В. П. Танана, А. Б. Бредихина, Т. С. Камалтдинова, Об оценке погрешности приближенного решения одной обратной задачи в классе кусочно-гладких функций, *Тр. ИММ УрО РАН*, 2012, том 18, номер 1, 281–288

https://www.mathnet.ru/timm797

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 1 2012

УДК 517.948

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ В КЛАССЕ КУСОЧНО-ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ[1]

В. П. Танана, А. Б. Бредихина, Т. С. Камалтдинова

Нелинейным методом проекционной регуляризации решена обратная задача Коши при условии кусочной гладкости искомого решения.

Ключевые слова: операторные уравнения, регуляризация, метод, оценка погрешности, некорректная задача.

V. P. Tanana, A. B. Bredikhina, T. S. Kamaltdinova. On an error estimate for an approximate solution for an inverse problem in the class of piecewise smooth functions.

An inverse Cauchy problem is solved by the nonlinear projection regularization method under the assumption that the required solution is smooth.

Keywords: operator equations, regularization, method, error estimate, ill-posed problem.

Введение

Исследования, посвященные повышению точности приближенных решений обратных задач за счет более полного использования априорной информации и уточнению соответствующих оценок актуальны.

Часто при решении обратных задач априорной информацией об искомом решении является предположение о его кусочной гладкости. Как правило, это условие расширяется до принадлежности его пространству $W_2^1(X)$, с которым в дальнейшем и работают, получая соответствующие оценки погрешности [1].

В работе [2] для увеличения точности приближенного решения В.К. Ивановым был предложен новый подход, заключающийся в использовании класса корректности $M_r(\delta)$, зависящего от δ.

В настоящей работе развивается подход работы [2], а также сделана попытка, используя условия кусочной гладкости решения, повысить точность приближенного решения одной обратной задачи.

Заметим, что кусочная гладкость решения $u(x)$, а также принадлежность $u(x)$ и $u'(x)$ пространствам $L_1(-\infty,\infty)$ и $L_2(-\infty,\infty)$ влекут, что для любого $\varepsilon > 0$ $u(x) \in W_2^{\frac{3}{2}(1-\varepsilon)}(-\infty,\infty)$ и при $\varepsilon \to 0$ $\|u(x)\|_{W_2^{\frac{3}{2}(1-\varepsilon)}} \to \infty$ см. [3, с. 252].

Для использования этого факта наиболее удобным является нелинейный метод проекционной регуляризации [4], в котором приближенное решение u_δ уравнения $Au = g$ определяется исходными данными g_δ, δ. В этом уравнении A — инъективный оператор, $\|g_\delta - g_0\| \le \delta$. Тогда в случае принадлежности точного решения u_0 классу корректности M_r справедлива оценка погрешности $\|u_\delta - u_0\| \le 7\omega(\delta, M_r)$, в которой $\omega(\delta, M_r)$ — модуль непрерывности оператора A^{-1} на классе M_r [1].

Данный подход проиллюстрирован на примере обратной задачи Коши для уравнения теплопроводности при условии кусочной гладкости искомого решения.

[1]Работа поддержана грантом р_урал_а (проект 10-01-96000).

1. Постановка задачи и основные понятия

Пусть H — гильбертово пространство, A и B — линейные ограниченные самосопряженные операторы, отображающие H в H. Предположим, что спектор $\mathrm{Sp}(A)$ оператора A совпадает с отрезком $\big[0, \|A\|\big]$, а

$$B = G(A), \tag{1.1}$$

где $G(\sigma)$ — строго возрастающая, непрерывная на $\big[0, \|A\|\big]$ функция такая, что $G(0) = 0$.

Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = g; \quad u \in H, \quad g \in H. \tag{1.2}$$

О п р е д е л е н и е 1. Множество M_r будем называть классом корректности для уравнения (1.2), если сужение $A^{-1}_{N_r}$ оператора A^{-1} на множество $N_r = AM_r$ равномерно непрерывно.

Предположим, что при $g = g_0$ существует решение $u_0 \in H$ уравнения (1.2), но точное значение правой части g_0 нам неизвестно, а вместо него даны $g_\delta \in H$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\|g_\delta - g_0\| \le \delta. \tag{1.3}$$

Требуется, используя исходную информацию g_δ и δ, определить приближенное решение u_δ уравнения (1.2) и, с учетом того, что $u_0 \in M_r$, получить оценку для величины $\|u_\delta - u_0\|$.

О п р е д е л е н и е 2. Семейство операторов $\big\{T_\delta\colon\ 0 < \delta \le \delta_0\big\}$ будем называть методом приближенного решения уравнения (1.2) на множестве M_r, если для любого $\delta \in (0, \delta_0]$ оператор T_δ непрерывно отображает H в H и $T_\delta g_\delta \longrightarrow u_0$ при $\delta \longrightarrow 0$ равномерно на множестве M_r при условии, что $\|g_\delta - Au_0\| \le \delta$.

