О. М. Фоменко, Суммы трех квадратов в мнимых квадратичных полях,
Алгебра и анализ, 1991, том 3, выпуск 5, 190–212

https://www.mathnet.ru/aa285

Алгебра и анализ
Том 3 (1991), вып. 5

СУММЫ ТРЕХ КВАДРАТОВ В МНИМЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ПОЛЯХ

О. М. Фоменко

В статье доказана асимптотическая формула, связанная с представлением целых чисел мнимого квадратичного поля суммой трех квадратов целых чисел этого же поля.

§ 1. Введение. Формулировка основных результатов

1.1. Пусть K — не вполне вещественное поле алгебраических чисел степени $\geqslant 2$, J — кольцо всех целых чисел ν в K, J_2 — кольцо, порожденное квадратами всех целых чисел из K.

Проблемой представимости целых чисел ν суммами квадратов целых чисел из K интересовался еще Зигель [1,2]. Наиболее существенные результаты получены им в работе [2]. В частности, в [2] были доказаны следующие результаты: если K — не вполне вещественное поле алгебраических чисел, то все вполне положительные числа в J_2 являются суммами пяти квадратов целых чисел поля. Кольца J_2 и J совпадают в том и только в том случае, если дискриминант поля K нечетен.

Для доказательства Зигель перенес круговой метод Харди–Литтлвуда на поля алгебраических чисел; с помощью этого метода он получил некоторое количественное утверждение, из которого следует факт представимости. Зигель предположил, что четырех квадратов целых чисел в указанной задаче достаточно. Для мнимых квадратичных полей $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, $D > 0$ бесквадратно, это предположение доказали Кон и Полл [3].

Пусть $\omega = \sqrt{-D}$, если $-D \equiv 2,3 (\operatorname{mod} 4)$; $\omega = \frac{1+\sqrt{-D}}{2}$, если $-D \equiv 1 (\operatorname{mod} 4)$. Имеем

$$J = \{\alpha + \beta\omega | \alpha \in \mathbb{Z}, \beta \in \mathbb{Z}\};$$

$J_2 = J$, если $-D \equiv 1 (\operatorname{mod} 4)$;
$J_2 = \{\alpha + \beta\omega | \alpha \in \mathbb{Z}, \beta = 2\beta_0,\ \beta_0 \in \mathbb{Z}\}$, если $-D \equiv 2,3 (\operatorname{mod} 4)$.

Метод Кона и Полла основан на формулах для количества представлений бинарной формы суммой четырех квадратов линейных форм.

Изучаемые здесь задачи относятся к так называемому „неопределенному случаю“; последнее означает, что рассматривается квадратичная форма над числовым полем K, причем либо поле K не является вполне вещественным, либо форма не является вполне определенной. Созданная в 50–60-е годы Айхлером и Кнезером теория спинорных родов оказалась весьма эффективной в „неопределенном

Ключевые слова: квадратичная форма, дзета-функция параболической формы, коэффициент Фурье новой формы, тригонометрическая сумма.

случае". В частности, с помощью этой теории была доказана [4] упомянутая выше гипотеза Зигеля о четырех квадратах; о некоторых других приложениях см. ниже.

Сформулированные результаты о четырех квадратах носят качественный характер (доказан факт представимости). Однако для $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ можно получить и количественные факты [5,6].

Пусть число $\alpha + \beta\omega \in J_2$. Рассмотрим задачу

$$\alpha + \beta\omega = \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i\omega)^2, \tag{1.1}$$

где $x_i + y_i\omega \in J$. Рассмотрим величину $A_n(f, D, \alpha + \beta\omega) < \infty$ — количество представлений $\alpha + \beta\omega$ в виде (1.1) с условием $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 = f$. Назовем f параметром представления (1.1). Таким образом, $A_n(f, D, \alpha + \beta\omega)$ есть количество представлений $\alpha + \beta\omega$ суммой n квадратов чисел из J с параметром представления f. Наряду с $A_n(f, D, \alpha + \beta\omega)$ естественно изучать величину

$$\sum_{f \leqslant x} A_n(f, D, \alpha + \beta\omega), \quad x \to \infty.$$

Сформулируем результат из [5], касающийся случая $n = 4$. Ограничимся для определенности рассмотрением полей $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D}), -D \equiv 2, 3 (\operatorname{mod} 4)$. Пусть $\alpha + \beta\sqrt{-D} \in J_2$; для простоты предполагаем, что $(\alpha, \beta) = 1$, где $\beta = 2\beta_0$ четное. Легко видеть, что $A_4(f, D, \alpha + \beta\omega)$ равно количеству представлений $r_4(\phi)$ бинарной формы $\phi = [a, 2t_0, b] = ax^2 + 2t_0xy + by^2$, где $a = Df + \alpha$, $2t_0 = \beta$, $b = f$, суммой четырех квадратов линейных форм (от x, y) с целыми рациональными коэффициентами. Формулы для $r_4(\phi)$ получали различные авторы; в окончательной форме такую формулу получили Полл и Таусская [7]. Пусть $r_3(n)$ — количество представлений целого положительного n суммой трех квадратов чисел из $\mathbb{Z}$. Из формулы Полла и Таусской следует, что

$$A_4(f, D, \alpha + \beta\omega) = 8 \cdot r_3((Df + \alpha)f - \beta_0^2).$$

Величину

$$\frac{1}{8}\sum_{f \leqslant x} A_4(f, D, \alpha + \beta\omega)$$

можно поэтому интерпретировать как количество целых точек (X_1, X_2, X_3, f) с условием $0 \leqslant f \leqslant x$ на четырехмерном гиперболоиде

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - Df^2 - \alpha f + \beta_0^2 = 0.$$

Применяя результаты работы [8], получаем асимптотическую формулу [5]

$$\sum_{f \leqslant x} A_4(f, D, \alpha + \beta\omega) = Cx^2 + O(x^{2-\gamma}), \tag{1.2}$$

где γ — любая постоянная с условием $0 < \gamma < \frac{1}{9}$, $C > 0$ — некоторая постоянная.

Используя спектральную теорию автоморфных функций на трехмерном гиперболическом пространстве [9], можно доказать (1.2) с γ — любой постоянной с условием $0 < \gamma < \frac{1}{2}$. Очень частные результаты типа (1.2) были получены в [10, 11].

Значительно труднее случай $n = 3$. Еще в 1940 г. Нивен опубликовал (некорректную как выяснилось впоследствии) работу [12], в которой получил следующий результат: любое число мнимого квадратичного поля $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, принадлежащее J_2, является суммой трех квадратов целых чисел из J. Первым этот результат опроверг Зигель [2], который показал, что число 7 не представляется суммой трех квадратов целых чисел из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, $-D \equiv 1 (\operatorname{mod} 8)$. Впоследствии Мозер [13] показал, что -1 есть сумма четырех, но не трех, квадратов целых чисел в полях $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, $-D \equiv 1 (\operatorname{mod} 8)$. В работе [14] было показано, что в поле $\mathbb{Q}(\sqrt{-155})$ число 31 не является суммой трех квадратов целых чисел из этого поля. Этот факт опровергает утверждения работы [15], которая, кстати, не содержит доказательств сформулированных в ней результатов о представимости чисел суммами трех квадратов. В работах [14, 16, 17] приведено много примеров, связанных с непредставимостью целых чисел квадратичных полей суммой трех квадратов целых чисел этих полей.

Метод, используемый в этих работах, — развитие теории спинорных родов Айхлера–Кнезера.

В работе [16] описаны все поля $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, $D > 0$ бесквадратно, каждое целое число которых может быть выражено в виде суммы трех квадратов целых чисел; это верно для тех и только тех D, которые $\equiv 3 (\operatorname{mod} 8)$ и которые не допускают положительной собственной факторизации $D = d_1 d_2$ (т.е. $d_i > 1$), обладающей свойствами:

(1) $d_1 \equiv 5, 7 (\operatorname{mod} 8)$ и

(2) $(d_2|d_1) = 1$.

В работе [16] решается также задача, будет или нет конкретное целое алгебраическое число $c \in \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ представляться суммой трех квадратов целых чисел; а именно дается набор условий, которые позволяют судить (хотя бы в принципе) о такой представимости или непредставимости. Пользуясь этим результатом, авторы работы [16] получают, например, такой факт: пусть $D = pq$, где p, q — простые числа, $(p|q) = 1$, $p \equiv 5 (\operatorname{mod} 8)$, $q \equiv 7 (\operatorname{mod} 8)$. Тогда число $c = q$ не представляется в виде суммы трех квадратов.

В работе [18] ряд результатов о представимости целых чисел поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ суммой трех квадратов целых чисел этого поля доказан очень простыми методами. В частности, там получен следующий факт: пусть D есть сумма двух квадратов целых рациональных чисел. Тогда все элементы из J_2 представимы суммой трех квадратов целых чисел из J.

