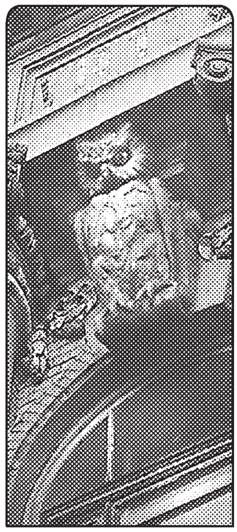
V. A. Kovalev, Yu. N. Radayev, On a form of the first variation of the action integral over a varied domain, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2014, Volume 14, Issue 2, 199–209

DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-2-199-209

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ



МЕХАНИКА

УДК 539.374

ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ ПЕРВОЙ ВАРИАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ФУНКЦИОНАЛА ДЕЙСТВИЯ ПО РАСТУЩЕЙ ОБЛАСТИ

В. А. Ковалев[1], Ю. Н. Радаев[2]

[1]Доктор физико-математических наук, профессор кафедры управления проектами и инвестициями, Московский городской университет управления Правительства Москвы, kovalev.kam@gmail.com

[2]Доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

В работе рассматриваются полевые теории механики и физики континуума, основой которых выступает принцип наименьшего действия. Действие в формулировках указанного принципа представляет собой интегральный функционал, варьирование которого осуществляется по физическим полевым переменным при неварьируемых пространственно-временных координатах. Однако теория вариационных симметрий действия и само понятие об инвариантных вариационных функционалах требует привлечения более широких способов варьирования, включающих трансформацию области интегрирования, т. е. изменение пространственно-временных координат. Последнее обстоятельство характерно также при выводе «естественных» граничных условий на неизвестных поверхностях сильного разрыва поля, границах соприкосновения различных фаз и иных неизвестных a priori поверхностей, варьирование которых допускается принципом наименьшего действия. Опираясь на теорию однопараметрических групп преобразований, в работе получены общие формы первой вариации действия при трансформациях пространственно-временных координат и физических полей с помощью групп преобразований, присущих четырехмерным формулировкам полевых теорий физики и механики. При этом учитываются «навязанные» граничные условия на поверхности, ограничивающей варьируемую область.

Ключевые слова: поле, действие, принцип наименьшего действия, уравнения поля, группа преобразований, группа Ли, инфинитезимальный генератор, вариация, варьируемая область, ограничение.

1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ: ПОЛЕВЫЕ ТЕОРИИ МЕХАНИКИ И ФИЗИКИ КОНТИНУУМА

Современная механика и физика сплошных деформируемых сред по целому ряду направлений может развиваться только на основе теоретико-полевого подхода. Это обстоятельство характерно для сложных континуумов с экстрастепенями свободы и нелокальностью соответствующих математических представлений. Теории поля обладают одним неоспоримым аналитическим преимуществом — возможностью их вывода из одного вариационного функционала. Важными элементами являются также ковариантность уравнений поля и наличие вариационных симметрий поля. Последние позволяют находить законы сохранения, которые выступают в роли «первых интегралов» дифференциальных уравнений поля.

Классические теории поля (см., например, монографии [1, 2]) основываются на предположении о том, что непрерывное физическое поле математически представляется некоторым интегральным функционалом $\mathfrak{I}$, который по историческим причинам называется действием:

$$\mathfrak{I} = \int \mathscr{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \ldots, X^\beta) d^4 X. \tag{1.1}$$

Здесь характерная для теории поля символика, развитая в [1, 2], имеет следующий смысл: $\mathscr{L}$ — «естественная» плотность лагранжиана (плотность действия); φ^k — упорядоченный массив физических полевых переменных; X^β $(\beta = 1, 2, 3, 4)$ — четыре пространственно-временные координаты[1]. Заметим, что в традиционных текстах, посвященных классической теории поля, действие и функционал действия обычно обозначаются через S.

Под символом d^4X в формуле (1.1) мы понимаем «естественный» пространственно-временной элемент объема

$$d^4X = dX^1 dX^2 dX^3 dX^4. \tag{1.2}$$

Поэтому $\mathscr{L}$ — «естественная» плотность лагранжиана. Инвариантный (собственный) элемент объема $d^4\tau$ — четырехмерного пространственно-временного многообразия — определяется согласно

$$d^4\tau = \sqrt{g}\, dX^1 dX^2 dX^3 dX^4, \tag{1.3}$$

где g — определитель (точнее, его абсолютная величина) матрицы, составленной из метрических коэффициентов пространственно-временного многообразия $g_{\alpha\beta}$. В том случае, когда метрика пространства – времени гиперболична, обычно вместо $\sqrt{g}$ пишут $\sqrt{-g}$. Часто для краткости применяется также сокращенное обозначение $\sqrt{\ }$.

Через ∂_β в математическом оформлении действия, данном (1.1) и далее, обозначается оператор *полного* дифференцирования по пространственно-временной координате X^β; в соответствии с цепным правилом дифференциального исчисления находим:

$$\partial_\beta = \partial_\beta^{\mathrm{expl}} + \sum_{s \geq 0} \left(\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \ldots \partial_{\alpha_s} \partial_\beta \varphi^l\right) \frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \ldots \partial_{\alpha_s} \varphi^l)}, \tag{1.4}$$

где символом $\partial_\beta^{\mathrm{expl}}$ указывается оператор *частного* дифференцирования по *явному* вхождению переменной X^β.

