x_k\}$ сходится к элементу $x' \in M$. Так как последовательность $\{x_k\}$ ограничена, выделим подпоследовательность $\{x_{k_j}\} \to x'$ так, что $\{x_{k_j+1}\} \to x''$. Точки x', x'', очевидно, являются предельными точками последовательности x_k, поэтому, если $x' \in M$, то, согласно лемме 2.3, $x_k \to x'$.

Если же $x' \notin M$, то в силу замкнутости φ имеем $x'' \in \varphi(x')$, т.е. $\forall y \in M : |x'' - y| < |x' - y|$, что противоречит равноудаленности точек множества M до x', x'' (лемма (2.2)).
Лемма доказана.

Для дальнейшего заметим, что если $T \subset \mathbb{R}^n$ и $\varphi \in \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$, то под $\varphi(T)$ понимают множество $\bigcup\limits_{x \in T} \varphi(x)$.

Теорема 2.1. *Если $\varphi_j(x) \in \overline{F}_{M_j}$, $j = 1, \ldots, m$, и $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$, $\alpha_j > 0$, то*

1) $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j \varphi_j(x) \in \overline{F}_{\bigcap_{j=1}^{m} M_j}$,

2) $\varphi_1(\ldots(\varphi_m(x)\ldots) \in \overline{F}_{\bigcap_{j=1}^{m} M_j}$.

Доказательство. Доказательство фейеровости построенных отображений элементарно. Установим их замкнутость.

1) Обозначим $\varphi(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j \varphi_j(x)$. Рассмотрим $\{x_k\} \to x'$, $\{y_k\} \to y'$, $y_k \in \varphi(x_k)$, т.е. $y_k = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j y_k^j$, $y_k^j \in \varphi_j(x_k)$. Учитывая ограниченность последовательностей $\{y_k^j\}$ $\forall j$, выделим подпоследовательность $y_{k_l}^j$ так, что $\forall j : y_{k_l}^j \to \bar{y}^j$, $y_{k_l}^j \in \varphi_j(x_{k_l})$. Имеем $y_{k_l} = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j y_{k_l}^j$. Переходя

к пределу при $l \to \infty$, получаем, что $y' = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \bar{y}^j$, что, с учетом указанной ранее замкнутости $\varphi_j(x)$, означает $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \bar{y}^j \in \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \varphi_j(x')$, т.е. $y' \in \varphi(x')$.

2) Достаточно проверить справедливость утверждения для $m = 2$. Пусть $\{x_k\} \to x'$, $\{y_k\} \to y'$, $y_k \in \varphi_1(\varphi_2(x_k))$. Покажем $y' \in \varphi_1(\varphi_2(x'))$. Включение $y_k \in \varphi_1(\varphi_2(x_k))$ можно представить в виде $y_k \in \varphi_1(y_k^1)$, $y_k^1 \in \varphi_2(x_k)$, при этом в силу леммы 2.7 можно считать $y_k^1 \to y^1$ и $y^1 \in \varphi_2(x')$, а потому $y' \in \varphi_1(y^1) \in \varphi_1(\varphi_2(x'))$.
Теорема 2.1 доказана.

Следствие 2.3. *Если $\varphi(x) \in \overline{F}_M$, N — выпуклое замкнутое множество из $\mathbb{R}^n$, $M \cap N \neq \emptyset$, то* $\mathrm{Pr}_N(\varphi(x)) = \bigcup_{y \in \varphi(x)} \mathrm{Pr}_N(y) \in \overline{F}_{M \cap N}$.

Следует из леммы 2.4 и теоремы 2.1.

Приведем пример M-фейеровского отображения, когда M задано системой выпуклых неравенств

$$f_j(x) \leq 0, \qquad j = 1, \ldots, m, \qquad x \in S; \tag{2.8}$$

здесь $\{f_j(x)\}_1^m$ — выпуклые на $\mathbb{R}^n$ функции, S — выпуклое замкнутое множество. Введем функцию невязки $f(x) := \max_{(j)} f_j(x) = f_{j_x}(x)$, т.е. j_x таково, что $f(x) = f_{j_x}(x)$. Система (2.8) может быть записана в эквивалентном виде:

$$f(x) \leq 0, \qquad x \in S. \tag{2.9}$$

Пусть $J(x) := \{j \mid f(x) = f_j(x)\}$, $\lambda \in (0, 2)$. Построим отображения:

$$\varphi(x) = \left\{ x - \lambda \frac{f^+(x)}{|h|^2} \cdot h \mid h \in \partial f_{j_x}(x), \quad j_x \in J(x) \right\}, \tag{2.10}$$

$$\psi(x) = \mathrm{Pr}_S\, \varphi(x). \tag{2.11}$$

Пусть $M = \{j \mid f_j(x) \leq 0,\ j = 1, \ldots, m\}$, $\widetilde{M} := M \cap S \neq \emptyset$.

Теорема 2.2. *Отображение $\psi(x)$ является $\widetilde{M}$-фейеровским и замкнутым.*

Вытекает из леммы 2.4, 2.6 и теоремы 2.1.

Следствие 2.4. *Если выполнены условия теоремы 2.2, то последовательность $\{x_k\}$, генерируемая рекуррентным включением (при произвольном начальном $x_0 \in \mathbb{R}^n$)*

$$x_{k+1} \in \mathrm{Pr}_S\, \varphi(x_k),$$

сходится к некоторой точке из $\widetilde{M}$.

3. Основной фейеровский процесс

Рассмотрим систему

$$f_v(x) \leq 0, \qquad \forall v \in V, \qquad x \in S, \tag{3.1}$$

где $\{f_v(x)\}$ — выпуклые на $\mathbb{R}^n$ функции для всех $v \in V$, S — выпуклое замкнутое множество из $\mathbb{R}^n$, V — произвольное множество индексов. Оно может быть конечным, счетным или континуальным. В последнем случае будем считать, что V — компакт из $\mathbb{R}^s$. Через M обозначим множество решений системы (3.1).

Ниже нами будет рассмотрен, в частности, случай, когда индексное множество V представлено цепочкой его подмножеств V_k:

$$V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_k \subset \ldots, \tag{3.2}$$

при этом $\bigcup\limits_{(k)} V_k = V$. Если $V = \{1, \ldots, m\}$, то, начиная с некоторого k, будет выполняться равенство $V_k = V$. В случае счетного V будем полагать $V_k = \{1, \ldots, k\}$. Наконец, если V континуально, то цепочка (3.2) может выбираться по-разному. В частности, возможна ситуация $V_k = V$, $\forall k$.

Сделаем относительно множества выпуклых функций $f_v(x)$ из (3.1) важное предположение:

$$d(x) := \sup_{v \in V} f_v(x) < +\infty, \quad \forall x. \tag{3.3}$$

Положим $d_k(x) := \sup\limits_{v \in V_k} f_v(x)$. В силу (3.2) для функций $d_k(x)$ выполняется свойство монотонности:

$$d_k(x) \leq d_{k+1}(x), \quad \forall k. \tag{3.4}$$

Заметим, что в предположении (3.3) функции $d(x)$, $d_k(x)$, $\forall k$ являются выпуклыми, а потому и непрерывными. Для произвольного x справедлив, очевидно, предельный переход $d_k(x) \to d(x)$ при $k \to +\infty$.