Первые асимптотические результаты для $n = 3$ получены в работах автора [5, 6]. В работе [6] для упрощения изложения взят случай $D \equiv 2 (\operatorname{mod} 4)$. Показано, что

$$\sum_{f \leqslant x} A_3(f, D, 1) = 12 \cdot \frac{L(1, \chi_{4D}) \cdot L(1, \chi_4)}{L(2, \chi_{4D}\chi_4)} x + O(x^{\frac{8}{9}+\varepsilon}), \tag{1.3}$$

где $\chi_{4D}(*) = (\frac{D}{*})$, $\chi_4(*) = (\frac{-1}{*})$; показано также, что

$$\sum_{f \leqslant x} A_3(f, D, -1) = 6 \cdot \rho(D) \cdot \frac{L(1, \chi_{4D})}{L(2, \chi_{4D})} x \log x + Cx + O(x^{\frac{8}{9}+\varepsilon}), \tag{1.4}$$

где $\chi_{4D}(*) = (\frac{-D}{*})$, $\rho(D) = 2$ для $D \equiv 2 (\operatorname{mod} 8)$ и $\rho(D) \equiv 1$ для $D \equiv -2 (\operatorname{mod} 8)$, C — некоторая явно вычисляемая постоянная; $L(s, \chi)$ — L-ряд Дирихле с характером χ.

Было показано, что аналогично можно рассматривать и суммы

$$\sum_{f\leqslant x} A_3(f,D,\alpha),$$

где $\alpha\in\mathbb{Z}$. В процессе преобразования этих сумм мы приходим к аналогам классической суммы Эстермана

$$\sum_{n\leqslant x} r_2(n)r_2(n+k), \tag{1.5}$$

где $r_2(n)$ — количество представлений целого положительного n суммой двух квадратов чисел из $\mathbb{Z}$. Оценки остаточных членов зависят от оценок сумм Клостермана. Вейлевские оценки сумм Клостермана дают степенные понижения остатков в (1.3), (1.4).

Спектральная теория автоморфных функций позволяет понизить показатель степени 8/9 в остаточных членах формул (1.3), (1.4) (см. [6], ч.II).

1.2. В этом пункте сформулируем основные результаты настоящей работы. Получить асимптотическую формулу для суммы

$$\sum_{f\leqslant x} A_3(f,D,\alpha+\beta\omega)$$

при $\beta\neq 0$ значительно сложнее, чем в случае $\beta=0$, и это требует других средств. Для большей четкости изложения мы сначала докажем теорему 1, в которой рассматривается частный случай $D=2$, $\alpha=0$, $\beta=2$, а затем рассмотрим и общий случай $\alpha+\beta\omega$, ограничившись для простоты полями с $D\equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$ (теорема 2).

Такой способ изложения вполне естественен, поскольку при доказательстве теоремы 2 мы разбиваем последовательность $f\leqslant x$ на прогрессии, а потом внутри каждой такой прогрессии применяем метод доказательства теоремы 1.

Теорема 1. *Имеет место асимптотическая формула*

$$\sum_{f\leqslant x} A_3(f,2,2\sqrt{-2}) = 12\cdot \check{c}_1\cdot L(1)\cdot x + O\Big(\frac{x(\log\log x)^{9/2}}{\log^{\delta} x}\Big),$$

где $c_1>0$ — явно задаваемая константа (см. п.2.6); $\delta=\frac{2-\sqrt{2}}{2}=0,292\ldots$; $L(s)$ — дзета-функция, ассоциированная с новой формой $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n$, $q=e^{2\pi i\tau}$, $a(1)=1$, веса 1 и некоторого характера ε относительно некоторой конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(2^{\varkappa})$, $\varkappa>0$, причем при $p\neq 2$ (p простое)

$$a(p)=\sigma(p)=\sum_{\substack{o<f\leqslant p,\\ 2f^2-1\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)}} \Big(\frac{-f}{p}\Big)$$

(подробности см. в п.2.5); известно, что $L(1)>0$.

Теорема 2. (i) *Пусть $D=4D_0+2>0$ — бесквадратное число; $\beta=2\beta_0$, где β_0 нечетно; $(\alpha,2\beta_0)=1$; $\alpha^2+D\beta^2\neq\Box$. Тогда имеем*

$$\sum_{f\leqslant x} A_3(f,D,\alpha+\beta\sqrt{-D}) = c_2\cdot L(1)\cdot x + O\Big(\frac{x(\log\log x)^{\frac{13}{2}}}{\log^{\delta} x}\Big), \tag{1.6}$$

где $c_2 \geqslant 0$ — некоторая константа; $\delta = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 0,292\ldots$; $L(s)$ — дзета-функция, ассоциированная с новой формой $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n$, $q = e^{2\pi i\tau}$, $a(1) = 1$, веса 1 и некоторого характера ε относительно некоторой конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(N)$, причем при $p \nmid D\beta(\alpha^2 + D\beta^2)$ (p простое)

$$a(p) = \sigma(p) = \sum_{\substack{0<f\leqslant p, \\ (Df+\alpha)f-\beta_0^2\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)}} \left(\frac{-f}{p}\right)$$

(подробности см. в п.2.5); известно, что $L(1) > 0$.

(ii). *При дополнительных условиях $\alpha \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$, $(\beta_0, 2D + \alpha) = 1$ имеем $c_2 > 0$.*

Замечание. Мы выбрали простейшее условие, гарантирующее $c_2 > 0$. Можно сформулировать условия, аналогичные (ii), с $\alpha \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 4)$. Можно вообще значительно ослабить условия, накладываемые на $\alpha + \beta\sqrt{-D}$. Метод доказательства позволяет (в широких предположениях) утверждать, что если существует хоть одно представление $\alpha + \beta\sqrt{-D}$ в виде суммы трех квадратов целых чисел из $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, то справедлива асимптотика (1.6) с $c_2 > 0$. Сочетая этот факт, например, с результатом из [18], сформулированным выше, можно получить следующее утверждение:

в предположениях части (i) теоремы 2 и при условии, что D есть сумма двух квадратов целых рациональных чисел, имеем $c_2 > 0$.

Поясним смысл ограничения $\alpha^2 + D\beta^2 \neq \square$. Из анализа доказательства следует, что случай $\alpha^2 + D\beta^2 = \square$ (и в частности, $\beta = 0$) требует иного метода и сводится к аналогу классической задачи Эстермана (1.5); поэтому мы его исключаем, отсылая к нашей статье [6].

1.3. Основным средством исследования в нашей работе являются оценки сумм нового типа

$$R^*(h, x) = \sum_{k\leqslant x} \sum_{\substack{f(\nu)\equiv 0 (\mathrm{mod}\, k), \\ 0<\nu\leqslant k}} \left(\frac{\nu}{k}\right) e^{2\pi i h \frac{\nu}{k}},$$

где h — целое число, $f(u)$ — неприводимый примитивный полином второй степени; для определенности пусть $f(u) = u^2 + 2ru - \beta$, где $r \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{N}$, причем $r^2 + \beta \neq \square$, $\beta \neq \square$. При исследовании структуры главного члена задачи очень важен тот факт, что величина

$$\sigma(k) = \sum_{\substack{f(\nu)\equiv 0 (\mathrm{mod}\, k), \\ 0<\nu\leqslant k}} \left(\frac{\nu}{k}\right)$$

при $k = p$, где $p \nmid 2\beta(r^2 + \beta)$, есть коэффициент Фурье $a(p)$ ($= \sigma(p)$) некоторой новой формы

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n, \quad q = e^{2\pi i\tau},$$

веса 1 и некоторого характера ε относительно конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(N)$, где N зависит от коэффициентов многочлена $f(u)$. Следствием этого факта является важная для нас оценка $R^*(0, x) << x^{\frac{5}{8}+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ — любое число. При оценке остаточного члена в нашей задаче важно оценить суммы типа $R^*(h, x)$, $h \neq 0$. Степенное понижение в оценке суммы $R^*(h, x)$, $h \neq 0$, привело бы к степенному понижению остаточных членов в теоремах 1,2. Однако пока мы можем получить лишь оценку для сумм типа

$$R(h,x) = \sum_{k\leqslant x} \Big| \sum_{\substack{f(\nu)\equiv 0 (\mathrm{mod}\, k),\\ 0<\nu\leqslant k}} \left(\frac{\nu}{k}\right) e^{2\pi i h \frac{\nu}{k}} \Big|, h \neq 0,$$

а именно

$$R(h,x) << \frac{\tau(|h|)x(\log\log x)^{\frac{5}{2}}}{\log^{\delta} x},$$

где $\delta = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 0,292\ldots$; $\tau(n)$ — число делителей n. Для этого применяется решетный метод Холи [19]. Отметим, что рассуждения, используемые нами, реагируют на оценку суммы $R(h,x)$, а не $R^*(h,x)$. Несколько изменяя метод, можно добиться должного реагирования применяемой схемы на степенное понижение сумм типа $R^*(h,x)$. Однако поскольку такой оценки пока не получено, мы ограничились излагаемой здесь упрощенной схемой.

1.4. Отметим аналогию рассматриваемой нами задачи с классической задачей о представлении целых рациональных чисел тернарными квадратичными формами над $\mathbb{Z}$. Суммы, возникающие в нашей задаче, соответствуют суммам Салье в классической задаче. Имеется сходство и в структуре главных членов указанных задач.