В теориях поля лагранжиан $\mathscr{L}$ всегда приходится рассматривать как функцию пространственно-временных координат, физических полей и градиентов физических полей:

$$\varphi^s, \partial_{\alpha_1} \varphi^s, \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \varphi^s, \ldots, X^\gamma. \tag{1.5}$$

Для теории поля числовая *величина* действия не столь важна, как его аналитическая *форма*, задаваемая лагранжианом $\mathscr{L}$, который определяется (помимо всего прочего) выбором тех или иных координатных систем в пространственно-временном многообразии и математического представления полевых переменных. Поэтому нигде не может возникнуть необходимость дальнейшей спецификации области интегрирования в определении интеграла действия. Вот почему мы не будем явно указывать область интегрирования в (1.1) и вообще не будем каким-то образом ее специфицировать, тем более что она будет предполагаться варьируемой. С тем чтобы отличать интегралы по области от интегралов по границе области, границу неспецифицированной 4-области интегрирования (в данном случае — замкнутая трехмерная гиперповерхность в четырехмерном пространства – времени) будем обозначать символом ∂.

[1]В абстрактном случае можно развивать теории поля на M-мерном многообразии. Большинство фундаментальных положений теории поля обобщается на случай пространства – времени с произвольным числом пространственных измерений. Четырехмерное риманово пространство является важнейшей моделью пространства – времени, достаточной для развития теории поля с необходимой степенью полноты. Как убедительно показывает развитие физики, четырехмерное пространство с римановой геометрией является наилучшим приближением в понимании реальных свойств пространства – времени.

Согласно принципу наименьшего действия действительное поле реализуется таким образом, что действие оказывается экстремальным, т. е. первая вариация действия обращается в нуль для всех допустимых вариаций физических полей φ^k:

$$\delta\mathfrak{I} = 0. \tag{1.6}$$

Здесь *не подвергаются* варьированию пространственно-временные координаты X^β и 4-область интегрирования.

Принцип наименьшего действия позволяет сформулировать задачу о вычислении поля внутри некоторой 4-области как вариационную задачу об отыскании экстремумов интегрального функционала (1.1). В том случае, когда лагранжиан $\mathscr{L}$ зависит от градиентов переменных поля порядка не выше первого, вариациям физических полей φ^k при неварьируемых пространственно-временных координатах отвечает вариация действия:

$$\delta\mathfrak{I} = \int \left\{ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^k}\delta\varphi^k + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\partial_\beta(\delta\varphi^k) \right\} d^4X \tag{1.7}$$

или, выделяя характерное для такого рода преобразований дивергентное слагаемое,

$$\delta\mathfrak{I} = \int \left\{ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \right\} \delta\varphi^k d^4X + \int \partial_\beta \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\delta\varphi^k \right) d^4X. \tag{1.8}$$

Стационарность действия (при произвольных допустимых вариациях поля) необходимо влечет уравнения Эйлера – Лагранжа (динамические уравнения, или дифференциальные уравнения поля):

$$\mathscr{E}_k(\mathscr{L}) \equiv \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} = 0. \tag{1.9}$$

Действительное физическое поле (при условии его гладкости) должно удовлетворять системе уравнений Эйлера – Лагранжа.

Обобщение уравнений Эйлера – Лагранжа на тот случай, когда плотность лагранжиана зависит от частных производных порядка выше первого, имеет следующий вид:

$$\mathscr{E}_k(\mathscr{L}) \equiv \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} + \partial_\gamma\partial_\beta\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k)} - \cdots = 0. \tag{1.10}$$

Закончим этот параграф работы одним важным замечанием. Если в вариационном функционале действия с самого начала использовать инвариантный элемент объема, то тогда в уравнениях поля под функцией Лагранжа следует понимать не $\mathscr{L}$, а $\sqrt{\ }\mathscr{L}$. Мы принимаем следующее соглашение: в последующем изложении символ $\mathscr{L}$ служит в качестве сокращенного обозначения для $\sqrt{\ }\mathscr{L}$. Таким образом, в рамках принятого соглашения символ $\mathscr{L}$ *не будет* указывать на плотность по отношению к инвариантному элементу объема пространственно-временного многообразия. Величина $\mathscr{L}$ в уравнениях поля будет, как это принято в исчислении вариаций, являться плотностью по отношению к «естественному» элементу объема. Как уже отмечалось выше, величину $\mathscr{L}$ можно поэтому называть «естественной» плотностью лагранжиана. Следовательно, в вариационном интеграле действия с самого начала следует выполнить замену

$$\sqrt{\ }\mathscr{L} \to \mathscr{L}, \tag{1.11}$$

а в дифференциальных уравнениях поля — обратную замену

$$\mathscr{L} \to \sqrt{\ }\mathscr{L}. \tag{1.12}$$

2. ФОРМАЛИЗМ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП ЛИ

Оперирование с различными формами первой вариации интегрального функционала действия существенно упрощается, если воспользоваться теорией однопараметрических групп преобразований, составляющей основу группового анализа дифференциальных уравнений. Изложение соответствующего круга вопросов имеется в монографии [3]. Необходимые сведения могут быть почерпнуты также из книг [4, 5].

