В.А.Лифшиц

НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ДЛЯ ВЫВОДОВ В ИСЧИСЛЕНИИ ПРЕДИКАТОВ С РАВЕНСТВОМ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ СИМВОЛАМИ*)

Известно, каким полезным аппаратом в исследованиях, касающихся исчисления предикатов, оказалась основная теорема Г.Генцена [1] . В настоящей заметке предлагается план финитного доказательства возможности распространения основной теоремы на исчисление предикатов с равенством и функциональными символами. В ходе доказательства мы установим несколько теорем о специализации формы вывода в некоторых свободных от сечения секвенциальных вариантах исчисления предикатов с равенством и функциональными символами. Эти результаты сами по себе оказываются полезными для доказательства ряда утверждений, связанных с исчислением предикатов с равенством и функциональными символами.

Мы будем рассматривать два свободных от сечения секвенциальных варианта G_0^e и G_1^e исчисления предикатов с равенством и функциональными символами, получаемых из исчисления LK

---

*)Основные результаты настоящей заметки были доложены на Ленинградском семинаре по математической логике 18 ноября 1964 г.

(см. [1]) в результате внесения в кванторные правила очевидных изменений, связанных с наличием функциональных символов, и добавления постулатов для равенства.

Дополнительными постулатами исчисления G_0^e являются схема аксиом

$$(E) \rightarrow t = t,$$

где t - произвольный терм, и два правила вывода*):

$$(S_1)\frac{[\Gamma]_s^\tau, \tau = s, [\Delta]_s^\tau \rightarrow [\Sigma]_s^\tau}{\Gamma, \tau = s, \Delta \rightarrow \Sigma}; \quad (S_2)\frac{[\Gamma]_s^\tau, s = \tau, [\Delta]_s^\tau \rightarrow [\Sigma]_s^\tau}{\Gamma, s = \tau, \Delta \rightarrow \Sigma}.$$

(здесь и ниже Γ, Δ, Σ - произвольные списки формул, возможно, пустые, τ, s - произвольные термы). Правила (S_1) и (S_2) заимствованы из статьи [2].

Дополнительными постулатами исчисления G_1^e являются схема аксиом (E) и два правила вывода

$$(R_1)\frac{[\Gamma]_s^a, [\Delta]_s^a \rightarrow [\Sigma]_s^a}{[\Gamma]_\tau^a, \tau = s, [\Delta]_\tau^a \rightarrow [\Sigma]_\tau^a}; \quad (R_2)\frac{[\Gamma]_s^a, [\Delta]_s^a \rightarrow [\Sigma]_s^a}{[\Gamma]_\tau^a, s = \tau, [\Delta]_\tau^a \rightarrow [\Sigma]_\tau^a};$$

---

*) Если Γ - список формул, τ и s - термы, то $[\Gamma]_s^\tau$ обозначает результат подстановки терма s вместо всех вхождений терма τ в список Γ.

(где a - произвольная свободная переменная).

Замечание. Легко видеть, что каждое применение правила $S_1(S_2)$ является применением правила R_1 (соответственно, R_2).

Рассмотрим вывод в исчислении G_1^e. Применение правила для равенства в этом выводе будем называть регулярным, если выше этого применения применяются только правила для равенства.

Теорема I. По любому выводу в исчислении G_1^e можно построить вывод в этом исчислении с той же последней секвенцией, в котором все применения правил для равенства регулярны.

Теорема I доказывается индукцией по числу нерегулярных применений правил для равенства в данном выводе.

Применение какого-либо из правил R_1, R_2 будем называть простым, если переменная a входит в список формул Γ, Δ, Σ точно один раз, а термы τ и s различны. Вывод в исчислении G_1^e будем называть регулярным, если все применения правил для равенства в этом выводе - регулярные и простые. Следующая теорема является усилением теоремы I.

Теорема 2. По любому выводу в исчислении G_1^e можно построить регулярный вывод в этом исчисле-

нии с той же последней секвенцией.

Рассмотрим произвольное алгорифмически распознаваемое транзитивное иррефлексивное отношение σ на множестве всех термов, удовлетворяющее следующему условию:

(U) если $r \sigma s$ и терм t' получается из терма t в результате замены некоторых вхождений r на s, то $t \sigma t'$.