§ 2. Доказательство теоремы 1

2.1. Доказательство наших результатов начинается с вычисления $A_3(f, D, \alpha + \beta\sqrt{-D})$. Величина $A_3(f, D, \alpha + \beta\sqrt{-D})$ равна количеству представлений $r_3(\Phi)$ бинарной формы $\Phi = [a, 2t_0, b] = ax^2 + 2t_0xy + by^2$, где $a = Df + \alpha$, $2t_0 = \beta = 2\beta_0$, $b = f$, суммой трех квадратов линейных форм от x, y с целыми рациональными коэффициентами. Величину $r_3(\Phi)$ изучали многие авторы, начиная с Гаусса. Самый общий результат принадлежит Поллу [20, 21]. Этот результат мы сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть N — количество представлений*

$$g(lx^2 + 2mxy + ny^2) = \sum_{i=1}^{3} (a_i x + b_i y)^2$$

в целых числах a_i, b_i. Здесь $\Psi = [l, 2m, n]$ — положительная форма, собственно или несобственно примитивная, $\Delta = ln - m^2$, $g > 0$. Имеет место следующая формула

$$N = 24 \prod_{p|2g\Delta} \chi(p), \tag{2.1}$$

где $\chi(p)$, p — простое число, определяется следующим образом.

Пусть сначала $p > 2$. Имеем

$$\chi(p) = (1 + \zeta^{\delta}\eta^{\gamma})(p^{[(\gamma+1)/2]} - 1)/(p-1) + (2-\sigma)(1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{\delta})p^{\gamma/2};$$

здесь $p^{\gamma} \| g$ (т.е. p^{γ} — максимальная степень, делящая g), $g = p^{\gamma}k$, $\gamma \geqslant 0$, $(k,p) = 1$; $p^{\delta} \| \Delta, \Delta = p^{\delta}E$, $\delta \geqslant 0$, $(E,p) = 1$; $\sigma = \frac{1}{2}(3 - (-1)^{\gamma})$; $\zeta = (-k\Psi|p)$ и $\eta = ((-1)^{\delta+1}E|p)$. В символах Лежандра Ψ заменяется любым числом, представимым Ψ и взаимно-простым с p.

Пусть теперь $p=2$. *Положим* $2^{u_1}\|g$, $g=2^{u_1}k_1$, $(k_1,2)=1$; $2^{u_2-u_1}\|\Delta$, $\Delta=2^{u_2-u_1}t_1$, $(t_1,2)=1$. $\chi(2)=0$, *кроме следующих случаев, когда* $\chi(2)=1$: u_1+u_2 *нечетно;* u_1 *и* u_2 *четны,* $t_1\equiv 1(\operatorname{mod}4)$; u_1 *четно,* Ψ *несобственно примитивна,* $t_1\equiv 3(\operatorname{mod}8)$; u_1 *и* u_2 *нечетны,* Ψ *собственно примитивна,* $t_1\equiv 1,3$ *или* $5(\operatorname{mod}8)$.

2.2. Приступая к доказательству теоремы 1, вычислим величину $\sum\limits_{f\leqslant x} A_3(f,2,2\sqrt{-2})$ на основании леммы 1. Имеем

$$[Df+\alpha,\beta,f]=[2f,2,f]=\Psi,\quad \Delta=2f^2-1.$$

Пусть сначала f нечетное. Тогда $g=1$, Ψ собственно примитивна, $\gamma=0$, $\sigma=1$, $k=1$, $\zeta=(-f|p)$, $u_1=0$, $u_2=0$, $\Delta\equiv 1(\operatorname{mod}4)$, $\chi(2)=1$.

Пусть теперь f четное. Тогда $g=1$, Ψ несобственно примитивна, $\gamma=0$, $\sigma=1$, $k=1$, $\zeta=(-f|p)$, $u_1=0$, $u_2=0$, $\Delta\equiv -1(\operatorname{mod}8)$, $\chi(2)=0$.

Тем самым доказана следующая формула

$$\sum_{f\leqslant x} A_3(f,2,2\sqrt{-2})=24\sum_{\substack{f\leqslant x,\\ f\equiv 1(\operatorname{mod}2)}}\ \sum_{d|2f^2-1}\left(\frac{-f}{d}\right),\tag{2.2}$$

в которой $(\frac{-f}{d})$ — символ Кронекера. Используя известный „принцип переворота через корень“, имеем

$$\sum_{f\leqslant x} A_3(f,2,2\sqrt{-2})=24\sum_{d\leqslant\sqrt{2x^2-1}}\ \sum_{\substack{2f^2-1\equiv 0(\operatorname{mod}d),\\ \sqrt{d^2+1}/\sqrt{2}\leqslant f\leqslant x,\, f\equiv 1(\operatorname{mod}2)}}\left(\frac{-f}{d}\right)+$$

$$+24\sum_{d\leqslant\sqrt{2x^2-1}}\ \sum_{\substack{2f^2-1\equiv 0(\operatorname{mod}d),\\ \sqrt{d^2+1}/\sqrt{2}\leqslant f\leqslant x,\, f\equiv 1(\operatorname{mod}2)}}\left(\frac{-f}{d}\right)\left(\frac{-f}{2f^2-1}\right)+O(x^{\frac12})=$$

$$=24\cdot 2\cdot\sum_{d\leqslant\sqrt{2x^2-1}}\ \sum_{\substack{2f^2-1\equiv 0(\operatorname{mod}d),\\ f\leqslant x,\, f\equiv 1(\operatorname{mod}4)}}\left(\frac{-f}{d}\right)-24\cdot 2\cdot\sum_{d\leqslant\sqrt{2x^2-1}}\ \sum_{\substack{2f^2-1\equiv 0(\operatorname{mod}d),\\ f<\sqrt{d^2+1}/\sqrt{2},\, f\equiv 1(\operatorname{mod}4)}}\left(\frac{-f}{d}\right)+$$

$$+O(x^{\frac12})=24\cdot 2\cdot S_1-24\cdot 2\cdot S_2+O(x^{\frac12}).\tag{2.3}$$

2.3. Для упрощения будем вести дальнейшие рассуждения для несколько более простых сумм

$$S_3=\sum_{d\leqslant\sqrt{2x^2-1}}\ \sum_{\substack{2f^2-1\equiv 0(\operatorname{mod}d),\\ f\leqslant x}}\left(\frac{f}{d}\right)$$

и

$$S_4=\sum_{d\leqslant\sqrt{2x^2-1}}\ \sum_{\substack{2f^2-1\equiv 0(\operatorname{mod}d),\\ f<\sqrt{d^2+1}/\sqrt{2}}}\left(\frac{f}{d}\right),$$

а затем перейдем к суммам S_1, S_2. Начнем с рассмотрения суммы S_3. Введем обозначение

$$\Phi\left(\frac{f}{d}\right)=\begin{cases}(\frac{f}{d}), & \text{если } 2f^2-1\equiv 0(\operatorname{mod}d),\\ 0, & \text{если } 2f^2-1\not\equiv 0(\operatorname{mod}d).\end{cases}$$

Тогда

$$S_3 = \sum_{d\leqslant\sqrt{2x^2-1}} \sum_{f\leqslant x} \Phi(\frac{f}{d}).$$

Будем считать для простоты x целым. Легко видеть, что

$$\sum_{f=1}^{x} \Phi(\frac{f}{d}) = [\frac{x}{d}] \sum_{f=1}^{d} \Phi(\frac{f}{d}) + \\ + \sum_{\substack{f=1 \\ \frac{f}{d}\in[\frac{1}{d},\{\frac{x}{d}\}+\frac{1}{d})}}^{d} \Phi(\frac{f}{d}), \tag{2.4}$$

где символы $[]$, $\{\}$ означают, как обычно, целую и дробную часть соответственно.

Далее будет необходима следующая хорошо известная лемма (см. И.М.Виноградов [22]).

Лемма 2. *Пусть r — целое положительное, α и β — вещественные, $0 < \Delta' < 0,25$; $\Delta' \leqslant \beta - \alpha \leqslant 1 - \Delta'$. Тогда существует периодическая функция $\psi(x)$ с периодом 1 и с условиями:*

1) $\psi(x) = 1$ в интервале $\alpha + 0,5\Delta' \leqslant x \leqslant \beta - 0,5\Delta'$;

2) $0 < \psi(x) < 1$ в интервалах $\alpha - 0,5\Delta' < x < \alpha + 0,5\Delta'$ и $\beta - 0,5\Delta' < x < \beta + 0,5\Delta'$;

3) $\psi(x) = 0$ в интервале $\beta + 0,5\Delta' \leqslant x \leqslant 1 + \alpha - 0,5\Delta'$;

4) $\psi(x)$ разлагается в ряд Фурье вида

$$\psi(x) = \beta - \alpha + \sum_{m=1}^{\infty}(g_m e^{2\pi i m x} + h_m e^{-2\pi i m x}),$$

где имеем

$$|g_m| \leqslant \frac{1}{\pi m}, \qquad |h_m| \leqslant \frac{1}{\pi m},$$
$$|g_m| \leqslant \beta - \alpha, \qquad |h_m| \leqslant \beta - \alpha,$$
$$|g_m| < \frac{1}{\pi m}(\frac{r}{\pi m \Delta'})^r, \qquad |h_m| < \frac{1}{\pi m}(\frac{r}{\pi m \Delta'})^r.$$

Пусть $\chi_{[\alpha,\beta]}(x)$ — характеристическая функция отрезка $[\alpha,\beta]$, $\psi_{[\alpha,\beta]}(x)$ — „сглаженная характеристическая функция“, обозначаемая в лемме 2 через $\psi(x)$.