В этом параграфе будет рассматриваться ситуация, связанная с последовательностью выпуклых функций $d_k(x)$, поточечно и монотонно (снизу) сходящейся к выпуклой функции $d(x)$, для которой множество $\{x | d(x) \leq 0\}$ непусто. Эти функции можно не связывать с теми, которые были введены выше в связи с системой (3.1).

Лемма 3.1. *Пусть $\{d_k(x)\}_k$ — последовательность выпуклых функций, поточечно сходящаяся к выпуклой функции $d(x)$, при этом выполняется условие монотонности* (3.4). *Тогда из $\{x_k\} \to \overline{x}$ следует $d_k(x_k) \to d(\overline{x})$.*

Для полноты приведем доказательство. В силу непрерывности $d(x)$ по $\varepsilon > 0$ можно указать $\overline{k}$ такое, что

$$|d(x_k) - d(\overline{x})| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall k \geq \overline{k}. \tag{3.5}$$

Далее, поскольку $d_s(\overline{x}) \xrightarrow{(s)} d(\overline{x})$, то при достаточно больших s (пусть $s \geq \overline{k}$) будет выполняться неравенство

$$|d_s(\overline{x}) - d(\overline{x})| < \frac{\varepsilon}{4},$$

что в силу (3.4) означает

$$0 \le d(\overline{x}) - d_s(\overline{x}) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Пусть $s = \bar{k}$, тогда

$$0 \le d(\bar{x}) - d_{\bar{k}}(\bar{x}) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Отсюда в силу непрерывности $d_{\bar{k}}(x)$ вытекает соотношение

$$0 \le d(x_k) - d_{\bar{k}}(x_k) < \frac{\varepsilon}{2}$$

при достаточно больших k, пусть при $k \ge \overline{\overline{k}} \ge \bar{k}$. Но тогда разность $d(x_k) - d_s(x_k)$ будет уменьшаться с ростом $s = \bar{k},\ \bar{k}+1, \ldots$, что дает

$$0 \le d(x_k) - d_s(x_k) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad s \ge \bar{k}, \qquad k \ge \overline{\overline{k}}. \tag{3.6}$$

Запишем очевидное неравенство

$$|d_s(x_k) - d(\overline{x})| \le |d(x_k) - d(\overline{x})| + [d(x_k) - d_s(x_k)].$$

Отсюда с учетом (3.5) и (3.6) получаем требуемое.

Выпишем отображения:

$$\varphi(x) = \left\{ x - \lambda \frac{d^+(x)}{|h|^2} \cdot h \mid h \in \partial d(x) \right\}, \tag{3.7}$$

$$\varphi_k(x) = \left\{ x - \lambda \frac{d_k^+(x)}{|h|^2} \cdot h \mid h \in \partial d_k(x) \right\}, \tag{3.8}$$

а также

$$\varphi^\pi(x) = \mathrm{Pr}_S\, \varphi(x), \qquad \varphi_k^\pi(x) = \mathrm{Pr}_S\, \varphi_k(x). \tag{3.9}$$

Здесь $\lambda \in (0,2)$. В (3.7) и (3.8) полагаем $\varphi(x) = x$, если $d^+(x) = 0$; $\varphi_k(x) = x$, если $d_k^+(x) = 0$. Если $d(\overline{x}) > 0$, то автоматически $h \ne 0$, $h \in \partial d(\bar{x})$. Действительно, если бы $h = 0$, из неравенства $(h, x - \bar{x}) \le d(x) - d(\bar{x})$, выполняющегося для всех x, следовало неравенство $d(\bar{x}) \le d(x)$, $\forall x$, т.е. $\bar{x} \in \operatorname{Arg}\min\limits_{(x)} d(x)$, что противоречит предполагаемому условию $\{x \mid d(x) \le 0\} \ne \emptyset$.

Лемма 3.2. *Пусть для $\{d_k(x)\}$ выполняются условия леммы 3.1, $\{x_k\} \to x'$ и $h_k \in \partial d_k(x_k)$. Тогда $\{h_k\}$ ограничена.*

Доказательство. Получаем, как и в доказательстве леммы 2.5, неравенство

$$|h_k| \le d_k\left(x_k + \frac{h_k}{|h_k|}\right) - d_k(x_k) \le \left| d_k\left(x_k + \frac{h_k}{|h_k|}\right) \right| + |d_k(x_k)|.$$

Так как в силу леммы 3.1 $d_k(x_k) \to d(x')$, то достаточно доказать ограниченность первого слагаемого в правой части выписанного неравенства. Если это не так, то можно выделить подпоследовательность индексов $\{j_k\}$ и ей соответствующие последовательности $\{x_{j_k}\}$ и

$\{e_{j_k} = \frac{h_{j_k}}{|h_{j_k}|}\}$ такие, что $\gamma_k := |d_{j_k}(x_{j_k}+e_{j_k})| \to +\infty$ при $k \to +\infty$. Так как последовательность $\{x_{j_k} + e_{j_k}\}$ сходится к $x' + e'$, то по лемме 3.1 $\{\gamma_k\} \to d(x' + e')$. Получилось противоречие. Лемма доказана.

Выпишем процесс

$$x_{k+1} = \mathrm{Pr}_S \left(x_k - \lambda_k \frac{d_k^+(x_k)}{\|h_k\|^2} \cdot h_k \right) \tag{3.10}$$

при произвольном начальном $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $h_k \in \partial d_k(x_k)$.

Здесь $\lambda_k \in [\delta, 2-\delta]$, $\delta > 0$. Из способа построения последовательности $\{x_k\}$ видно, что $x_k \in S$, $\forall k \geq 1$. Еще раз отметим, что при $d_k^+(x_k) = 0$, т.е. $f_v(x_k) \leq 0$, $\forall v \in V_k$, полагаем $\forall s > k:\ x_s = x_k$.

Теорема 3.1. *Пусть для совместной системы выпуклых неравенств* (3.1) *выполнены условия* (3.2), (3.3) *и S телесно. Тогда при произвольном начальном $x_0 \in \mathbb{R}^n$ процесс, рекуррентно задаваемый соотношением*

$$x_{k+1} \in \mathrm{Pr}_S\, \varphi_k(x_k), \tag{3.11}$$

сходится к некоторому решению x' системы (3.1), *т.е. $x' \in M$.*

Доказательство. Соотношение (3.11) запишем в форме (3.10). Вначале выделим тривиальную ситуацию, когда $\exists \bar{k}\ \ \forall k > \bar{k}:\ d_k^+(x_k) = 0$, т.е. $d_k(x_k) \leq 0$. Это соответствует тому, что $x_{\bar{k}} = x_{\bar{k}+1} = \ldots = x' \in M$. Если этот случай исключить, то последовательность $\{x_k\}$ будет M-фейеровской, если в ней убрать возможные повторы. Последние могут возникнуть за счет того, что, например, $d_{k'}^+(x_{k'}) = 0$, но при некотором $k'' > k'$: $d_{k''}(x_{k''}) > 0$. В такой ситуации возникает повтор: $x_{k'} = x_{k'+1}$.