Введем непрерывную однопараметрическую группу геометрических преобразований зависимых и независимых переменных (группу Ли) в форме разложения по степеням скалярного параметра ε:

$$\begin{aligned} \widetilde{X}^{\beta} &= \mathscr{X}^{\beta}(\varphi^s, X^{\gamma}, \varepsilon) = X^{\beta} + \varepsilon\xi^{\beta}(\varphi^s, X^{\gamma}) + \dots, \\ \widetilde{\varphi}^k &= \Phi^k(\varphi^s, X^{\gamma}, \varepsilon) = \varphi^k + \varepsilon h^k(\varphi^s, X^{\gamma}) + \dots, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где при $\varepsilon = 0$ выполняются условия

$$\mathscr{X}^{\beta}(\varphi^s, X^{\gamma}, \varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = X^{\beta}, \quad \Phi^k(\varphi^s, X^{\gamma}, \varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = \varphi^k.$$

Преобразования (2.1) предполагаются обратимыми. При $\varepsilon = 0$ получается тождественное преобразование. Последовательное выполнение двух преобразований равносильно применению третьего преобразования того же вида (2.1). Ясно, что для общего однопараметрического семейства точечных преобразований это свойство может не выполняться. Именно оно является ключевым признаком, отличающим произвольное однопараметрическое семейство преобразований от однопараметрической группы преобразований. Явно выписанные члены определяют инфинитезимальное преобразование (2.1); ξ^{β}, h^k — инфинитезимальные образующие однопараметрической группы Ли (2.1).

Полные вариации переменных φ^s, X^{γ} пропорциональны инфинитезимальным образующим:

$$\xi^{\gamma} = \frac{\delta X^{\gamma}}{\varepsilon}, \qquad h^s = \frac{\delta\varphi^s}{\varepsilon}. \tag{2.2}$$

Группа преобразований (2.1) индуцирует касательное векторное поле, которое определяется компонентами [3, с. 55]

$$\varsigma = (\xi^{\alpha}(\varphi^s, X^{\gamma}), h^k(\varphi^s, X^{\gamma})). \tag{2.3}$$

Компоненты касательного векторного поля зависят (как это и отражено в принятых обозначениях) от переменных φ^s, X^{γ}.

Следуя Ли, введем символ инфинитезимального преобразования (2.1), представляющий собой дифференциальный оператор первого порядка:

$$\varsigma\cdot\partial = \xi^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha}}\right)_{\text{expl}} + h^j\frac{\partial}{\partial\varphi^j}, \tag{2.4}$$

действие которого на заданную дифференцируемую функцию $F(\varphi^k, X^{\beta})$ дается формулой

$$(\varsigma\cdot\partial)F = \xi^{\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial X^{\alpha}}\right)_{\text{expl}} + h^j\frac{\partial F}{\partial\varphi^j}.$$

Здесь частные дифференцирования по независимым переменным X^{α} производятся лишь по их *явным* вхождениям, что мы будем отмечать символом expl при соответствующей частной производной. В противном случае дифференцирование по координате X^{α} будет считаться полным. Мы будем пользоваться компактными символами

$$\partial_{\alpha}, \quad \partial_{\alpha}^{\text{expl}}$$

для указания на полное или частное (по явным вхождениям переменной X^{α}) дифференцирование.

Оператор (2.4) называют также инфинитезимальным оператором группы (2.1) (см. [3, с. 55]). Коэффициенты при операторах частного дифференцирования в (2.4) называются координатами (или компонентами) инфинитезимального оператора. В приложениях группового анализа наиболее эффективным оказывается использование инфинитезимального оператора группы (2.4) вместо самой группы (2.1).

По заданному инфинитезимальному оператору (или касательному полю) однопараметрическая группа преобразований (2.1) восстанавливается единственным образом (с точностью до замены параметра ε). Для этого необходимо найти решение задачи Коши для автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\widetilde{X}^\alpha}{d\tau} &= \xi^\alpha(\widetilde{X}^\gamma, \widetilde{\varphi}^k), \\ \frac{d\widetilde{\varphi}^s}{d\tau} &= h^s(\widetilde{X}^\gamma, \widetilde{\varphi}^k), \end{aligned} \tag{2.5}$$

где τ — канонический параметр группы, с начальными данными

$$\widetilde{X}^\alpha\Big|_{\tau=0} = X^\alpha, \quad \widetilde{\varphi}^s|_{\tau=0} = \varphi^s.$$

В дальнейшем изложении предполагается, что параметр ε является каноническим параметром однопараметрической группы преобразований (2.1).

Таким образом, однопараметрическая группа преобразований (в отличие от более общих однопараметрических семейств непрерывных точечных преобразований) полностью определяется своим инфинитезимальным «следом». Это утверждение составляет содержание одной из теорем Ли.

Действие однопараметрической группы преобразований (2.1) можно распространить (продолжить) также и на частные производные произвольного, сколь угодно высокого порядка, считая их *дополнительными* к φ^j, X^α координатами в продолженном пространстве. Оно вычисляется как результат замены переменных, выполненной согласно (2.1). Действительно, преобразования вида (2.1) трансформируют функции $\varphi^j(X^\alpha)$ в новые функции $\widetilde{\varphi}^j(\widetilde{X}^\alpha)$, поскольку, подставляя в первую группу соотношений (2.1) зависимости $\varphi^s = \varphi^s(X^\alpha)$, можно выразить из указанных соотношений «старые» независимые переменные X^α через «новые» независимые переменные $\widetilde{X}^\alpha$, а затем с помощью второй группы соотношений (2.1) — «новые» полевые переменные $\widetilde{\varphi}^k$ через «новые» независимые переменные $\widetilde{X}^\alpha$. После этого можно, используя «новый» набор зависимых и независимых переменных, вычислить частные производные $\widetilde{\partial}_{\alpha_1}\widetilde{\varphi}^k$, $\widetilde{\partial}_{\alpha_1}\widetilde{\partial}_{\alpha_2}\widetilde{\varphi}^k$, $\ldots$. Все это позволяет ввести один, два, три и т.д. раза продолженные однопараметрические группы преобразований и говорить о преобразовании как независимых переменных $X^\gamma \to \widetilde{X}^\gamma$ и функций $\varphi^s \to \widetilde{\varphi}^j$, так и всего дифференциального комплекса

$$\begin{gathered} \varphi^s, \partial_{\alpha_1}\varphi^s, \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\varphi^s, \ldots, \\ \downarrow \\ \widetilde{\varphi}^s, \widetilde{\partial}_{\alpha_1}\widetilde{\varphi}^s, \widetilde{\partial}_{\alpha_1}\widetilde{\partial}_{\alpha_2}\widetilde{\varphi}^s, \ldots \end{gathered} \tag{2.6}$$

под действием группового преобразования (2.1).