Пусть $\bar{\psi}(x) = \psi_{[\alpha-0,5\Delta',\beta+0,5\Delta']}(x)$, $\underline{\psi}(x) = \psi_{[\alpha+0,5\Delta',\beta-0,5\Delta']}(x)$. Легко видеть, что

$$\underline{\psi}(x) \leqslant \chi_{[\alpha,\beta]}(x) \leqslant \bar{\psi}(x).$$

Рассмотрим теперь сумму

$$\sum_{\substack{1\leqslant f\leqslant d, \\ \frac{f}{d}\in[\frac{1}{d},\{\frac{x}{d}\}+\frac{1}{d})}} \Phi(\frac{f}{d}).$$

Для применимости к ней леммы 2 положим $\alpha = \max(2\Delta', \frac{1}{d})$, $\beta = \min(1-2\Delta', \{\frac{x}{d}\} + \frac{1}{d})$, причем $\Delta' \asymp \frac{1}{\log x}$, и перепишем нашу сумму в виде

$$\sum_{\substack{1\leqslant f\leqslant d, \\ \frac{f}{d}\in[\frac{1}{d},\{\frac{x}{d}\}+\frac{1}{d})}} \Phi(\frac{f}{d}) = \sum_{\substack{1\leqslant f\leqslant d, \\ \frac{f}{d}\in[\alpha,\beta]}} \Phi(\frac{f}{d}) + R_0.$$

Оценка (здесь и ниже $\Delta' \asymp \frac{1}{\log x}$)

$$\sum_{d\leqslant x} R_0 \ll \Delta' \cdot x \tag{2.5}$$

следует из следующей леммы.

Лемма 3. *Для* $\Delta' \asymp \frac{1}{\log x}$

$$\sum_{\frac{x}{\log^2 x}\leqslant d\leqslant x} \quad \sum_{\substack{2f^2-1\equiv 0 (\mathrm{mod}\, d),\\ 1\leqslant f\leqslant \Delta' d}} 1 \ll \Delta' \cdot x.$$

Доказательство проводится на основе результатов Холи [23] обычными аналитическими методами. Имеет место также асимптотика (см. Холи [23])

$$\sum_{d\leqslant x} \quad \sum_{\substack{2f^2-1\equiv 0 (\mathrm{mod}\, d),\\ 1\leqslant f\leqslant d}} 1 \sim c \cdot x; \tag{2.6}$$

она необходима для оценки суммы

$$\sum_{d\leqslant x/\log^2 x} R_0.$$

Получение оценки (2.5) теперь не составляет труда. Естественно, как асимптотика (2.6), так и лемма 3 имеют место для произвольного многочлена второй степени, а не только для случая $2f^2-1$.

Заменяя в сумме

$$\sum_{1\leqslant f\leqslant d} \Phi(\frac{f}{d}) \cdot \chi_{[\alpha,\beta]}(\frac{f}{d})$$

характеристическую функцию $\chi_{[\alpha,\beta]}(x)$ на $\bar{\psi}(x)$ и разлагая последнюю в ряд Фурье

$$\bar{\psi}(x) = \beta - \alpha + \Delta' + \sum_{|m|=1}^{\infty} a_m e^{2\pi i m x},$$

где $a_m = a(m, \alpha, \beta, \Delta')$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1\leqslant f\leqslant d,\\ \frac{f}{d}\in[\frac{1}{d}, \{\frac{x}{d}\}+\frac{1}{d})}} \Phi(\frac{f}{d}) &= \{\frac{x}{d}\} \cdot \sum_{f=1}^{d} \Phi(\frac{f}{d}) + R_0 + O(\Delta' \cdot \sum_{f=1}^{d} |\Phi(\frac{f}{d})|) + \\ &+ \sum_{|m|=1}^{\infty} a_m \sum_{f=1}^{d} \Phi(\frac{f}{d}) e^{2\pi i \frac{mf}{d}} + R_1, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $R_1 \ll \sum\limits_{f=1}^{d} |\Phi(\frac{f}{d}) \cdot U(\frac{f}{d})|$, $U(x) = \bar{\psi}(x) - \chi_{[\alpha,\beta]}(x)$.

Имеет место оценка, аналогичная (2.5) и доказываемая точно так же,

$$\sum_{d\leqslant x} R_1 \ll \Delta' \cdot x. \tag{2.8}$$

На основании формул (2.4) и (2.7), лемм 2 и 3, оценок (2.5) и (2.8) имеет место следующий факт, который мы сформулируем в виде леммы.

Лемма 4. *Пусть* $\Delta' \asymp \frac{1}{\log x}$, *тогда*

$$S_3 = x \sum_{d \leqslant \sqrt{2x^2-1}} \frac{1}{d} \sum_{f=1}^{d} \Phi(\frac{f}{d}) + O(\Delta' \cdot x) +$$

$$+O(\sum_{|m|<\Delta'^{-1-\varepsilon}} \frac{1}{|m|} \sum_{d \leqslant \sqrt{2x^2-1}} | \sum_{\substack{f=1 \\ 2f^2-1 \equiv 0 (\bmod d)}} (\frac{f}{d}) e^{2\pi i \frac{mf}{d}} |), \qquad (2.9)$$

где $\varepsilon > 0$ *— сколь угодно малая константа.*

2.4. Для исследования асимптотического поведения суммы S_3 при $x \to \infty$ рассмотрим сумму (целое $h \neq 0$)

$$R(h,x) = \sum_{k \leqslant x} |S(h,k)|, \qquad (2.10)$$

где

$$S(h,k) = \sum_{\substack{2\nu^2 \equiv 1 (\bmod k), \\ 0<\nu \leqslant k}} (\frac{\nu}{k}) e^{2\pi i h \frac{\nu}{k}},$$

или общее

$$S(h,k) = \sum_{\substack{f(\nu) \equiv 0 (\bmod k), \\ 0<\nu \leqslant k}} (\frac{\nu}{k}) e^{2\pi i h \frac{\nu}{k}},$$

где $f(u)$ — неприводимый примитивный полином второй степени, $(\frac{\nu}{k})$ — символ Кронекера.

Оценка суммы (2.10) проводится методом Холи [19], рассмотревшего сходную сумму, в которой $f(u)$ — полином любой степени, а вместо $(\frac{\nu}{k})$ стоит 1; правда, оценка, полученная Холи, была неравномерной по h.

Пусть $\rho(k)$ означает число корней сравнения

$$f(\nu) \equiv 0 (\bmod k).$$

В полученных ниже оценках $O(\gg)$-константы не зависят от h. Для определенности считаем $h > 0$, что несущественно. Прежде всего отметим, что имеют место следующие факты, аналогичные леммам 1 и 3 из [19]:

$$\sum_{a=1}^{k} |S(ah,k)|^2 = O(\rho(k) \cdot k \cdot (h,k)); \qquad (2.11)$$

для $(k,k') = 1$

$$S(h,kk') = S(h\bar{k}',k) S(h\bar{k},k'), \qquad (2.12)$$

где $k\bar{k} \equiv 1 (\bmod k')$, $k'\bar{k}' \equiv 1 (\bmod k)$.

Пусть $X = x^{B/\log\log x}$, где $B = \frac{1}{48e}$; будем обозначать буквами с индексом 1 либо число 1, либо числа, составленные целиком из простых делителей, не превосходящих X; буквами с индексом 2 обозначаются либо 1, либо числа, составленные целиком из простых делителей, превосходящих X. Любое целое k можно представить в виде $k = k_1 k_2$. Числа k_2 называются квазипростыми числами отрезка $[1,x]$.

Имеем в силу (2.12)

$$R(h,x)=\sum_{k\leqslant x}|S(h,k)|=\sum_{k_1k_2\leqslant x}|S(h,k_1k_2)|=$$
$$=\sum_{k_1k_2\leqslant x}|S(h\bar{k}_2,k_1)S(h\bar{k}_1,k_2)|=$$
$$=\sum_{\substack{k\leqslant x,\\ k_1\leqslant x^{1/3}}}+\sum_{\substack{k\leqslant x,\\ k_1>x^{1/3}}}=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2.$$

Очевидно,

$$\sum\nolimits_2=O(\sum_{\substack{k\leqslant x,\\ k_1>x^{1/3}}}\rho(k)).$$

Как показано в работе [19],

$$\sum_{\substack{k\leqslant x,\\ k_1>x^{1/3}}}\rho(k)=O(\frac{x}{\log x}),$$

откуда

$$\sum\nolimits_2=O(\frac{x}{\log x}).$$

Перейдем к оценке $\sum_1$. Имеем

$$\sum\nolimits_1=\sum_{\substack{k_1,k_2\leqslant x,\\ k_1\leqslant x^{1/3}}}|S(h\bar{k}_2,k_1)S(h\bar{k}_1,k_2)|=O(\sum_{\substack{k_1k_2\leqslant x,\\ k_1\leqslant x^{1/3}}}\rho(k_2)|S(h\bar{k}_2,k_1)|)=$$
$$=O(\sum_{k_1\leqslant x^{1/3}}\sum_{k_2\leqslant x/k_1}\rho(k_2)|S(h\bar{k}_2,k_1)|)=$$
$$=O(\sum_{k_1\leqslant x^{1/3}}\Theta(\frac{x}{k_1},k_1)),$$

где при $y\geqslant x^{2/3}$ и $k_1\leqslant x^{1/3}$ положим

$$\Theta(y,k_1)=\sum_{k_2\leqslant y}{}^{*}\rho(k_2)|S(h\bar{k}_2,k_1)|.$$

Неравенство Коши–Шварца дает

$$\Theta^2(y,k_1)\leqslant(\sum_{k_2\leqslant y}\rho^2(k_2))(\sum_{k_2\leqslant y}|S(h,\bar{k}_2,k_1)|^2)=$$
$$=(\sum\nolimits_3)(\sum\nolimits_4).$$

Холи [19] с помощью доказанной им оценки сверху для количества квазипростых чисел получает следующий результат:

$$\sum\nolimits_3\ll\frac{y(\log\log x)^4}{\log x}.$$

Далее

$$\sum\nolimits_4 = \sum_{k_2 \leqslant y} |S(h\bar{k}_2, k_1)|^2 = \sum_{\substack{0<a\leqslant k_1,\\ (a,k_1)=1}} |S(ah, k_1)|^2 \sum_{\substack{k_2\leqslant y,\\ k_2\equiv \bar{a} (\mathrm{mod}\, k_1)}} 1.$$

Внутренняя сумма оценивается с помощью результата Холи [19] о распределении квазипростых чисел в арифметических прогрессиях.