Далее рассмотрим два случая:

$$\underline{\lim}\, d_k^+(x_k) = 0 \qquad \text{и} \qquad \underline{\lim}\, d_k^+(x_k) =: \gamma > 0. \tag{3.12}$$

1. Случай первой альтернативы. Выделим сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_j}\} \to x'$ такую, что $\{d_{k_j}(x_{k_j})\} \to 0$. Тогда в силу леммы 3.1 $\{d_{k_j}^+(x_{k_j})\} \to d^+(x') = 0$. Но так как $\forall k:\ x_k \in S$ и $d(x') \leq 0$, то $x' \in M$.

2. Пусть $\underline{\lim}\, d_k^+(x_k) = \gamma > 0$ (в этом случае "+" можно опустить). Тогда $\exists \bar{\delta} > 0$, $\exists \bar{k}\ \forall k \geq \bar{k} : d_k(x_k) > \bar{\delta} > 0$. Введем обозначения

$$d_k^0(x_k) := d_k(x_k) - \delta_0, \qquad \lambda_k^0 := \lambda_k \frac{d_k(x_k)}{d_k(x_k) - \delta_0}.$$

При достаточно малом δ_0, $0 < \delta_0 < \bar{\delta}$, будут выполняться соотношения

$$\lambda_k^0 \in [\delta_0, 2-\delta_0] \subset (0,2), \qquad \forall k \geq \bar{k}.$$

Рекуррентное соотношение (3.10), соответствующее процессу (3.11), можно теперь переписать в виде

$$x_{k+1} = \mathrm{Pr}_S \left(x_k - \lambda_k^0 \frac{d_k^0(x_k)}{\|h_k\|^2} h_k \right), \tag{3.13}$$

при этом прежний субградиент $h_k \in \partial d_k(x_k)$ будет субградиентом и для $d_k^0(x_k) = d_k(x_k) - \delta_0$. Но процесс (3.13) будет теперь фейеровским для системы

$$d_k^0(x) = d_k(x) - \delta_0 \le 0, \qquad k = 1, 2, \dots, \qquad x \in S, \tag{3.14}$$

задающей *телесное* множество решений (с учетом телесности S). Тогда по следствию из леммы 2.2 последовательность $\{x_k\}$ сходится к некоторому элементу x'. Докажем включение $x' \in M$. Обратимся к соотношению (3.13). Положим

$$x'_{k+1} := x_k - \lambda_k^0 \frac{d_k^0(x_k)}{\|h_k\|^2} \cdot h_k, \qquad x_{k+1} = \mathrm{Pr}_{M_0}\, x'_{k+1}, \tag{3.15}$$

где $M_0 = \{x \mid d_k^0(x) - \delta_0 \le 0\}$. Последовательность $\{x_k, x'_{k+1}\}_k$, если в ней удалить возможные повторы соседних элементов, будет фейеровской относительно системы (3.14), что опять-таки в силу телесности $S \cap M_0$ будет давать сходимость $\{x_k, x'_{k+1}\}_k \to x'$ (естественно, к той же точке x'). Соотношения (3.15) можно переписать через прежние символы λ и d_k, а именно:

$$x'_{k+1} = x_k - \lambda_k \frac{d_k^+(x_k)}{\|h_k\|^2} \cdot h_k, \qquad x_{k+1} = \mathrm{Pr}_S\, x'_{k+1}.$$

Отсюда вытекает

$$d_k(x_k) = \frac{1}{\lambda_k} \|x'_{k+1} - x_k\| \cdot \|h_k\|. \tag{3.16}$$

Поскольку в силу леммы 3.2 $\{\|h_k\|\}_k$ ограничена, то путем предельного перехода в (3.16) получаем $d(x') = 0$, т.е. $x' \in M$.
Теорема полностью доказана.

4. Фейеровский процесс для счетной системы выпуклых неравенств

Рассмотрим систему

$$f_i(x) \le 0, \qquad i = 1, 2, \dots, \qquad x \in S, \tag{4.1}$$

которая является частным случаем системы (3.1), а именно, случаем, когда $V = \{1, 2, \dots, i, \dots\}$. Если положить $V_k = \{1, \dots, k\}$, $d_k(x) = \max\limits_{i \in V_k} f_i(x)$, $d(x) = \sup\limits_{i \in V} f_i(x)$, то мы получим те выпуклые функции, через которые был определен основной фейеровский процесс (3.10). Здесь потребуется выполнимость условия (3.3), которое для нашего случая запишется как $d(x) < +\infty$, $\forall x$. Это условие можно обеспечить, например, для случая линейной системы

$$l_i(x) := (a_i, x) - b_i \le 0, \qquad i = 1, 2, \dots. \tag{4.2}$$

Действительно, если каждое неравенство этой системы умножить на такое $\varepsilon_i > 0$, что $\varepsilon_i |a_i| < \delta$, $\varepsilon_i |b_i| < \delta$, $\delta > 0$, то система

$$\bar{l}_i(x) := \varepsilon_i l_i(x) \le 0, \qquad i = 1, 2, \dots$$

будет удовлетворять условию

$$d_0(x) := \sup_{(i)} \bar{l}_i(x) < +\infty, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Действительно,

$$\sup_{(i)} \varepsilon_i \left[(a_i, x) - b_i\right] \le \sup_{(i)} \varepsilon_i \left[|a_i|\ |x| + b_i\right] \le \delta\left(|x| + 1\right).$$

Процесс (3.10) применительно к системе (4.1) уточним за счет выбора субградиента $h_k \in \partial d_k(x_k)$. Из субдифференциальных свойств выпуклых функций известно, что

$$\partial d_k(x) = \left\{ \sum_{i \in J_k(x)} \alpha_i \partial_i f_i(x) \ \middle|\ \sum_{i \in J_k(x)} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \ge 0, \quad \forall i \right\},$$

здесь $J_k(x) = \{i \in \overline{1,k} \mid d_k(x) = f_i(x)\}$. В частности, если $i_k : d_k(x_k) = f_{i_k}(x_k)$, то в (3.10) в качестве h_k можно брать любой элемент из $\partial f_{i_k}(x_k)$. При условии дифференцируемости функций $f_i(x)$ можно положить $h_k = \nabla f_{i_k}(x_k)$. Наконец, если $f_i(x) = l_i(x)$ — из (4.2), то, поскольку $\nabla f_{i_k}(x_k) = a_{i_k}$, можно положить $h_k = a_{i_k}$. Сформулируем частный вариант теоремы 3.1.