В дальнейшем нам будут нужны продолжения не самой однопараметрической группы преобразований преобразования (2.1), а продолжения ее инфинитезимального оператора (2.4).

Инфинитезимальный оператор один раз продолженной группы (или первое продолжение инфинитезимального оператора (2.4)) имеет вид

$$\underset{1}{\varsigma} \cdot \partial = \xi^\gamma \left(\frac{\partial}{\partial X^\gamma}\right)_{\mathrm{expl}} + h^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j} + h^k_\alpha \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha \varphi^k)}, \tag{2.7}$$

где дополнительные координаты h^k_α зависят от координат продолженного пространства и выражаются согласно формулам первого продолжения [3, с. 58]

$$h^l_\alpha = \left(\frac{\partial h^l}{\partial X^\alpha}\right)_{\mathrm{expl}} + (\partial_\alpha \varphi^s)\frac{\partial h^l}{\partial \varphi^s} - (\partial_\sigma \varphi^l)\left(\left(\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial X^\alpha}\right)_{\mathrm{expl}} + (\partial_\alpha \varphi^k)\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial \varphi^k}\right). \tag{2.8}$$

Можно придать формулам для вычисления дополнительных координат инфинитезимального оператора h^k_α несколько иную форму, отражающую их рекуррентный характер, если ввести *усеченный* оператор $\underset{1}{D}_\alpha$ «полного» дифференцирования по независимой переменной с номером α:

$$h^l_\alpha = \underset{1}{D}_\alpha(h^l) - (\partial_\sigma \varphi^l)\underset{1}{D}_\alpha(\xi^\sigma), \tag{2.9}$$

где

$$\underset{1}{D}_\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial X^\alpha}\right)_{\mathrm{expl}} + (\partial_\alpha \varphi^k)\frac{\partial}{\partial \varphi^k}. \tag{2.10}$$

Ясно, что можно также вести речь о втором продолжении однопараметрической группы преобразований (2.1) и ее инфинитезимальном операторе $\underset{2}{\varsigma}\cdot\partial$, который имеет вид

$$\underset{2}{\varsigma}\cdot\partial = \underset{1}{\varsigma}\cdot\partial + h^l_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\varphi^l)}, \tag{2.11}$$

где

$$h^l_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial h^l_\alpha}{\partial X^\beta}\right)_{\text{expl}} + (\partial_\beta\varphi^k)\frac{\partial h^l_\alpha}{\partial\varphi^k} + (\partial_\sigma\partial_\beta\varphi^k)\frac{\partial h^l_\alpha}{\partial(\partial_\sigma\varphi^k)} - (\partial_\sigma\partial_\alpha\varphi^l)\left(\left(\frac{\partial\xi^\sigma}{\partial X^\beta}\right)_{\text{expl}} + (\partial_\beta\varphi^k)\frac{\partial\xi^\sigma}{\partial\varphi^k}\right). \tag{2.12}$$

Эта же формула с использованием оператора $\underset{2}{D}_\beta$ представляется как

$$h^l_{\alpha\beta} = \underset{2}{D}_\beta(h^l_\alpha) - (\partial_\sigma\partial_\alpha\varphi^l)\underset{1}{D}_\beta(\xi^\sigma), \tag{2.13}$$

где

$$\underset{2}{D}_\beta = \underset{1}{D}_\beta + (\partial_\sigma\partial_\beta\varphi^k)\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma\varphi^k)}. \tag{2.14}$$

Приведем также формулу для n-го продолжения инфинитезимального оператора однопараметрической группы преобразований (2.1):

$$\underset{n}{\varsigma}\cdot\partial = \underset{n-1}{\varsigma}\cdot\partial + h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_n}\varphi^l)}, \tag{2.15}$$

где

$$h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\beta} = \underset{n}{D}_\beta(h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}) - (\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_{n-1}}\partial_\sigma\varphi^l)\underset{1}{D}_\beta(\xi^\sigma), \tag{2.16}$$

$$\underset{n}{D}_\beta = \underset{n-1}{D}_\beta + (\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_{n-1}}\partial_\beta\varphi^l)\frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_{n-1}}\varphi^l)}. \tag{2.17}$$

Заметим, что в некоторых случаях удобно использовать обозначения

$$\left(\frac{\partial}{\partial X^\beta}\right)_{\text{expl}} = \partial^{\text{expl}}_\beta, \quad \frac{\partial}{\partial\varphi^l} = \underset{0}{\partial}_l, \quad \frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\varphi^l)} = \underset{s}{\partial}{}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}_l \tag{2.18}$$

с целью наиболее обозримого представления формул. Так, формула продолжения (2.15) приобретет следующий наиболее компактный вид:

$$\underset{n}{\varsigma}\cdot\partial = \underset{n-1}{\varsigma}\cdot\partial + h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\underset{n}{\partial}{}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}_l, \tag{2.19}$$

где

$$h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\beta} = \underset{n}{D}_\beta(h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}) - (\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_{n-1}}\partial_\sigma\varphi^l)\underset{1}{D}_\beta(\xi^\sigma), \tag{2.20}$$

$$\underset{n}{D}_\beta = \underset{n-1}{D}_\beta + (\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_{n-1}}\partial_\beta\varphi^l)\underset{n-1}{\partial}{}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}_l. \tag{2.21}$$

Оператор Эйлера – Лагранжа можно записать символически в форме

$$\mathscr{E}_l = \sum_{s\geq 0}(-1)^s\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\underset{s}{\partial}{}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}_l. \tag{2.22}$$

В такого рода суммах при $s=0$ подразумевается слагаемое $\underset{0}{\partial}_l$, обозначающее частное дифференцирование по полевой переменной φ^l.