Используя затем (2.11), имеем в результате

$$\sum\nolimits_4 \ll \frac{y \log\log x}{\varphi(k_1)\log x} \sum_{0<a\leqslant k_1} |S(ah,k_1)|^2 \ll$$

$$\ll \frac{y\log\log x}{\varphi(k_1)\log x}\cdot \rho(k_1)\cdot k_1 \cdot (h,k_1).$$

Следовательно,

$$\Theta(y,k_1) \ll \frac{y(\log\log x)^{5/2}}{\log x}\cdot \frac{\rho^{\frac12}(k_1)\cdot k_1^{\frac12}\cdot (h,k_1)^{\frac12}}{\varphi^{1/2}(k_1)};$$

поэтому

$$\sum\nolimits_1 = O\Big(\frac{x(\log\log x)^{\frac52}}{\log x} \sum_{k_1\leqslant x^{1/3}} \frac{\rho^{\frac12}(k_1)\cdot (h,k_1)^{\frac12}}{k_1^{1/2}\cdot \varphi^{1/2}(k_1)}\Big) =$$

$$= O\Big(\frac{x(\log\log x)^{5/2}}{\log x}\sum\nolimits_5\Big).$$

Имеем

$$\sum\nolimits_5 \leqslant \sum_{l\leqslant x} \frac{\rho^{\frac12}(l)\cdot (h,l)^{\frac12}}{l^{\frac12}\cdot \varphi^{\frac12}(l)}.$$

Несложное вычисление показывает, что

$$\sum\nolimits_5 \ll \sum_{H|h}\sum_{l_0\leqslant x/H} \frac{\rho^{\frac12}(l_0)}{\varphi^{\frac12}(l_0)\cdot l_0^{\frac12}}.$$

Как доказал Холи [19], внутренняя сумма $\ll \log^{1-\delta} x$, где $\delta = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 0,292\ldots$, т.е.

$$\sum\nolimits_5 \ll \tau(h)\log^{1-\delta} x.$$

Следовательно,

$$\sum\nolimits_1 \ll \tau(h)\frac{x(\log\log x)^{5/2}}{\log^\delta x}.$$

Тем самым доказана следующая

Лемма 5. *Пусть $f(u)$ — неприводимый примитивный полином второй степени и пусть*

$$R(h,x) = \sum_{k\leqslant x} \Big| \sum_{\substack{f(\nu)\equiv 0 (\mathrm{mod}\, k),\\ 0<\nu\leqslant k}} \Big(\frac{\nu}{k}\Big) e^{2\pi i h \frac{\nu}{k}}\Big|.$$

Тогда если целое $h \neq 0$, то

$$R(h,x) \ll \frac{\tau(|h|)x(\log\log x)^{5/2}}{\log^\delta x},$$

где $\delta = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 0,292\ldots$

2.5. Обратимся теперь к члену

$$x \sum_{d \leqslant \sqrt{2x^2-1}} \frac{1}{d} \sum_{f=1}^{d} \Phi\left(\frac{f}{d}\right) \tag{2.13}$$

в формуле (2.9), причем вместо $2f^2-1$ можно взять любой неприводимый полином второй степени; для определенности возьмем полином в виде $f^2+2rf-\beta$, где $r \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{N}$, причем $r^2+\beta \neq \square$, $\beta \neq \square$. Итак,

$$\Phi\left(\frac{f}{d}\right) = \begin{cases} (\frac{f}{d}), & \text{если } f^2+2rf-\beta \equiv 0 (\operatorname{mod} d), \\ 0, & \text{если } f^2+2rf-\beta \not\equiv 0 (\operatorname{mod} d). \end{cases}$$

Наша задача — исследовать коэффициент при x в (2.13). Это в свою очередь требует изучения величины

$$\sigma(n) = \sum_{\substack{0<f\leqslant n, \\ f^2+2rf-\beta\equiv 0 (\operatorname{mod} n)}} \left(\frac{f}{n}\right).$$

Докажем теперь следующую лемму (см. также [24]).

Лемма 6. *Существует новая форма*

$$S^*(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) q^n, \qquad q = e^{2\pi i \tau}, \quad a(1) = 1,$$

веса 1 и некоторого характера ε относительно группы $\Gamma_0(N)$ такая, что для всех простых $p \nmid 2\beta(r^2+\beta)$ справедливо равенство

$$a(p) = \sigma(p).$$

Замечание. Отметим, что $p|N \Rightarrow p|2\beta(r^2+\beta)$; отметим также, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) q^n, \quad q = e^{2\pi i \tau},$$

не является параболической формой; это легко доказать, сравнивая эйлеровские множители рядов Дирихле

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}$$

и

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) n^{-s}.$$

Для доказательства леммы 6 необходимо установить несколько фактов. Пусть

$$\Psi(h) = h^4 + 2rh^2 - \beta.$$

Для простого p положим

$$S(p) = \#\{a \in \mathbb{F}_p | \Psi(a) \equiv 0 (\operatorname{mod} p)\}.$$

Лемма 7. *Пусть p — простое число, не делящее $2\beta(r^2+\beta)$. Тогда*

$$S(p) = 1 + (\frac{r^2+\beta}{p}) + \sigma(p). \qquad (2.14)$$

Доказательство разобьем на ряд случаев.

I. Пусть $(\frac{r^2+\beta}{p}) = 1$. Обозначим через f_1, f_2 решения сравнения

$$f^2 + 2rf - \beta \equiv 0(\operatorname{mod} p).$$

Имеем

$$f_1 f_2 \equiv -\beta(\operatorname{mod} p),$$

$$\sigma(p) = (\frac{f_1}{p}) + (\frac{f_2}{p}) = (\frac{f_1}{p})(1 + (\frac{-\beta}{p})).$$

1) Пусть $(\frac{-\beta}{p}) = 1$. Если $(\frac{f_1}{p}) = 1$, то $\sigma(p) = 2$. Легко видеть, что $S(p) = 4$; следовательно, равенство (2.14) доказано. Если же $(\frac{f_1}{p}) = -1$, то $\sigma(p) = 2$. Легко видеть, что $S(p) = 0$; следовательно, равенство (2.14) доказано.

2) Пусть $(\frac{-\beta}{p}) = -1$. Легко видеть, что $S(p) = 2$ и $\sigma(p) = 0$. Следовательно, равенство (2.14) доказано.

II). Пусть $(\frac{r^2+\beta}{p}) = -1$. Ясно, что $S(p) = 0$ и $\sigma(p) = 0$. Равенство (2.14) доказано. Следовательно, доказана и лемма 7.

Получим теперь другое представление для $S(p)$. Рассмотрим уравнение

$$h^4 + 2rh^2 - \beta = 0.$$

Корни этого уравнения:

$$\varepsilon^{(0)} = \sqrt{\sqrt{r^2+\beta} - r}, \qquad \varepsilon^{(1)} = \sqrt{-\sqrt{r^2+\beta} - r},$$
$$\varepsilon^{(2)} = -\varepsilon^{(0)}, \qquad \varepsilon^{(3)} = -\varepsilon^{(1)}.$$

Рассмотрим поле $K = \mathbb{Q}(\varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)})$, порожденное $\varepsilon^{(0)}$ и $\varepsilon^{(1)}$ над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. K является расширением Галуа поля $\mathbb{Q}$ степени 8 и его группа Галуа $G = G(K/\mathbb{Q})$ изоморфна диэдральной группе D_4 порядка 8. Рассмотрим подстановки

$$a = \begin{pmatrix} \varepsilon^{(0)} & \varepsilon^{(1)} & \varepsilon^{(2)} & \varepsilon^{(3)} \\ \varepsilon^{(1)} & \varepsilon^{(2)} & \varepsilon^{(3)} & \varepsilon^{(0)} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \varepsilon^{(0)} & \varepsilon^{(1)} & \varepsilon^{(2)} & \varepsilon^{(3)} \\ \varepsilon^{(0)} & \varepsilon^{(3)} & \varepsilon^{(2)} & \varepsilon^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$G = \langle a, b | a^4 = 1, \qquad b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle.$$

Перечислим квадратичные подполя поля K (с соответствующими подгруппами G):

$$\underset{\langle a \rangle}{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{-\beta(r^2+\beta)});$$

$$\underset{\langle a^2, b \rangle}{F} = \mathbb{Q}(\sqrt{r^2+\beta});$$

$$\underset{\langle a^2, ab \rangle}{E} = \mathbb{Q}(\sqrt{-\beta}).$$

Сопоставим теперь полю K параболическую форму $S^*(\tau, K) = S^*(\tau)$ веса 1. Пусть ψ — (единственное) двумерное комплексное неприводимое представление группы $G = G(K/\mathbb{Q})$, определяемое посредством

$$\psi(a) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \psi(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда представление $\det\psi$ группы G, определяемое посредством $(\det\psi)(g) = \det\psi(g)$, индуцирует характер Дирихле ε.