Теорема 4.1. *Пусть для совместной системы выпуклых неравенств* (4.1) *выполняется условие*

$$d(x) := \sup_{(i)} f_i(x) < \infty, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда последовательность $\{x_k\}$, *порожденная рекуррентным соотношением*

$$x_{k+1} = \mathrm{Pr}_S \left(x_k - \lambda_k \frac{d_k^+(x_k)}{|h_k|^2} \cdot h_k \right), \tag{4.3}$$

где $\lambda_k \in [\delta, 2-\delta]$, $\delta > 0$, $h_k \in \partial f_{i_k}(x_k)$, $d_k(x_k) = f_{i_k}(x_k)$, *при произвольном начальном* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *сходится к некоторому решению системы* (4.1).

З а м е ч а н и е. Ранее уже отмечалось, что в (3.10), равным образом и в (4.3), считаем, что если $d_k^+(x_k) = 0$, то $x_{k+1} = \mathrm{Pr}_S(x_k)$; на самом деле $x_{k+1} = x_k$, поскольку $x_k \in S$, $k \ge 1$. Если же $d_k(x_k) > 0$, то автоматически $h_k \ne 0$.

5. Фейеровский процесс для континуальной системы выпуклых неравенств (основной тип W)

Выпишем систему

$$f_\alpha(x) \le 0, \qquad \forall \alpha \in V \tag{5.1}$$

с множеством решений $M \ne \emptyset$ и следующими ограничениями:

1) V — компакт из $\mathbb{R}^k$;

2) функция $\bar{f}(z) := f_\alpha(x)$ выпукла по x для всех $\alpha \in V$ и непрерывна по $z = [x, \alpha] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$;

3) отображение $[x, \alpha] \to \partial_x f_\alpha(x)$ замкнуто по $z = [x, \alpha]$, т.е. из $\{[x_k, \alpha_k]\}_k \to [x', \alpha']$ и $\{h_k\}_k \to h'$, $h_k \in \partial_x f_{\alpha_k}(x_k)$ следует $h' \in \partial_x f_{\alpha'}(x')$;

4) $\forall \alpha \in V \quad \exists p_\alpha : f_\alpha(p_\alpha) < 0$.

Введем для системы (5.1) функцию невязки

$$d(x) = \max_{\alpha \in V} f_\alpha(x) \qquad (= f_{\alpha_x}(x)).$$

Эта функция, будучи выпуклой, является непрерывной.

Положим $J(x) = \{\alpha_x \mid d(x) = f_{\alpha_x}(x)\}$. Построим отображение $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } d(x) = 0 \ \ (x \in M); \\ \{x - \lambda \dfrac{d(x)}{\|h\|^2} h \mid h \in \partial_x f_{\alpha_x}(x),\ \alpha_x \in J(x)\}, & \text{если } d(x) > 0; \end{cases} \tag{5.2}$$

здесь $\lambda \in (0, 2)$. Как уже ранее отмечалось, для любого $\bar{x}$ такого, что $d(\bar{x}) > 0$, субградиент h из (5.2) отличен от нуля. Отображение (5.2) мы будем записывать и таким образом:

$$\varphi(x) = \left\{ x - \lambda \frac{d^+(x)}{\|h\|^2} \cdot h \mid h \in \partial f_{\alpha_x}(x) \right\}.$$

В принципе, ситуация, когда индексный параметр α трактуется как элемент из пространства со своей топологией, формально содержится в общих предположениях относительно системы (3.1), рассмотренной в п. 3. Однако, делая уточнения относительно параметра α и свойств функции $\bar{f}(z) = f_\alpha(x)$, $z = [x, \alpha]$, мы обеспечиваем возможность установления топологических свойств отображения (5.2), например, его замкнутость. Это свойство весьма важное, ибо оно, в частности, обеспечивает сходимость итерационного процесса, порождаемого этим отображением, к решению системы (5.1) (см. лемму (2.7)).

Теорема 5.1. *При перечисленных условиях* 1)–4) *отображение* (5.2) *является M-фейеровским и замкнутым.*

Доказательство. Что касается M-фейеровости отображения (5.2), то достаточно сослаться на лемму 2.6. Следует только пояснить, что из $h \in \partial_x f_{\alpha_x}(x)$ следует $h \in \partial d(x)$. Проверим это. Пусть y — свободная переменная. В силу выпуклости функции $f_{\alpha_x}(x)$ выполняется неравенство $(h, y - x) \le f_{\alpha_x}(y) - f_{\alpha_x}(x) \le \max\limits_{(\alpha)} f_\alpha(y) - f_{\alpha_x}(x) = d(y) - d(x)$, $\forall y$, т.е. $h \in \partial d(x)$.

Для замкнутости $\varphi(x)$ нужно доказать:

$$\{x_k\} \to x', \qquad \{y_k\} \to y', \qquad y_k \in \varphi(x_k) \Rightarrow y' \in \varphi(x').$$

Включение $y_k \in \varphi(x_k)$ означает, что

$$y_k = x_k - \lambda \frac{d(x_k)}{\|h_k\|^2} h_k, \tag{5.3}$$

где h_k выбрано согласно (5.2), т.е. $h_k \in \partial_x f_{\alpha_k}(x_k)$, α_k — сокращение для α_x при $x = x_k$. При компактности V можно считать $\{\alpha_k\} \to \alpha' \in V$ (иначе от последовательностей $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ можно было бы перейти к подпоследовательностям с обеспечением необходимой сходимости для соответствующей подпоследовательности $\{\alpha_k\}$).

Возможны два случая:

1. $d(x') > 0$.

Докажем сначала ограниченность последовательности $\{h_k\}$. Поскольку неравенство $(h_k, x - x_k) \le f_{\alpha_k}(x) - f_{\alpha_k}(x_k)$ выполняется для любых x, то, положив $x = x_k + \dfrac{h_k}{\|h_k\|}$, получим $\|h_k\| \le f_{\alpha_k}(x_k + \dfrac{h_k}{\|h_k\|}) - f_{\alpha_k}(x_k)$, что в силу условия 2) дает требуемую ограниченность последовательности $\{h_k\}$. Это позволяет (по схеме перехода к подпоследовательностям) считать,

что $\{h_k\} \to h'$, при этом $h' \in \partial_x f_{\alpha'}(x')$ — согласно условию 3) доказываемой теоремы. Кроме того, $h' \neq 0$. Действительно, если $h' = 0$, то из неравенства $(h', x - x') \leq f_{\alpha'}(x) - f_{\alpha'}(x')$, выполняющегося для всех x, вытекает $f_{\alpha'}(x') \leq f_{\alpha'}(x)$. Но поскольку $d(x') = f_{\alpha'}(x') > 0$ и по условию 4): $\exists p_{\alpha'} : f_{\alpha'}(p_{\alpha'}) < 0$, то при $x = p_{\alpha'}$ имеем противоречие. Итак, нами доказано $h' \neq 0$. Переход к пределу в (5.3) дает соотношение

$$y' = x' - \lambda \frac{d(x')}{\|h'\|^2} h', \tag{5.4}$$

которое, согласно определению отображения $\varphi(x)$, показывает, что $y' \in \varphi(x')$.

2. $d(x') = 0$.