Для координат продолженных операторов может быть получена развернутая формула:

$$h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\beta} = \left(\partial^{\text{expl}}_\beta + \sum_{s=0}^{n-1}(\partial_{\beta_1}\partial_{\beta_2}\ldots\partial_{\beta_s}\partial_\beta\varphi^k)\,\underset{s}{\partial}{}^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s}_k\right)h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}} -$$
$$-(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_{n-1}}\partial_\sigma\varphi^l)(\partial^{\text{expl}}_\beta + (\partial_\beta\varphi^k)\underset{0}{\partial}_k)\xi^\sigma. \tag{2.23}$$

Поскольку координаты продолженных операторов $h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}$ зависят от градиентов переменных φ^k порядка не выше, чем $n-1$, то последнюю формулу можно переписать, используя операторы полного дифференцирования, в следующем виде:

$$h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\beta} = \partial_\beta h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}} - (\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_{n-1}}\partial_\sigma\varphi^l)\partial_\beta\xi^\sigma, \tag{2.24}$$

откуда последовательно имеем:

$$\begin{aligned} h^l_{\alpha_1} &= \partial_{\alpha_1}h^l - (\partial_\sigma\varphi^l)\partial_{\alpha_1}\xi^\sigma = \partial_{\alpha_1}(h^l - (\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma) + (\partial_{\alpha_1}\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma, \\ h^l_{\alpha_1\alpha_2} &= \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}(h^l - (\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma) + (\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma, \\ &\vdots \\ h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} &= \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_n}(h^l - (\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma) + (\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_n}\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Вводя обозначение (характеристика инфинитезимального оператора $\varsigma\cdot\partial$)

$$\mathscr{Q}^l = h^l - (\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma \tag{2.26}$$

для координат продолженных операторов, находим

$$h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_n}\mathscr{Q}^l + (\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_n}\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma. \tag{2.27}$$

Знание координат продолжений инфинитезимального оператора позволяет вычислить инфинитезимальную часть преобразований частных производных (2.6) как

$$\widetilde{\partial}_{\alpha_1}\widetilde{\partial}_{\alpha_2}\ldots\widetilde{\partial}_{\alpha_n}\widetilde{\varphi}^k = \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_n}\varphi^k + \varepsilon h^k_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} + \ldots\ . \tag{2.28}$$

Производя несложные вычисления, можно показать, что для заданной функции $F(\cdot)$ ее изменение $F(\widetilde{\cdot}) - F(\cdot)$ в результате смещения аргументов φ^k, X^γ, продиктованного действием группы преобразований (2.1), выражается в виде (ε — канонический параметр однопараметрической группы преобразований)

$$F(\widetilde{\cdot}) - F(\cdot) = \varepsilon(\varsigma\cdot\partial)F(\cdot) + \frac{1}{2!}\varepsilon^2(\varsigma\cdot\partial)^2F(\cdot) + \ldots\ . \tag{2.29}$$

Этот ряд называется рядом Ли. Он может быть записан в форме операторной экспоненты:

$$F(\widetilde{\cdot}) = e^{\varepsilon(\varsigma\cdot\partial)}F(\cdot). \tag{2.30}$$

Отсюда сразу же видно, что равенство $F(\widetilde{\cdot}) = F(\cdot)$ выполняется тогда и только тогда, когда $(\varsigma\cdot\partial)F(\cdot) = 0$. Функции $F(\varphi^k, X^\gamma)$, которые не изменяют своего значения в результате преобразования аргументов φ^k, X^γ согласно (2.1), т. е.

$$F(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{X}^\gamma) = F(\varphi^k, X^\gamma),$$

называются инвариантами однопараметрической группы преобразований (2.1).

Выбирая в качестве функции F последовательно переменные X^α, φ^s, получаем данные формулы группового преобразования (2.1) в виде ряда по степеням параметра ε:

$$\begin{aligned} \widetilde{X}^\alpha &= X^\alpha + \varepsilon(\varsigma\cdot\partial)X^\alpha + \frac{\varepsilon^2}{2!}(\varsigma\cdot\partial)^2X^\alpha + \ \ldots\ , \\ \widetilde{\varphi}^s &= \varphi^s + \varepsilon(\varsigma\cdot\partial)\varphi^s + \frac{\varepsilon^2}{2!}(\varsigma\cdot\partial)^2\varphi^s + \ \ldots\ , \end{aligned} \tag{2.31}$$

откуда непосредственно следует, что инфинитезимальный оператор однозначно определяет однопараметрическую группу преобразований (2.1).