Определим L-функцию Артина, ассоциированную с ψ:

$$L(s) = L(s, K/\mathbb{Q}, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}.$$

Тогда $L(s)$ имеет эйлеровское произведение

$$L(s) = \prod_{p|N}(1 - a(p)p^{-s})^{-1} \prod_{p\nmid N}(1 - a(p)p^{-s} + \varepsilon(p)p^{-2s})^{-1},$$

где N обозначает кондуктор ψ. Определим функцию $S^*(\tau) = S^*(\tau, K)$:

$$S^*(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n, \qquad q = e^{2\pi i\tau}.$$

Лемма 8. *$S^*(\tau)$ является параболической формой (новой формой) веса 1 и характера ε относительно группы $\Gamma_0(N)$.*

Доказательство следует из хорошо известных результатов теории Гекке–Вейля (см. Серр [25]).

Лемма 9. *Пусть p — простое число, не делящее $2\beta(r^2 + \beta)$. Тогда*

$$S(p) = 1 + (\frac{r^2 + \beta}{p}) + a(p).$$

При доказательстве леммы мы используем соображения из работы [26]. Рассмотрим все неприводимые представления группы G:

$$\begin{array}{ccc} & a & b \\ \psi_0 & 1 & 1 \\ \psi_1 & 1 & -1 \\ \psi_2 & -1 & 1 \\ \psi_3 & -1 & -1 \\ \psi & \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Можно показать, что из $p|N$ следует $p|2\beta(r^2 + \beta)$. Для p, неразветвленного в K (что равносильно $p \nmid N$), обозначим через σ_p подстановку Фробениуса, ассоциированную с p.

Пусть χ — характер представления ψ. Между квадратичными подполями k, F, E поля K и представлениями $\psi_i (1 \leqslant i \leqslant 3)$ имеется соответствие. Для

$p \nmid 2\beta(r^2+\beta)$ справедливы соотношения

$$\psi_1(\sigma_p) = (\frac{-\beta(r^2+\beta)}{p}),$$
$$\psi_2(\sigma_p) = (\frac{r^2+\beta}{p}),$$
$$\psi_3(\sigma_p) = (\frac{-\beta}{p}).$$

Кроме того,

$$\chi(\sigma_p) = a(p).$$

Пусть $H = \langle b \rangle$. Тогда H есть подгруппа группы G, соответствующая подполю $M = \mathbb{Q}(\sqrt{\sqrt{r^2+\beta} - r}$. Обозначим через $\nu = 1_G^H$ характер группы G, индуцированный единичным характером 1_H подгруппы H. Имеют место следующие формулы для скалярных произведений:

$$(\nu|\psi_i) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i = 1,3, \\ 1, & \text{если} \quad i = 0,2; \end{cases}$$
$$(\nu|\chi) = 1.$$

Следовательно,

$$\nu = \psi_0 + \psi_2 + \chi.$$

Для $p \nmid N$ мы имеем

$$\nu(\sigma_p) = S(p).$$

Следовательно, для $p \nmid 2\beta(r^2+\beta)$

$$S(p) = 1 + (\frac{r^2+\beta}{p}) + a(p),$$

и лемма 9 доказана.

Справедливость леммы 6 следует теперь из лемм 7, 8, 9.

2.6. Лемма 6 позволяет сделать важные выводы, а именно изучать свойства функции $Z(s)$, используя свойства функции $L(s)$. В частности, мы легко доказываем голоморфность функции $Z(s)$ в полуплоскости $\sigma = \operatorname{Re} s \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Известна оценка [27, 28]

$$|L(\frac{1}{2} + it)| \ll (|t| + 1)^{\frac{1}{3}+\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что в полосе $\frac{1}{2}+\varepsilon \leqslant \sigma \leqslant 1+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, имеет место оценка $(s = \sigma + it)$

$$|Z(s)| \ll (|t|+1)^{\frac{2}{3}(1-\sigma)+\varepsilon}, \varepsilon > 0. \tag{2.15}$$

С помощью формулы обращения для рядов Дирихле и оценки (2.15) имеем

$$\sum_{n \leqslant x} \sigma(n) \ll x^{\frac{5}{8}+\varepsilon}, \varepsilon > 0 \tag{2.16}$$

(подробности см. в [24]).

Тем самым сумма (2.13) равна

$$x \sum_{n << x} \frac{\sigma(n)}{n} = x \cdot Z(1) + O(x^{\frac{5}{8}+\varepsilon}).$$

Известно [29], что $L(1) > 0$; имеем также

$$Z(1) = L(1) \cdot \frac{Z(1)}{L(1)},$$

где, как можно без труда доказать, $\frac{Z(1)}{L(1)} = c > 0$. Тем самым

$$x \sum_{n<<x} \frac{\sigma(n)}{n} = c \cdot L(1) \cdot x + O(x^{\frac{5}{8}+\varepsilon}). \tag{2.17}$$

Теперь уже легко получить асимптотическую формулу для S_3. Применяя к (2.9) формулу (2.17) и лемму 5, получаем при $x \to \infty$

$$S_3 = c \cdot L(1) \cdot x + O(\frac{x(\log\log x)^{9/2}}{\log^\delta x}).$$

Обратимся теперь к сумме S_4. Для нее можно написать формулу, аналогичную (2.9), однако вместо главного члена

$$x \sum_{d \leqslant \sqrt{2x^2-1}} \frac{1}{d} \sum_{f=1}^{d} \Phi(\frac{f}{d})$$

теперь будет стоять член

$$\frac{1}{2} \sum_{d \leqslant \sqrt{2x^2-1}} \sqrt{1+\frac{1}{d^2}}\sigma(d),$$

который (в силу (2.16)) $\ll x^{\frac{5}{8}} + \varepsilon$. Тем самым имеем при $x \to \infty$

$$S_4 = O(\frac{x(\log\log x)^{9/2}}{\log^\delta x}). \tag{2.18}$$

Обращаясь к сумме S_1 в (2.3), заметим, что для нее справедлива формула, аналогичная (2.9), с главным членом

$$\frac{x}{4} \sum_{d \leqslant \sqrt{2x^2-1}} \frac{\sigma(d)}{d};$$

оценка остаточного члена (по сравнению с S_3) не меняется. Для S_2 в (2.3) сохраняется оценка (2.18). Тем самым доказана и теорема 1.

§ 3. Доказательство теоремы 2

3.1. Вычисление суммы $\sum_{f \leqslant x} A_3(f, D, \alpha + \beta\sqrt{-D})$ основано на тех же идеях, что и доказательство теоремы 1, но сложнее технически. Имеем ($\beta = 2\beta_0$)

$$[Df+\alpha, \beta, f] = \Psi, \quad g = 1,$$
$$\Delta = \Delta(f) = (Df+\alpha)f - \beta_0^2.$$

К сожалению, теперь мы не можем получить столь же простую формулу, как (2.2), поскольку величины χ_2, χ_{p_0}, где $p_0 > 2$ — произвольный простой делитель β_0, в формуле (2.1) для количества представлений N бинарной формы суммой трех квадратов линейных форм при изменении f ведут себя крайне нерегулярно. Разобьем все значения f на прогрессии, на которых χ_2 и все χ_{p_0} постоянны. Рассуждения для простоты будем вести для частного случая — простого $\beta_0 > 2$; другими словами, пусть

$$\beta_0 = p_0 (> 2).$$

Рассмотрим все натуральные числа Ω вида $\Omega = 2^{u_2} p_0^{\gamma_0}$, где $u_2 \geqslant 0$, $\gamma_0 \geqslant 0$. С каждым Ω свяжем целые числа $f_0 \in [1, 8p_0\Omega]$, обладающие свойством

$$\Omega \| (Df_0 + \alpha) f_0 - p_0^2.$$

Все целые числа $f = 1, 2, \dots$ разбиваем на непересекающиеся прогрессии вида

$$f = f_0 + 8p_0\Omega t. \tag{3.1}$$

Из свойств сравнений следует, что каждому Ω соответствует конечное ($\leqslant 8p_0$) количество чисел f_0. Имеем для прогрессии (3.1)

$$\Delta = \Delta(f) = (Df_0 + \alpha) f_0 - p_0^2 + 8p_0\Omega \cdot [t(2Df_0 + \alpha) + D \cdot 8p_0 \cdot \Omega \cdot t^2],$$

где $\Delta(f_0) = (Df_0 + \alpha) f_0 - p_0^2 = \Omega\omega_0$, $(\omega_0, 2p_0) = 1$. Легко видеть, что на прогрессии (3.1) величины χ_2, χ_{p_0} имеют одно и то же значение.