Рассмотрим поочередно два подслучая:

2.1. $\exists \{x_{k_j}\} \subset \{x_k\} : d^+(x_{k_j}) = 0$. Это соответствует тому, что последовательность $\{x_{k_j}\}$ целиком лежит в множестве M. Учитывая, что в этом случае $\varphi(x_{k_j}) = x_{k_j}$, получаем: $y_{k_j} = \varphi(x_{k_j}) = x_{k_j} \to x'$, т.е. $y' = \varphi(x') = x'$, т.е. $y' \in \varphi(x')$.

2.2. $\exists \bar{k} : \ d(x_k) > 0, \forall k > \bar{k}$. Тогда $d(x') = f_{\alpha'}(x') \geq 0$. Как и выше, показывается $h' \in \partial_x f_{\alpha'}(x') \Rightarrow h' \neq 0$, и, следовательно, (5.4) выполняется, что и влечет $y' \in \varphi(x')$.
Теорема полностью доказана.

Следствие 5.1. *Последовательность $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$, порождаемая рекуррентно включением $x_{k+1} \in \varphi(x_k)$ при произвольном начальном x_0, сходится к некоторому решению системы* (5.1)

Доказательство. См. лемму 2.7.

Рассмотрим систему (5.1) с дополнительным требованием $x \in S$, т.е.

$$f_\alpha(x) \leq 0, \qquad \forall \alpha \in V, \qquad x \in S, \tag{5.5}$$

здесь S — выпуклое замкнутое множество из $\mathbb{R}^n$. Это как раз и есть система (3.1).

Напишем обобщение отображения (5.2):

$$\psi(x) := \mathrm{Pr}_S(\varphi(x)). \tag{5.6}$$

Справедлива

Теорема 5.2. *Пусть система* (5.5) *совместна и выполнены условия теоремы* 5.1. *Тогда последовательность $\{x_k\}$, порождаемая соотношением $x_{k+1} \in \psi(x_k)$ при произвольном начальном $x_0 \in \mathbb{R}^n$, сходится к решению системы* (5.5).

Следует из того, что поскольку отображение $\varphi(\cdot)$ замкнуто, а операция проектирования $\mathrm{Pr}_S(\cdot)$ непрерывна, то их суперпозиция $\mathrm{Pr}_S(\varphi(x))$ $(= \bigcup\limits_{y \in \varphi(x)} \mathrm{Pr}_S(y))$ реализует замкнутое отображение. Поэтому в силу леммы 2.7 теорема справедлива.

Для случая континуальности индексного множества V возможна реализация итерационного процесса по типу (3.10), т.е.

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \frac{d_k^+(x)}{|h_k|^2} \cdot h_k, \tag{5.7}$$

где $\lambda_k \in [\delta, 2-\delta]$, $\delta > 0$, $h_k \in \partial d_k(x)$, $d_k(x) = \sup\limits_{\alpha \in V_k} f_\alpha(x)$, при этом

$$V_1 \subset V_2 \subset \dots, \qquad \overline{\bigcup_{(k)} V_k} = V. \tag{5.8}$$

В (5.7), в отличие от (3.10), отсутствует оператор проектирования $\mathrm{Pr}_S(\cdot)$, поскольку в исходной системе (5.1), которая в этом пункте изучается, отсутствует требование $x \in S$. Для процесса (5.7) имеет место аналог теоремы 3.1; более того, сохраняется в силе и то доказательство из п. 3, которое относится к теореме 3.1. Условия, обеспечивающие справедливость последней, в нашей ситуации континуальности V выполняются в силу условий 1)–4). Следует только обратить внимание на то, что в п. 3 было записано условие (3.2): $\bigcup\limits_{(k)} V_k = V$, а в нашем случае требуется условие (5.8). Последнее как раз и обеспечивает поточечную сходимость $d_k(x) \xrightarrow{(k)} d(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, равным образом леммы 3.1 и 3.2. ●

Лемма 5.1. *Пусть для совместной системы* (5.1) *выполнены условия* 1)–2), (5.8), *причем* $\forall k : V_k$ *— компакт. Тогда справедлива поточечная сходимость*

$$d_k(x) \xrightarrow{(k)} d(x). \tag{5.9}$$

Доказательство. Во-первых, имеем:

$$d(x) \geq \lim_{(k)} d_k(x) = \lim_{(k)} f_{\alpha_k}(x) = f_{\alpha'}(x),$$

здесь $\alpha_k : d_k(x) = f_{\alpha_k}(x)$. Можно считать $\alpha_k \to \alpha'$. Нам нужно доказать $d(x) = f_{\alpha'}(x)$. Если бы $d(x) > f_{\alpha'}(x)$, то $\exists \alpha'' \in V$:

$$d(x) = f_{\alpha''}(x) > f_{\alpha'}(x), \tag{5.10}$$

причем $\alpha'' = \lim\limits_{(k)} \alpha''_k$, $\alpha''_k \in V_k$. Но поскольку $f_\alpha(x) \leq f_{\alpha_k}(x)$, $\forall \alpha_k$ (по определению α_k), то $f_{\alpha''_k}(x) \leq f_{\alpha_k}(x)$, что в пределе дает $f_{\alpha''}(x) \leq f_{\alpha'}(x)$ — в противоречие с (5.10).
Лемма доказана.

Теорема 5.3. *Если для совместной системы* (5.1) *выполнены условия* 1)–4), *то процесс* (5.7) *сходится* (*при произвольном* $x_0 \in \mathbb{R}^n$) *к некоторому ее решению. Если в системе* (5.1) *присутствует требование* $x \in S$, *где* S *— выпуклое телесное замкнутое множество из* $\mathbb{R}^n$, *то, заменив рекуррентное соотношение* (5.7) *на* (3.10), *получим утверждение о сходимости к решению* x' *системы* (5.1), *при этом* $x' \in S$.

Доказательство, как уже отмечалось, полностью следует обоснованию теоремы 3.1, а что касается необходимых для этого требований, то они обеспечиваются условиями 1)–4) с использованием леммы 5.1.

6. Случай системы, объединяющей конечное число подсистем типа W

Предложенный итерационный процесс для системы неравенств (4.1) может быть модернизирован для нахождения решения систем неравенств вида:

$$f_j(x, v_j) \le 0, \qquad \forall v_j \in V_j, \qquad x \in S_j \subset \mathbb{R}^n, \qquad j = 1, \dots, m; \tag{6.1}$$

здесь $\{f_j(x, v_j)\}$ — функции, удовлетворяющие условиям 1)–4) из предыдущего пункта с заменой в них α на v_j, S_j — выпуклые замкнутые множества.