Применение какого-либо из правил R_1, R_2, S_1, S_2 будем называть σ-удлиняющим, если $r \sigma s$; применение какого-либо из этих правил будем называть σ-неудлиняющим, если оно не является σ-удлиняющим.

<u>Лемма 1</u>. Пусть дан вывод в исчислении G_1^e, в котором каждое применение правила вывода является простым применением правила для равенства. Тогда можно построить вывод в исчислении G_1^e с той же последней секвенцией, имеющий ту же высоту, в котором каждое применение правила является простым σ-неудлиняющим применением правила для равенства.

Лемма 1 доказывается индукцией по высоте данного вывода.

Вывод в исчислении G_1^e будем называть σ-нормальным, если он регулярен, и все применения правил R_1 и R_2

в этом выводе — σ -неудлиняющие.

Теорема 3. По любому выводу в исчислении G_1^e можно построить σ -нормальный вывод в этом исчислении с той же последней секвенцией.

Это утверждение вытекает из теоремы 2 и леммы 1.

Секвенцию будем называть элементарной, если все формулы, входящие в эту секвенцию, атомарны. Секвенцию будем называть σ -несводимой, если каждое σ -неудлиняющее применение любого из правил S_1, S_2, заключением которого является эта секвенция, тривиально[ж)].

Лемма 2. Каждая σ -несводимая элементарная секвенция, выводимая в исчислении G_1^e, имеет один из следующих видов:

(а) $\Gamma, A, \Delta \to \Sigma, A, \Omega$,

(б) $\Gamma \to \Delta, t = t, \Sigma$,

где $\Gamma, \Delta, \Sigma, \Omega$ - произвольные списки формул, A - произвольная формула, t - произвольный терм.

ж)Применение правила S_i мы называем тривиальным, если его посылка и заключение совпадают.

Это утверждение можно доказать с помощью теоремы 3.

Лемма 3. Каждая элементарная секвенция, выводимая в исчислении G_1^e, выводима также в исчислении G_0^e.

Доказательство. Зафиксируем алгорифмически распознаваемое отношение линейного порядка σ на множестве всех термов, которое удовлетворяет условию (U) и имеет тип ω (такие отношения, как нетрудно доказать, существуют). Это отношение порождает некоторое эффективное взаимно-однозначное соответствие между множеством всех натуральных чисел и множеством всех термов; натуральное число, соответствующее терму t, будем называть рангом t. Рангом атомарной формулы $\mathfrak{P}(t_1, \ldots, t_n)$ (формулы $\tau = S$) будем называть сумму рангов термов $t_1, \ldots, t_n$ (соответственно τ и S). Рангом элементарной секвенции S будем называть сумму рангов ее членов. Лемма доказывается возвратной индукцией по рангу данной элементарной секвенции. Для доказательства достаточно рассмотреть два случая: (1) данная секвенция является σ-несводимой; (2) данная секвенция не является σ-несводимой. В первом случае используем лемму 2, во втором случае - индукционное предположение.

Теорема 4. Исчисления G_0^e и G_1^e равнообъемны.

Теорема 4 вытекает из замечания, теоремы 1 и леммы 3.

Вывод в исчислении G_0^e будем называть регулярным, если все применения правил для равенства в этом выводе имеют элементарные заключения.

Теорема 5. По любому выводу в исчислении G_0^e можно построить регулярный вывод в этом исчислении с той же последней секвенцией.

Теорема 6. Структурное правило сечения допустимо в исчислении G_0^e.

Теорему 6 можно доказать с помощью теорем 4 и 5, воспользовавшись методом известного доказательства Г.Генцена [1].

Все приведенные выше теоремы без труда переносятся на случай конструктивного (интуиционистского) исчисления предикатов с равенством и функциональными символами.

Литература

1. Gentzen G., Untersuchungen über das logishe Schliessen. I. "Math. Zeitschr.", 1934, 39, № 2, 176-210.
II. "Math. Zeitschr." 1934, 39, № 3, 405-431.

2. Kanger S., A simplified proof method for elementary logic. В kн. "Computer programming and formal systems. Studies in logic", 1963, 87-94.