Прогрессии (3.1) разбиваем на подпрогрессии вида

$$f' = \delta f_1 + 8p_0 \cdot \delta \cdot \Omega \cdot t' = t_0' + 8p_0 \cdot \Omega' \cdot t',$$

где $\delta = 2^{\lambda_2} p_0^{\lambda_0}$, $(f_1, 2p_0) = 1$, $\delta f_1 = f_0'$, $\delta\Omega = \Omega'$; f_1 принадлежит приведенной системе вычетов $(\operatorname{mod} 8p_0\Omega)$; будем считать, что $f_1 \in [1, 8p_0\Omega]$; следовательно, $f_0' \in [1, 8p_0\Omega']$. Имеем

$$\Delta = \Delta(f') = (Df_0' + \alpha) f_0' - p_0^2 + 8p_0\Omega' \cdot [t'(2Df_0' + \alpha) + \\ + D \cdot 8p_0 \cdot \Omega' \cdot t'^2] = \Delta_1 \Omega,$$

где $\Delta(f_0') = (Df_0' + \alpha) f_0' - p_0^2 = \Omega \cdot \omega_0'$, $(\omega_0', 2p_0) = 1$, $\omega_0' \equiv \omega_0 (\operatorname{mod} 8p_0)$. Легко видеть, что количество f_1, принадлежащих модулю $8p_0\Omega$, конечно, а именно их количество $< (2p_0)^C$, где C — константа. Тем самым количество прогрессий

$$f' = f_0' + 8p_0\Omega' t', \tag{3.2}$$

принадлежащих модулю $8p_0\Omega'$, также конечно.

Легко видеть, что

$$\left(\frac{-f'}{\Delta_1}\right) = \left(\frac{\delta}{\omega_0'}\right)\left(\frac{-1}{\omega_0'}\right) \cdot (-1)^{\frac{\omega_0'-1}{2} \cdot \frac{f_1-1}{2}} \cdot \left(\frac{-\Omega}{f_1}\right);$$

другими словами, на прогрессии (3.2) величина $\left(\frac{-f'}{\Delta_1}\right)$ постоянна.

Аналогом формулы (2.2) в нашем случае является

$$\sum_{f \leqslant x} A_3(f, D, \alpha + 2p_0\sqrt{-D}) = \\ = 24 \sum_{\Omega', f_0'} \chi_2 \chi_{p_0} \sum_{\substack{f' \equiv f_0' (\operatorname{mod} 8p_0\Omega'), \\ f' \leqslant x}} \sum_{d | \Delta_1} \left(\frac{-f'}{d}\right). \tag{3.3}$$

В формуле (3.3) в первом суммировании справа можно взять

$$\sum_{\substack{\Omega' << \log^4 x, \\ f_0'}}$$

Действительно, используя результаты работы [30], получаем следующую лемму.

Лемма 10. *Имеем*

$$\sum_{\substack{f'\equiv f_0' (\mathrm{mod}\, 8p_0\Omega'),\\ f'\leqslant x}} \tau(\Delta_1) << \frac{x\log^2 x}{\Omega'}.$$

Из этой леммы следует, что

$$\sum_{\substack{\Omega'>>\log^4 x,\\ f_0'}} \chi_2\chi_{p_0} \sum_{\substack{f'\equiv f_0' (\mathrm{mod}\, 8p_0\Omega'),\\ f'\leqslant x}} \sum_{d|\Delta_1} \left(\frac{-f'}{d}\right) << \frac{x}{\log x}.$$

Применим теперь к сумме

$$\sum_{\substack{f'\equiv f_0' (\mathrm{mod}\, 8p_0\Omega'),\\ f'\leqslant x}} \sum_{d|\Delta_1} \left(\frac{-f'}{d}\right) = S(x,\Omega',f_0')$$

„принцип переворота через корень". Имеем

$$S(x,\Omega',f_0') = \sum_{\substack{f'\equiv f_0' (\mathrm{mod}\, 8p_0\Omega'),\\ f'\leqslant x}} \sum_{\substack{d|\Delta_1,\\ d<\Delta_1^{1/2}}} \left(1+\left(\frac{-f'}{\Delta_1}\right)\right)\left(\frac{-f'}{d}\right) + \delta(x,\Omega',f_0'),$$

где

$$\delta(x,\Omega',f_0') = \sum_{\substack{f'\equiv f_0' (\mathrm{mod}\, 8p_0\Omega')\\ f'\leqslant x, \Delta_1=d^2}} \left(\frac{-f'}{d}\right),$$

причем, как легко показать,

$$\sum_{\substack{\Omega'<<\log^4 x,\\ f_0'}} \chi_2\cdot\chi_{p_0}\cdot\delta(x,\Omega',f_0') << x^{\frac{1}{2}}\log x.$$

Но $1+\left(\frac{-f'}{\Delta_1}\right) = \delta^{(0,2)} = 0$ или 2 на всей прогрессии $f' = f_0' + 8p_0\Omega' t'$; следовательно, меняя порядок суммирования, имеем

$$S(x,\Omega',f_0') = \delta^{(0,2)}\cdot \sum_{d\leqslant\sqrt{\frac{(Dx+\alpha)x-p_0^2}{\Omega}}} \sum_{\substack{\Delta_1\equiv 0(\mathrm{mod}\, d),\\ d\cdot T(d)<t'\leqslant\frac{x-f_0'}{8p_0\Omega}}} \left(\frac{-f_0'-8p_0\Omega' t'}{d}\right) + \\ +\delta(x,\Omega',f_0'),$$

где

$$d\cdot T(d) = \frac{-\alpha - f_0'\cdot 2D + \sqrt{\alpha^2+4D(d^2\Omega+p_0^2)}}{2D\cdot 8p_0\cdot\Omega'}.$$

Введем обозначение

$$K = \sqrt{\frac{(Dx+\alpha)x-p_0^2}{\Omega}}. \tag{3.4}$$

Имеем

$$S(x,\Omega',f_0') = \delta^{(0,2)}\cdot S_1(x,\Omega',f_0') - \delta^{(0,2)}\cdot S_2(x,\Omega',f_0') + \\ +\delta(x,\Omega',f_0'),$$

где

$$S_1(x,\Omega',f_0') = \sum_{d\leqslant K} \sum_{\substack{\Delta_1\equiv 0(\mathrm{mod}\, d),\\ t'\leqslant \frac{x-f_0'}{8p_0\Omega'}}} \left(\frac{-f_0'-8p_0\Omega' t'}{d}\right),$$

$$S_2(x,\Omega',f_0') = \sum_{d\leqslant K} \sum_{\substack{\Delta_1\equiv 0(\mathrm{mod}\, d),\\ t'\leqslant d\cdot T(d)}} \left(\frac{-f_0'-8p_0\Omega' t'}{d}\right).$$

Итак, нами доказан следующий аналог формулы (2.3):

$$\sum_{f\leqslant x} A_3(f,D,\alpha+2p_0\sqrt{-D}) = 24 \sum_{\substack{\Omega'<<\log^4 x,\\ f_0'}} \chi_2\cdot\chi_{p_0}\cdot\delta^{(0,2)}\cdot S_1(x,\Omega',f_0') -$$

$$-24 \sum_{\substack{\Omega'<<\log^4 x,\\ f_0'}} \chi_2\cdot\chi_{p_0}\cdot\delta^{(0,2)}\cdot S_2(x,\Omega',f_0') + O\left(\frac{x}{\log x}\right). \qquad (3.5)$$

3.2. Методами § 2 исследуем теперь суммы $S_1(x,\Omega',f_0')$ и $S_2(x,\Omega',f_0')$. Начнем с первой из них. Положим ($\Delta_1=\Delta_1(f')=\Delta_1(f_0'+8p_0\Omega' t')$)

$$\Phi\left(\frac{t'}{d}\right) = \begin{cases} \left(\frac{-f_0'-8p_0\Omega' t'}{d}\right), & \text{если}\quad \Delta_1\equiv 0(\mathrm{mod}\, d),\\ 0, & \text{если}\quad \Delta_1\not\equiv 0(\mathrm{mod}\, d).\end{cases}$$

Имеет место следующий аналог леммы 4.

Лемма 11. *Пусть*

$$X=\frac{x-f_0'}{8p_0\Omega'},\quad \Delta'\asymp\frac{1}{\log x};$$

напомним, что K имеет вид (3.4); тогда

$$S_1(x,\Omega',f_0') = \sum_{d\leqslant K}\sum_{t'\leqslant X}\Phi\left(\frac{t'}{d}\right) =$$

$$= X\sum_{d\leqslant K}\frac{1}{d}\sum_{t'=1}^{d}\Phi\left(\frac{t'}{d}\right) + O\left(\Delta'\cdot\frac{x}{\Omega^{1/2}}\right) +$$

$$+O\left(\sum_{0<|m|<\Delta'^{-1-\varepsilon}}\frac{1}{|m|}\sum_{d\leqslant K}\left|\sum_{\substack{t'=1\\ \Delta_1(f_0'+8p_0\Omega' t')\equiv 0(\mathrm{mod}\, d)}}^{d}\left(\frac{-f_0'-8p_0\Omega' t'}{d}\right)\cdot e^{\frac{2\pi i m t'}{d}}\right|\right), \qquad (3.6)$$

где $\varepsilon>0$ — сколь угодно малая константа.