Модернизируем итерационный процесс так, чтобы получить решение системы (6.1). Введем функции невязки для (6.1):

$$d_j(x) := \max_{v_j \in V_j} f_j(x, v_j) = f_j(x, v_j(x)).$$

Сформируем отображения $\psi_j(x)$, $j = 1, \dots, m$ по аналогии с (5.6), т.е.

$$\psi_j(x) := \mathrm{Pr}_{S_j}(\varphi_j(x)),$$

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} x, & \text{если } d_j(x) = 0; \\ \{x - \lambda_j \dfrac{d_j(x)}{\|h_j\|^2} h_j \mid h_j \in \partial_x f_j(x, v_j(x)), \ \ v_j(x) \in J_j(x)\}, & \text{если } d_j(x) > 0. \end{cases}$$

Здесь $\lambda_j \in (0, 2)$, $j = 1, \dots, m$; $J_j(x) := \{v_j(x) \mid d_j(x) = f_j(x, v_j(x))\}$.

Подсистема, отвечающая индексу j в системе (6.1), — это подсистема типа (5.1), поэтому для нее будет справедлива теорема 5.2 (естественно, в предположениях теоремы 5.1), а именно: последовательность $\{x_k\}$, заданная рекуррентно итерационным отображением $\varphi_j(x)$ при произвольном начальном $x_0 \in \mathbb{R}^n$, будет сходиться к $x' \in S_j \cap M_j$, где $M_j := \{x \mid f_j(x, v_j) \le 0, \forall v_j \in V_j\}$. Отсюда, с использованием свойства $\varphi_j(\cdot) \in \overline{F}_{M_j}$, $j = 1, \dots, m$ и теоремы 2.1, основываясь на лемме 2.7, получаем следующее утверждение.

Теорема 6.1. *При сделанных относительно системы неравенств* (6.1) *предположениях последовательность* $\{x_k\}_0^{+\infty}$, *рекуррентно генерируемая включением*

$$x_{k+1} \in \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi_i(x_k), \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, \qquad \alpha_i > 0, \qquad i = 1, \dots, m$$

при произвольном начальном x_0, *сходится к решению системы* (6.1).

Отметим один полезный способ разбиения системы типа W на конечное число подсистем этого же типа за счет целесообразного разбиения множества V на конечное число индексных подмножеств V_i : $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$. Тогда для подсистемы

$$f_\alpha(x) \le 0, \qquad \forall \alpha \in V_i \tag{6.2}$$

можно построить отображение $\varphi_i(x)$ по правилу (5.2):

$$\varphi_i(x) = \left\{ x - \frac{d_i(x)}{|h|^2} \cdot h \mid h \in \partial f_{\alpha_x}(x) \right\},$$

где α_x определяется условием $d_i(x) = f_{\alpha_x}(x)$. Если V_i — компакты, то для (6.2) будут выполняться все условия 1)–4), если они выполняются для системы (5.1). Это гарантирует в силу теоремы 5.1 замкнутость отображений $\varphi_i(x)$, являющихся M_i-фейеровскими, где M_i — множество решений системы (6.2). Если $\gamma_i > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_i = 1$, то отображение $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_i \varphi_i(x)$ является замкнутым M-фейеровским отображением (см. теорему 5.1 и теорему 2.1). Следовательно, последовательность, порождаемая этим отображением, будет сходиться к решению системы (5.1). В качестве $\varphi(x)$ с этими же свойствами можно взять суперпозицию отображений $\{\varphi_i(x)\}_1^m$ (см. теорему 2.1).

7. Синтез фейеровских отображений с несовпадающими пространствами их образов

Системы неравенств, конечных или бесконечных, могут иметь специфику в своей структуре, которую целесообразно учитывать при построении итерационных, например, фейеровских операторов. Приведем примеры.

Пример. Пусть $L: \max\{(c,x) \mid Ax \le b,\ x \ge 0\}$ — задача линейного программирования. Она редуцируется к системе линейных неравенств:

$$\left.\begin{array}{llll} Ax & & \le b, & (7.1)_1 \\ & -A^T u & \le -c, & (7.1)_2 \\ -(c,x) + & (b,u) & \le 0, & (7.1)_3 \\ x \ge 0, & u \ge 0. & & (7.1)_4 \end{array}\right\} \qquad (7.1)$$

Матрица коэффициентов имеет структуру

$$\begin{bmatrix} A & \\ & -A^T \\ -c^T & b^T \end{bmatrix}. \qquad (7.2)$$

Естественным является подход конструирования для системы (7.1) итерационного (например, фейеровского) оператора $\varphi(x,u)$ из частичных операторов $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(u)$, $\varphi_3(x,u)$ и $\varphi_4(x,u)$, поставленных в соответствие подсистемам $(7.1)_i$, $i = 1,\dots,4$, соответственно, что можно реализовать, в частности, в форме

$$\varphi(x,u) := [\varphi_3(\varphi_1(x), \varphi_2(u))]^+.$$

Рассмотрим синтез отображения $\varphi(x_1,\dots,x_m)$ по системе отображений $\varphi_i(x_i)$, $i = 1,\dots,m$, $\varphi_0(x_1,\dots,x_m)$. Пусть $\varphi_i(x_i) \in F_{M_i}$, $M_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1,\dots,m$; $\varphi_0(x_1,\dots,x_m) \subset F_{M_0}$, $M_0 \in \prod\limits_{i=1}^{m} \mathbb{R}^{n_i}$.

В интерпретации системы линейных неравенств рассматриваемый случай соответствует системе с матрицей коэффициентов, имеющей структуру

$$\begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{mm} \\ A_{01} & A_{02} & \dots & A_{0m} \end{bmatrix}. \tag{7.3}$$

Следовательно, сама система имеет вид:

$$\left.\begin{array}{rcl} A_{11}x_1 & \leq & b_1, \\ \ddots & & \vdots \\ A_{mm}x_m & \leq & b_m, \\ A_{01}x_1 + \ldots + A_{0m}x_m & \leq & b_0. \end{array}\right\} \tag{7.4}$$

Положим

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m) := \varphi_0(\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_m(x_m)). \tag{7.5}$$

Теорема 7.1. *В сделанных предположениях относительно* $\{\varphi_i(\cdot)\}_0^m$ *отображение* (7.5) *является* $\widetilde{M}$*-фейеровским, где* $\widetilde{M} = \{x := [x_1, \ldots, x_m] \mid \varphi_i(x_i) = x_i,\ i = 1, \ldots, m;\ \varphi_0(x) = x\} \neq \emptyset$, *т.е.* $\varphi(\cdot) \subset F_{\widetilde{M}}$. *Если* $\varphi_i(\cdot) \in \overline{F}_{M_i}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, *то* $\varphi(\cdot) \subset \overline{F}_{\widetilde{M}}$.