Изменение «дифференциальной функции» $F(\varphi^s, \partial_{\alpha_1}\varphi^s, \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\varphi^s, \ldots, X^\beta)$, которая зависит от градиентов полевых переменных φ^k порядка не выше, чем m, вследствие преобразования ее аргументов согласно (2.1) определяется формулой

$$\begin{aligned} &\Delta F = \varepsilon(\underset{m}{\varsigma}\cdot\partial)F + \ \ldots\ . \\ &(\Delta F = F(\widetilde{\varphi}^s, \widetilde{\partial}_{\alpha_1}\widetilde{\varphi}^s, \widetilde{\partial}_{\alpha_1}\widetilde{\partial}_{\alpha_2}\widetilde{\varphi}^s, \ldots, \widetilde{X}^\beta) - F(\varphi^s, \partial_{\alpha_1}\varphi^s, \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\varphi^s, \ldots, X^\beta)). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Следовательно, вариация «дифференциальной функции» F, обусловленная вариацией ее аргументов согласно (2.1), есть

$$\frac{\delta F}{\varepsilon} = (\underset{m}{\varsigma} \cdot \partial)F, \tag{2.33}$$

где

$$\underset{m}{\varsigma} \cdot \partial = \varsigma \cdot \partial + \sum_{s=1}^{m} h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s} \frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\varphi^l)}, \tag{2.34}$$

или в сокращенных обозначениях

$$\underset{m}{\varsigma} \cdot \partial = \varsigma \cdot \partial + \sum_{s=1}^{m} h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s} \underset{s}{\partial}{}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}, \tag{2.35}$$

$$h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s} = \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}(h^l - (\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma) + (\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma. \tag{2.36}$$

Доказательство еще одного важного представления m раз продолженного инфинитезимального оператора имеется в [2]:

$$\underset{m}{\varsigma} \cdot \partial = \sum_{s=0}^{m} (\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\mathscr{Q}^l) \underset{s}{\partial}{}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s} + \xi^\sigma\partial_\sigma. \tag{2.37}$$

Из формулы (2.37), привлекая (см., например, [2])

$$\sum_{s=1}^{m} (\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\mathscr{Q}^l) \underset{s}{\partial}{}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}\mathscr{L} = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1}\partial_{\alpha_i}\mathscr{J}_i^{\alpha_i} + \mathscr{Q}^l\mathscr{E}_l(\mathscr{L}) - \mathscr{Q}^l\underset{0}{\partial}{}_l\mathscr{L}, \tag{2.38}$$

можно получить результат действия m раз продолженного инфинитезимального оператора на «дифференциальную функцию»

$$\mathscr{L}(\varphi^s, \partial_{\alpha_1}\varphi^s, \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\varphi^s, \ldots, X^\beta),$$

которая зависит от градиентов полевых переменных φ^k порядка не выше, чем m, в виде

$$(\underset{m}{\varsigma} \cdot \partial)\mathscr{L} = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1}\partial_{\alpha_i}\mathscr{J}_i^{\alpha_i} + \mathscr{Q}^l\mathscr{E}_l(\mathscr{L}) + \xi^\sigma\partial_\sigma\mathscr{L}. \tag{2.39}$$

3. ПЕРВАЯ ВАРИАЦИЯ ДЕЙСТВИЯ В СЛУЧАЕ ВАРЬИРУЕМОЙ ОБЛАСТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Варьирование интегральных функционалов с переменной областью интегрирования представляет собой самый важный технический элемент теории вариационных симметрий и законов сохранения [6]. Вывод соответствующих формул может быть выполнен, следуя, например, [7, 8]. Ниже, опираясь на теорию однопараметрических групп преобразований, рассматривается вывод формулы первой вариации интегрального функционала, считая варьируемой также область интегрирования и предполагая, что на варьируемой границе могут быть дополнительно сформулированы граничные условия того или иного вида (так называемые «навязанные» граничные условия). Рассуждения проведем в самом общем случае, когда интегральный функционал

$$\mathfrak{I} = \int \mathscr{L}(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \ldots, X^\beta)d^MX \tag{3.1}$$

определен в некоторой переменной области пространства размерности M, но плотность действия не зависит от градиентов полевых переменных выше первого порядка.

Прежде всего заметим, что

$$\delta\mathfrak{I} = \int (\delta\mathscr{L} + \mathscr{L}\partial_\sigma\delta X^\sigma)d^MX, \tag{3.2}$$

откуда на основании (2.2) и (2.33) находим:

$$\frac{\delta\mathfrak{I}}{\varepsilon} = \int ((\underset{1}{\varsigma} \cdot \partial)\mathscr{L} + \mathscr{L}\partial_\sigma\xi^\sigma)d^MX. \tag{3.3}$$

Используя, далее, формулы (2.7) (2.7) и (2.8), получаем:

$$(\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial)\mathscr{L}+\mathscr{L}\partial_\sigma\xi^\sigma=\partial_\sigma(\xi^\sigma\mathscr{L})+\mathscr{Q}^l\mathscr{E}_l(\mathscr{L})+\partial_\sigma\mathscr{K}^\sigma, \tag{3.4}$$

где

$$\mathscr{K}^\sigma=\mathscr{Q}^l\underset{1}{\partial}{}_l^\sigma\mathscr{L},$$
$$\mathscr{Q}^l=h^l-(\partial_\gamma\varphi^l)\xi^\gamma.$$

Последнее равенство можно представить в терминах исчисления вариаций, если умножить обе его части на параметр ε:

$$\overline{\delta}\varphi^l=\delta\varphi^l-(\partial_\gamma\varphi^l)\delta X^\gamma,$$

где $\overline{\delta}\varphi^l=\varepsilon\mathscr{Q}^l$ — частичная вариация полевой переменной φ^l. Полные вариации пространственно-временных координат X^β и физических полей φ^k при их преобразовании согласно (2.1) были определены выше. Полная вариация полевой переменной φ^k в данной точке пространства – времени складывается из изменения поля вследствие изменения его функциональной зависимости и изменения, вызванного перемещением δX^β в близлежащую точку пространства – времени. Поэтому мы *определяем* частичную вариацию (или вариацию формы) $\overline{\delta}\varphi^k$ полевой переменной φ^k с помощью соотношения

$$\delta\varphi^k=\overline{\delta}\varphi^k+\frac{\partial\varphi^k}{\partial X^\alpha}\delta X^\alpha. \tag{3.5}$$

В современной теории поля частичную вариацию полевой переменной принято называть локальной (а также функциональной) вариацией, а полную вариацию — субстанциональной. Второе слагаемое в правой части соотношения (3.5) можно назвать конвективной вариацией. Таким образом, частичная вариация поля под действием однопараметрической геометрической группы преобразований соответствует характеристике инфинитезимального оператора группы.