Легко видеть (если опираться на рассуждения из § 2), что

$$X\sum_{d\leqslant K}\frac{1}{d}\sum_{t'=1}^{d}\Phi\left(\frac{t'}{d}\right) = c_1'\cdot L(1)\cdot X + O(x^{\frac{5}{8}+\varepsilon}),$$

где $L(s)$ — дзета-функция, ассоциированная с новой формой $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n$, $q = e^{2\pi i\tau}$, веса 1 и характера ε относительно $\Gamma_0(N)$, у которой при $p \nmid 2Dp_0(\alpha^2 + 4Dp_0^2)$

$$a(p) = \sigma(p) = \sum_{\substack{0<f\leqslant p,\\ (Df+\alpha)f-p_0^2\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)}} \left(\frac{-f}{p}\right) = \sum_{\substack{0<f\leqslant p,\\ f^2-4D\alpha f-4^2D^3p_0^2\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)}} \left(\frac{f}{p}\right)$$

(подробности см. в п.2.5); $c_1' > 0$; при этом используется аналог оценки (2.16) (см. (3.8) ниже).

Аналогом оценки леммы 5 является в нашем случае оценка

$$\sum_{d\leqslant K} \Big| \sum_{\substack{t'=1\\ \Delta_1(f_0'+8p_0\Omega' t')\equiv 0 (\mathrm{mod}\, d)}}^{d} \left(\frac{-f_0' - 8p_0\Omega' t'}{d}\right)\cdot e^{\frac{2\pi i m t'}{d}} \Big| << $$

$$<< \frac{\tau(|m|)x(\log\log x)^{5/2}}{\Omega^{1/2}\cdot \log^{\delta} x}, \quad \delta = \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, нами доказана асимптотическая формула

$$S_1(x, \Omega', f_0') = c_1' \cdot L(1) \cdot X + O\left(\frac{x(\log\log x)^{9/2}}{\Omega\cdot \log^{\delta} x}\right). \tag{3.7}$$

Сходно рассматривается сумма $S_2(x, \Omega'; f_0')$, однако в аналоге формулы (3.6) для $S_2(x, \Omega', f_0')$ вместо члена

$$X \sum_{d\leqslant K} \frac{1}{d} \sum_{t'=1}^{d} \Phi\left(\frac{t'}{d}\right)$$

будет стоять член

$$\sum_{d\leqslant K} T(d) \sum_{t'=1}^{d} \Phi\left(\frac{t'}{d}\right),$$

для которого имеет место оценка сверху

$$<< x^{\frac{5}{8}+\varepsilon};$$

эта оценка следует из результата

$$\sum_{d\leqslant x} \sum_{t'=1}^{d} \Phi\left(\frac{t'}{d}\right) << x^{\frac{5}{8}+\varepsilon} \tag{3.8}$$

(ср. с (2.16)).

Поэтому имеем

$$S_2(x, \Omega', f_0') << \frac{x(\log\log x)^{9/2}}{\Omega\cdot \log^{\delta} x}. \tag{3.9}$$

Подставляя полученные результаты (3.7), (3.9) в формулу (3.5), имеем

$$\sum_{f\leqslant x} A_3(f,D,\alpha+2p_0\sqrt{-D}) =$$

$$= c_2\cdot L(1)\cdot x + O(\frac{x(\log\log x)^{13/2}}{\log^\delta x}),$$

где $c_2 \geqslant 0$ — константа.

Чтобы показать, что $c_2 > 0$, достаточно найти прогрессию

$$f' = f_0' + 8p_0\Omega' t',$$

для которой $\chi_2 = 1$, $\chi_{p_0} > 0$, $\delta^{(0,2)} = 2$.

Используя дополнительные предположения $\alpha \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$, $p_0 \nmid (2D+\alpha)$, легко показать, что такой прогрессией будет (с $\chi_{p_0} = 1$)

$$f' = 2 + 8p_0\cdot 2\cdot t'.$$

Тем самым пункты (i), (ii) теоремы 2 доказаны для $\beta_0 = p_0$. Общий случай рассматривается аналогично. Теорема 2 доказана.

3.3. Как указывалось в замечании к теореме 2, если $\alpha+\beta\sqrt{-D}$ удовлетворяет ограничениям (i) теоремы 2 и если $\alpha+\beta\sqrt{-D}$ представимо суммой трех квадратов целых чисел из $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, то имеет место асимптотика (1.6), $c_2 > 0$. Действительно, из доказательства теоремы 2 следует, что наличие такого представления влечет существование прогрессии

$$f_0' + 8p_0\Omega' t',$$

для которой $\chi_2 = 1$, $\chi_{p_0} > 0$, $\delta^{(0,2)} = 2$.

Список литературы

[1] Siegel C.L., *Additive Theorie der Zahlkörper*, I, Math. Ann. **87** (1922), 1–35; II **88** (1923), 184–210; *Gesammelte Abhandlunge*, Bd 1, Springer-Verlag, Berlin etc., **1966**, pp. 119–153; 180–206.

[2] Siegel C.L., *Sums of m-th powers of algebraic integers*, Ann. Math. **46** (1945), 313–339; *Gesammelte Abhandlungen*, Bd 3, Springer-Verlag, Berlin etc., **1966**, pp. 12–38.

[3] Cohn H., Pall G., *Sums of four squares in a quadratic ring*, Trans. Amer. Math. Soc. **105** (1962), 536–556.

[4] Körner O., *Quadratusmmen und Kongruenzlösungsdichten in p-adischen Zahlkörpern*, Math. Nachr. **57** (1973), 15–38.

[5] Фоменко О.М., *О некоторых диофантовых системах*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ, т. 116, 1982, с. 155–160.

[6] Фоменко О.М., *Суммы квадратов в мнимых квадратичных полях*, I, Зап. науч. семинаров ЛОМИ, т. 125, 1983, с. 184–197; II, т. 185, 1990, с. 160–167.

[7] Pall G., Taussky O., *Application of quaternions to the representations of a binary quadratic form as a sum of four squares*, Proc. Royal Irish Akad. Sect.A **58** (1957), 23–28.

[8] Малышев А.В., *О взвешенном количестве целых точек, лежащих на поверхностях второго порядка*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ, т. 1, 1966, с. 6–83.

[9] Левитан Б.М., *Асимптотические формулы для числа точек решетки в пространствах Евклида и Лобачевского*, Успехи мат. наук **42**, вып. 3 (1987), 13–38.

[10] Fricker F., *Eine Beziehung zwischen der hyperbolischen Geometrie und der Zahlentheorie*, Math. Ann. **191** (1971), 293–312.

[11] Elstrodt J., Grunewald F., Mennicke J., *Arithmetic applications of the hyperbolic lattice point theorem*, Proc. London Math. Soc. **57** (1988), 239–283.

[12] Niven I., *Integers of quadratic fields as sums of squares*, Trans. Amer. Math. Soc. **48** (1940), 405–417.

[13] Moser C., *Représentation de −1 comme somme de carrés d'entiers dans un corps quadratique imaginaire*, Enseingn. Math. **17** (1971), 279–287.

[14] Estes D.R., Hsia J.S., *Exceptional integers of some ternary quadratic forms*, Adv. Math. **45** (1982), 310–318.
[15] Peters M., *Summen von Quadraten in Zahlringen*, J.reine und angew. Math. **268/269** (1974), 318–323.
[16] Estes D.R., Hsia J.S., *Sums of three integer squares in complex quadratic fields*, Proc. Amer. Math. Soc. **89** (1983), 211–214.
[17] Hsia J.S., *An aplication of algebraic K-theory to sums of squares*, Contemp. Math. **55** (1986), 479–485.
[18] Revoy P., *Sur les sommes de carrés dans un anneau*, Ann. Sci. Univ. Becancon. Math. **11** no. 3 (1979), 3–8.
[19] Hooley C., *On the distribution of the roots of polynomial congruences*, Mathematika **11** (1964), 39–49.
[20] Pall G., *Quaternions and sums of three squares*, Amer. J. Math. **64** (1942), 503–513.
[21] Pall G., *Representation by quadratic forms*, Canad. J. Math. **1** (1949), 344–364.
[22] Виноградов И.М., *Метод тригонометрических сумм в теории чисел*, Наука, М., 1980.
[23] Hooley C., *On the number of divisors of quadratic polynomials*, Acta Math. **110** (1963), 97–114; *О числе делителей квадратичных полиномов*, Математика, Период. сб. переводов иностранных статей **12** no. 5 (1968), 3–18.
[24] Фоменко О.М., *О распределении корней квадратичного сравнения*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ, т. 183, 1990, с. 155–164.
[25] Serre J.-P., *Modular forms of weight one and Galois representations*, Pros. Symposium on Algebraic Number Fields, Acad. Press, London, 1977, pp. 193–268.
[26] Ishii N., *Cusp forms of weight one, quartic reciprocity and elliptic curves*, Nagoya Math. J. **98** (1985), 117–137.
[27] Good A., *The square mean of Dirichlet series associated with cusp forms*, Mathematika **29** (1982), 278–295.
[28] Jutila M., *Lectures on a method in the theory of exponential sums*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1987.
[29] Rankin R.A., *Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions, I*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **35** (1939), 351–356.
[30] Барбан М.Б., Вехов П.П., *Суммирование мультипликативных функций от полиномов*, Мат. заметки **5**, вып. 6 (1969), 669–680.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А.Стеклова РАН
191011, Санкт-Петербург, наб. р.Фонтанки, 27

Поступило 1 апреля 1991 г.