Доказательство. Для простоты будем считать отображения $\{\varphi_i(\cdot)\}_0^m$ однозначными. Если $\widetilde{x} \in M$, то это означает: $\varphi_i(\widetilde{x}_i) = \widetilde{x}_i$, $i = 1, \ldots, m$; $\varphi_0(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$. Отсюда непосредственно следует $\varphi(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$. Теперь нужно доказать импликацию: $(\widetilde{x} \in \widetilde{M})\&(x \notin \widetilde{M}) \Rightarrow |\varphi(x) - \widetilde{x}| < |x - \widetilde{x}|$. Свойство $x \notin \widetilde{M}$ означает, что нарушается одно из включений $x_i \in M_i$, $i = 1, \ldots, m$, $x \in M_0$. Из этого следует, что одно из посылочных неравенств: $|\varphi_i(x_i) - \widetilde{x}_i| \leq |x_i - \widetilde{x}_i|$, $i = 1, \ldots, m$, $|\varphi_0(x) - \widetilde{x}| \leq |x - \widetilde{x}|$ выполняется строго. Следовательно, в ниже следующей цепочке неравенств

$$|\varphi(x) - \widetilde{x}|^2 = |\varphi_0(\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_m(x_m)) - [\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_m]|^2 \leq$$

$$\leq |\,[\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_m(x_m)] - [\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_m]\,|^2 = \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(x_i) - \widetilde{x}_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{m} |x_i - \widetilde{x}_i|^2 \quad (= |x - \widetilde{x}|^2),$$

по крайней мере, одно будет выполняться строго, что и дает проверяемое неравенство $|\varphi(x) - \widetilde{x}| < |x - \widetilde{x}|$. Что касается второй части доказываемой теоремы, то она проверяется непосредственно.

8. Применение к решению вогнуто-выпуклых игр

Рассмотрим игру Г двух лиц с нулевой суммой, определяемую множествами стратегий $x \in M$ и $y \in N$ 1-го и 2-го игроков соответственно и платежной функцией $F(x, y)$ [8].

Функция $F(x, y)$ интерпретируется как выигрыш 1-го игрока (проигрыш 2-го игрока). Принцип гарантированного результата, примененный к рассматриваемой игре, приводит к задачам поиска

$$\max_{x \in M} \min_{y \in N} F(x, y) =: v$$

и

$$\min_{y\in N}\max_{x\in M} F(x,y) =: v^*.$$

Если $\bar{t} := v = v^* = F(\bar{x},\bar{y})$, $\bar{x}\in M$, $\bar{y}\in N$, то общее значение v и v^*, т.е. $\bar{t}$, называется *ценой игры*, $\bar{x}$, $\bar{y}$ — *оптимальными стратегиями игроков*, $\{\bar{x},\bar{y},\bar{t}\}$ — *решением игры*.

Как известно, решение игры Γ сводится к решению континуальной системы выпуклых неравенств (см., например, [9]):

$$F(x,v)\ge t,\quad \forall v\in N,\quad x\in M;\qquad F(w,y)\le t,\quad \forall w\in M,\quad y\in N. \tag{8.1}$$

Связь между игрой Γ и системой (8.1) такова: $\bar{z}=[\bar{x},\bar{y},\bar{t}]$ — *решение игры* Γ *тогда и только тогда, когда* $\bar{z}$ — *решение системы* (8.1).

В системе (8.1) сделаем переобозначения:

$$F_v^{(1)}(x,t) := -F(x,v)+t,\qquad F_w^{(2)}(y,t) := F(w,y)-t.$$

Тогда система (8.1) запишется в виде

$$F_v^{(1)}(x,t)\le 0,\quad \forall v\in N,\quad x\in M;\qquad F_w^{(2)}(y,t)\le 0,\quad \forall w\in M,\quad y\in N. \tag{8.2}$$

Прежде чем построить для множества решений $\widetilde{M}$ системы (8.2) отображение $\widetilde{\varphi}(\cdot)\in\overline{F}_{\widetilde{M}}$, рассмотрим более общую конструкцию формирования фейеровского отображения по системе частичных фейеровских отображений $\{\varphi_i(\cdot)\}$ с несовпадающими пространствами их образов. Как уже было сказано, решение игры Γ сводится к решению системы (8.2). Перепишем ее в виде:

$$\begin{cases} F_v^{(1)}(x,t)\le 0, & x\in M,\quad \forall v\in N; \qquad (8.3)_1\\ F_w^{(2)}(y,t)\le 0, & y\in N,\quad \forall w\in M. \qquad (8.3)_2\end{cases} \tag{8.3}$$

Выделим также подсистемы

$$F_v^{(1)}(x,t)\le 0,\quad \forall v\in N; \qquad (8.3)_1^0$$

$$F_w^{(2)}(y,t)\le 0,\quad \forall w\in M. \qquad (8.3)_2^0$$

— это подсистемы $(8.3)_1$ и $(8.3)_2$, только без требований $x\in M$ и $y\in N$.

Для подсистем $(8.3)_1^0$ и $(8.3)_2^0$ введем невязки $d_1(x,t)$ и $d_2(y,t)$:

$$d_1(x,t)=\max_{v\in N}[F_v^{(1)}(x,t)]^+\quad (=[F_{v(x,t)}^{(1)}(x,t)]^+), \tag{8.4}$$

$$d_2(y,t)=\max_{w\in M}[F_w^{(2)}(y,t)]^+\quad (=[F_{w(y,t)}^{(2)}(y,t)]^+). \tag{8.5}$$

Обозначим:

$$J_1(x,t)=\{v(x,t)\mid (8.4)\},\qquad J_2(y,t)=\{w(y,t)\mid (8.5)\}.$$

Положим

$$\varphi_1(x,t) := \left\{[x,t]-\lambda_1\frac{d_1(x,t)}{\|h_v^{(1)}\|^2+1}[-h_v^{(1)},1]\mid v\in J_1(x,t),\ h_v^{(1)}\in\partial_x F(x,v)\right\}, \tag{8.6}$$

$$\varphi_2(y,t) := \left\{ [y,t] - \lambda_2 \frac{d_2(y,t)}{\|h_w^{(2)}\|^2+1} [h_w^{(2)}, -1] \mid w \in J_2(y,t),\ h_w^{(2)} \in \partial_y F(w,y) \right\}; \tag{8.7}$$

здесь $\lambda_1 \in (0,2)$, $\lambda_2 \in (0,2)$. Обозначим через $\alpha_v(x,t)$ и $\beta_w(y,t)$ коэффициенты перед $[-h_v^{(1)}, 1]$ и $[h_w^{(2)}, -1]$. Тогда $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$ могут быть переписаны в виде

$$\varphi_1(x,t) = \{[\underbrace{x+\alpha_v(x,t)h_v^{(1)}}_{\bar{x}},\ \underbrace{t-\alpha_v(x,t)}_{t'}] \mid v \in J_1(x,t),\ h_v^{(1)} \in \partial_x F(x,v)\}, \tag{8.8}$$

$$\varphi_2(y,t) = \{[\underbrace{y+\beta_w(y,t)h_w^{(2)}}_{\bar{y}},\ \underbrace{t+\beta_w(y,t)}_{t''}] \mid w \in J_2(y,t),\ h_w^{(2)} \in \partial_y F(w,y)\}. \tag{8.9}$$

Определим целевое отображение

$$\widetilde{\varphi}(x,y,t) := \left\{ \left[\mathrm{Pr}_M(\bar{x}),\ \mathrm{Pr}_N(\bar{y}),\ \frac{t'+t''}{2} \right] \right\}, \tag{8.10}$$

где $\bar{x}$ — первый векторный фрагмент в (8.8), $\bar{y}$ — первый векторный фрагмент в (8.9), t', t'' — скалярные фрагменты в (8.8) и (8.9) соответственно.