Подставляя (3.4) в (3.3), получаем

$$\delta\mathfrak{I}=\int(\partial_\sigma(\mathscr{L}\delta X^\sigma)+\overline{\delta}\varphi^l\mathscr{E}_l(\mathscr{L})+\partial_\sigma(\varepsilon\mathscr{K}^\sigma))d^MX, \tag{3.6}$$

и, полагая выполненными дифференциальные уравнения поля

$$\mathscr{E}_l(\mathscr{L})=0,$$

заключаем, что

$$\delta\mathfrak{I}=\int(\partial_\sigma(\mathscr{L}\delta X^\sigma)+\partial_\sigma(\varepsilon\mathscr{K}^\sigma))d^MX, \tag{3.7}$$

а также

$$\delta\mathfrak{I}=\int\partial_\sigma(\mathscr{L}\delta X^\sigma+\varepsilon\mathscr{Q}^l\underset{1}{\partial}{}_l^\sigma\mathscr{L})d^MX. \tag{3.8}$$

Применяя затем к последнему интегралу теорему Гаусса – Остроградского, для первой вариации действия находим

$$\delta\mathfrak{I}=\oint_{\partial}\mathscr{N}_\sigma(\mathscr{L}\delta X^\sigma+\underset{1}{\partial}{}_l^\sigma\mathscr{L}\overline{\delta}\varphi^l)d^{M-1}\tau, \tag{3.9}$$

где $\mathscr{N}_\sigma$ — внешняя единичная ($\mathscr{N}_\sigma\mathscr{N}^\sigma=1$) нормаль замкнутого $M-1$-мерного многообразия ∂, ограничивающего рассматриваемую M-область; $d^{M-1}\tau$ — инвариантный элемент объема многообразия ∂. Заметим, кроме того, что в данной выше формуле $\mathscr{L}$ — плотность действия по отношению к инвариантному элементу объема M-многообразия.

Формула (3.9) может быть использована при анализе разрывных вариационных задач (т. е. тогда, когда допускаются разрывы первых производных полевых переменных при пересечении $M-1$-мерных поверхностей), в частности, при выводе обобщенных условий Эрдмана – Вейерштрасса (см., например, [9]). В разрывных вариационных задачах частичные вариации поля разрывны, а полные — непрерывны. Поэтому удобнее оперировать с полными вариациями полевых переменных. В формулу (3.9) вместо частичной вариации поля введем полную и, принимая обозначения

$$T_{\cdot\gamma}^{\sigma\cdot}=\mathscr{L}\delta_\gamma^\sigma-\partial_\gamma\varphi^l\underset{1}{\partial}{}_l^\sigma\mathscr{L},\qquad -S_{\cdot l}^{\sigma\cdot}=\underset{1}{\partial}{}_l^\sigma\mathscr{L}, \tag{3.10}$$

в результате имеем следующее компактное выражение первой вариации интегрального функционала действия:

$$\delta\mathfrak{I} = \oint\limits_{\partial} \mathscr{N}_\sigma T^{\sigma\cdot}_{\cdot\gamma} \delta X^\gamma d^{M-1}\tau - \oint\limits_{\partial} \mathscr{N}_\sigma S^{\sigma\cdot}_{\cdot l} \delta\varphi^l d^{M-1}\tau. \tag{3.11}$$

Выражение для первой вариации интегрального функционала (3.11) сразу же позволяет получить обобщенные уравнения Эрдмана – Вейерштрасса на поверхностях сильного разрыва поля. В силу непрерывности и независимости вариаций δX^γ и $\delta\varphi^l$ на неизвестной поверхности сильных разрывов полевых переменных находим следующие уравнения, связывающие скачки канонических полевых тензоров $T^{\sigma\cdot}_{\cdot\gamma}$, $S^{\sigma\cdot}_{\cdot l}$:

$$\begin{aligned} &\mathscr{N}_\sigma [T^{\sigma\cdot}_{\cdot\gamma}] = 0, \\ &\mathscr{N}_\sigma [S^{\sigma\cdot}_{\cdot l}] = 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Формула (3.11) подлежит дальнейшему преобразованию в том случае, когда вариации δX^γ и $\delta\varphi^l$ на границе варьируемой области не будут независимыми. Это происходит тогда, когда постановка вариационной задачи включает ограничения в виде «навязанных» граничных условий на границе переменной области интегрирования. В частности, на замкнутой $M-1$-мерной поверхности ∂ могут задаваться значения полевых переменных:

$$\varphi^l = \Gamma^l(X^\gamma) \qquad (\gamma = \overline{1, M}). \tag{3.13}$$

Вариации координат и полевых переменных на ∂ будут, очевидно, связаны между собой соотношениями

$$\delta\varphi^l = \frac{\partial\Gamma^l}{\partial X^\gamma}\delta X^\gamma. \tag{3.14}$$