Сведем воедино все ограничения на игру Γ, которые дают сходимость итерационного процесса, порождаемого отображением $\widetilde{\varphi}(x,y,t)$, к решению игры:

1^0. M и N — выпуклые компакты, $M \subset \mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}^m$;

2^0. $F(x,y)$ — непрерывная по $z = [x,y] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ функция, вогнутая по x и выпуклая по y;

3^0. Отображения $[x,y] \to \partial_x F(x,y)$, $[x,y] \to \partial_y F(x,y)$ замкнуты.

Теорема 8.1. *При сделанных выше предположениях* 1^0–3^0

$$\widetilde{\varphi}(x,y,t) \in \overline{F}_{\widetilde{M}},$$

где $\widetilde{M}$ *— множество векторов-троек* $[\bar{x},\bar{y},t] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, *являющихся решениями игры* Γ. *Отсюда следует, что любая последовательность* $\{z^k\}_0^{+\infty}$, *порождаемая (при произвольном начальном* $z^0 = [x^0, y^0, t]$) *рекуррентным соотношением* $z^{k+1} \in \widetilde{\varphi}(z_k)$, *сходится к решению игры* Γ.

Обоснование сформулированного утверждения, по существу подготовленное предыдущими теоремами, разобьем на ряд пунктов.

1) Разрешимость игры Γ обеспечивается условиями 1^0 и 2^0 (это известный результат — см., например, [3, 4]).

2) Отображения $\varphi_1(x,t)$ и $\varphi_2(y,t)$, т.е. (8.6) и (8.7), соответствующие системам $(8.3)_1^0$ и $(8.3)_2^0$, построены точно так же, как отображение (5.2) для системы (5.1) (разница лишь в обозначениях). Замкнутость отображения (5.2) обеспечивалась условиями 1)–4) (теорема 5.1). Применительно к системам $(8.3)_1^0$ и $(8.3)_2^0$ эти условия выполняются в силу предположений 1^0–3^0.

Пояснений требует лишь условие 4), которое, например, для системы $(8.3)_1^0$ запишется так: $\forall \bar{v} \in N\ \ \exists [\bar{x},\bar{t}] : F_{\bar{v}}^{(1)}(\bar{x},\bar{t}) < 0$, т.е. $-F(\bar{x},\bar{v}) + \bar{t} < 0$. Очевидно, для любых $\bar{x}$ и $\bar{v}$

соответствующие $\bar{t}$ выбираются тривиально. Точно так же дело обстоит и с системой $(8.3)_2^0$. Сказанное позволяет утверждать (в силу теоремы 5.1), что отображения $\varphi_1(x,t)$ и $\varphi_2(y,t)$ замкнуты.

3) Итак, нами показано, что

$$\varphi_1(\cdot) \in \overline{F}_{\mathrm{Fix}\,\varphi_1(\cdot)}, \qquad \varphi_2(\cdot) \in \overline{F}_{\mathrm{Fix}\,\varphi_2(\cdot)},$$

где $\mathrm{Fix}\,\varphi_i(\cdot)$ — символы для обозначения множеств неподвижных точек отображений $\varphi_i(\cdot)$, которыми являются множества решений систем $(8.3)_1^0$ и $(8.3)_2^0$. Исходя из $\varphi_1(x,t)$ и $\varphi_2(y,t)$, можно построить отображение $\varphi(x,y,t) = \{[\bar{x},\bar{y},\frac{t'+t''}{2}]\}$, где $\bar{x}$ — след вектора $z_1 \in \varphi_1(x,t)$ в $\mathbb{R}^n$ — как в подпространстве $\mathbb{R}^n$ пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $\bar{y}$ — след вектора $z_2 \in \varphi_2(y,t)$ в $\mathbb{R}^m$ — как в подпространстве $\mathbb{R}^m$ пространства $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, а t' и t'' — следы z_1 и z_2 в одномерном подпространстве $\mathbb{R}$ пространств $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$.

Таким образом, отображение $\varphi(x,y,t)$ будет замкнутым и фейеровским относительно множества решений системы

$$F_v^{(1)}(x,t) \le 0, \quad \forall\, v \in N; \qquad F_w^{(2)}(y,t) \le 0, \quad \forall\, w \in M \tag{8.11}$$

— это объединение систем $(8.3)_1^0$ и $(8.3)_2^0$.

Что касается требований $x \in M$ и $y \in N$, то они учитываются путем использования операторов метрического проектирования на M и N, как это отражено в (8.10).

Вектор $[\mathrm{Pr}_M(\bar{x}),\ \mathrm{Pr}_N(\bar{y}),\ \frac{t'+t''}{2}]$ реализует проекцию вектора $[\bar{x},\ \bar{y},\ \frac{t'+t''}{2}] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ на $M \times N \times \mathbb{R}$, а отображение $\widetilde{\varphi}(x,y,t)$ реализует всю совокупность проекций векторов из $\varphi(x,y,t)$ на отмеченное множество. Поскольку отображение $\varphi(x,y,t)$, как было показано, является фейеровским относительно множества решений системы (8.11), а оператор проектирования является непрерывным и фейеровским относительно множества, на которое осуществляется проектирование (лемма 2.4), то их суперпозиция $\widetilde{\varphi}(x,y,t)$ является замкнутым и фейеровским отображением относительно множества $\mathrm{Fix}\ \widetilde{\varphi}(\cdot)$ (теорема 2.1, свойство 2). С учетом леммы 2.7 отсюда и следует справедливость теоремы 8.1.

Поступила 15.03.2001

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Motzkin T.S., Schoenberg J.J.** The relaxation method for linear inequalities. Canad. J. Math. 1954. V. 6, no 3. P. 393–404.

[2] **Agmon S.** The relaxation method for linear inequalities. Canad. J. Math. 1954. V. 6, no 3. P. 382–392.

[3] **Еремин И.И.** Обобщение релаксационного метода Моцкина-Агмона // Успехи матем. наук. 1965. Т. XX, вып. 2. С. 183–187.

[4] **Еремин И.И.** Релаксационный метод решения систем неравенств с выпуклыми функциями в левых частях // ДАН СССР. 1965. Т. 160, № 5. С. 994–996.

[5] **Еремин И.И.** К общей теории фейеровских отображений // Матем. записки УрГУ. Свердловск: УрГУ. 1969. Т .7, № 2. С. 50–58.

[6] **Еремин И.И., Мазуров В.Д.** Нестационарные процессы математического программирования. М.: Наука, 1979. 228 с.

[7] **Тарасова Т.А.** Об одном итерационном методе решения бесконечных систем выпуклых неравенств // В кн. "Методы фейеровского типа в выпуклом программировании". Свердловск: УрО АН СССР. 1975. С. 58–61.

[8] Бесконечные антагонистические игры // Сб. статей под редакцией Н.Н.Воробьева. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1963. 504 с.

[9] **Еремин И.И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во "Екатеринбург", 1999. 312 с.