Формула (3.11) преобразуется, следовательно, к виду

$$\delta\mathfrak{I} = \oint\limits_{\partial} \mathscr{N}_\sigma (T^{\sigma\cdot}_{\cdot\gamma} - (\partial_\gamma\Gamma^l) S^{\sigma\cdot}_{\cdot l}) \delta X^\gamma d^{M-1}\tau, \tag{3.15}$$

где все вариации δX^γ на границе варьируемой области независимы и произвольны. В силу последнего обстоятельства на основании (3.15) получаем граничные условия на ∂:

$$\mathscr{N}_\sigma (T^{\sigma\cdot}_{\cdot\gamma} - (\partial_\gamma\Gamma^l) S^{\sigma\cdot}_{\cdot l}) = 0 \qquad (\gamma = \overline{1, M}). \tag{3.16}$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00139 «Гиперболические тепловые волны в твердых телах с микроструктурой»).

Библиографический список

1. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Элементы теории поля : вариационные симметрии и геометрические инварианты. М. : Физматлит, 2009. 156 с.
2. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.
3. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1978. 400 с.
4. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М. : Мир, 1989. 639 с.
5. *Olver P. J.* Equivalence, Invariants and Symmetry. Cambridge; N. Y.; Melbourne : Cambridge University Press, 1995. 526 p.
6. *Noether E.* Invariante Variationsprobleme // Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse. 1918. H. 2. S. 235–257. (*Нетер Э.* Инвариантные вариационные задачи // Вариационные принципы механики. М. : Физматгиз, 1959. С. 611–630.)
7. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики : в 2 т. М. ; Л. : Гостехтеоретиздат, 1933. Т. 1. 528 с.
8. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. М. : Физматгиз, 1961. 228 с.
9. *Гюнтер Н. М.* Курс вариационного исчисления. М. ; Л. : Гостехтеоретиздат, 1941. 308 с.

On a Form of the First Variation of the Action Integral Over a Varied Domain

V. A. Kovalev[1], Yu. N. Radayev[2]

[1]Moscow City Government University of Management, 28, Sretenka str., 107045, Moscow, Russia, kovalev.kam@gmail.com

[2]Institute for Problems in Mechanics of RAS, 101-1, Vernadskogo ave., 119526, Moscow, Russia, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Field theories of the continuum mechanics and physics based on the least action principle are considered in a unified framework. Variation of the action integral in the least action principle corresponds variations of physical fields while space – time coordinates are not varied. However notion of the action invariance, theory of variational symmetries of action and conservation laws require a wider variation procedure including variations of the space–time coordinates. A similar situation is concerned to variational problems with strong discontinuities of field variables or other a priori unknown free boundaries which variations are not prohibited from the beginning. A form of the first variation of the action integral corresponding variations of space – time coordinates and field variables under one-parametrical transformations groups is obtained. This form is attributed to 4-dimensional covariant formulations of field theories of the continuum mechanics and physics. The first variation of the action integral over a varied domain is given for problems with constraints. The latter are formulated on unknown free boundaries.

Key words: field, action, least action principle, field equations, transformation group, Lie group, infinitesimal generator, variation, varied domain, constraint.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13-01-00139).

References

1. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Elements of the Field Theory : Variational Symmetries and Geometric Invariants*. Moscow, Fizmatlit, 2009, 156 p. (in Russian).
2. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Wave Problems of Field Theory and Thermomechanics*. Saratov, Saratov Univ. Press, 2010. 328 p. (in Russian).
3. Ovsyannikov L. V. *Group Analysis of Differential Equations*. Moscow, Nauka, 1978, 400 p. (in Russian).
4. Olver P. J. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Moscow, Mir, 1989, 639 p. (in Russian).
5. Olver P. J. *Equivalence, Invariants and Symmetry*. Cambridge ; N. Y. ; Melbourne, Cambridge University Press, 1995, 526 p.
6. Noether E. Invariante Variationsprobleme. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse, 1918, H. 2, s. 235–257. (Rus. ed. : Noether E. Invariantnye variatsionnye zadachi // Variatsionnye printsipy mekhaniki. Moscow, Fizmatgiz, 1959, pp. 611–630).
7. Courant R., Gilbert D. *Methods of Mathematical Physics : in 2 vol.* Moscow; Leningrad, Gostekhteoretizdat, 1933, vol. 1, 528 p. (in Russian).
8. Gelfand I. M., Fomin S. V. *Calculus of Variations*. Moscow, Fizmatgiz, 1961, 228 p. (in Russian).
9. Gunter N. M. *A Cours of the Calculus of Variations*. Moscow; Leningrad, Gostekhteoretizdat, 1941, 308 p. (in Russian).

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАРАЩИВАНИЕ ПОЛОГО ГИПЕРУПРУГОГО ЦИЛИНДРА

С. А. Лычев[1], А. В. Марк[2]

[1]Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, lychevsa@mail.ru

[2]Кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, A-V-Mark@yandex.ru

Исследуется напряженно-деформированное состояние растущего цилиндра из несжимаемого упругого материала типа Муни – Ривлина при конечных деформациях. Деформации полагаются осесимметричными и не изменяющимися вдоль оси цилиндра. Рассмотрены дискретные и непрерывные режимы наращивания. Построены соответствующие решения краевых задач. На основе вычислений показана сходимость решения для дискретного наращивания к решениям задач для непрерывного наращивания при увеличении количества слоев и уменьшения их толщины в условиях фиксированного финального объема.

Ключевые слова: аддитивные технологии, растущие тела, конечные деформации, гиперупругость, непрерывное наращивание, дискретное наращивание.