2. Нелинейный метод проекционной регуляризации

В методе проекционной регуляризации [1] используется регуляризующее семейство операторов $\big\{P_\alpha\colon\ 0 < \alpha \le \|A\|\big\}$, действующих из H в H и определяемых формулой

$$P_\alpha g = \int\limits_\alpha^{\|A\|} \frac{1}{\sigma}\, dE_\sigma g, \quad \alpha \in \big(0, \|A\|\big], \tag{2.1}$$

где $\big\{E_\sigma\colon\ 0 \le \sigma \le \|A\|\big\}$ — спектральное разложение единицы E, порожденное оператором A.

Приближенное решение уравнения (1.2) определим формулой

$$u_\delta^\alpha = P_\alpha g_\delta. \tag{2.2}$$

Для выбора параметра регуляризации $\hat\alpha = \hat\alpha(g_\delta, \delta)$ в формуле (2.2) по исходным данным (g_δ, δ) используем уравнение

$$\big\|Au_\delta^\alpha - g_\delta\big\|^2 = 16\delta^2. \tag{2.3}$$

Лемма 1 [4]. *Пусть* $\vartheta(\alpha) = \big\|Au_\delta^\alpha - g_\delta\big\|^2$. *Тогда* $\vartheta(\alpha) \in C\big[0, \|A\|\big]$, $\vartheta(\alpha)$ *не убывает и, если* $\|g_\delta\| > 4\delta$, *то существует значение* $\hat\alpha = \hat\alpha(g_\delta, \delta)$, *удовлетворяющее уравнению* (2.3).

В дальнейшем приближенное решение u_δ уравнения (1.2) определим формулой

$$u_\delta = \hat T_\delta g_\delta = \begin{cases} P_{\hat\alpha(g_\delta,\delta)} g_\delta, & \text{при} \quad \|g_\delta\| > 4\delta, \\ 0, & \text{при} \quad \|g_\delta\| \le 4\delta, \end{cases} \tag{2.4}$$

где P_α определен формулой (2.1), а $\hat\alpha(g_\delta, \delta)$ — уравнением (2.3).

Лемма 2 [4]. *Оператор $\hat{T}_\delta$, определяемый формулой* (2.4)*, непрерывен на пространстве H.*

Лемма 3 [1]. *Пусть оператор P_α определен формулой* (2.1)*. Тогда*

$$\|P_\alpha\| = \frac{1}{\alpha}.$$

Лемма 4. *Если $\|g_\delta\| > 4\delta$, а $\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)$ определено* (2.3)*, то для любого $\alpha \in \big(0, \|A\|\big]$ из того, что*

$$\|AP_\alpha g_\delta - g_\delta\| < 4\delta \tag{2.5}$$

следует, что

$$\|P_\alpha\| \geq \|P_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)}\|.$$

Доказательство. Так как на основании леммы 1 функция $\vartheta(\alpha) = \big\|Au_\delta^\alpha - g_\delta\big\|^2$ не убывает на отрезке $\big[0, \|A\|\big]$, то из (2.5) следует, что $\alpha \leq \hat{\alpha}(g_\delta,\delta)$, а из леммы 3 следует утверждение леммы. Тем самым лемма доказана.

Обозначим через $\overline{\alpha}(\delta)$ значение параметра регуляризации, удовлетворяющее уравнению

$$r\alpha G(\alpha) = \delta. \tag{2.6}$$

Из уравнения (2.6) и условий, наложенных в (1.1) на функцию $G(\alpha)$, следует, что при $\delta < r\|A\|G(\|A\|)$ уравнение (2.6) имеет единственное решение. □

Утверждение. *Пусть $u_0 \in M_r$, $\|g_\delta\| > 4\delta$. Тогда для значений $\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)$ и $\overline{\alpha}(\delta)$ выполняются соотношения*

$$\big\|Au_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)} - g_\delta\big\| \leq 3\delta, \quad \hat{\alpha}(g_\delta,\delta) \geq \overline{\alpha}(\delta)$$

и

$$\big\|P_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)}g_\delta - P_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)}g_0\big\| \leq rG[\overline{\alpha}(\delta)].$$

Доказательство. Обозначим через $H_\alpha^\perp$ подпространство H, определяемое формулой

$$H_\alpha^\perp = [E - E_\alpha]H.$$

Тогда из (2.1) будет следовать, что

$$P_\alpha g = A^{-1}g \quad \text{при } g \in H_\alpha^\perp. \tag{2.7}$$

Учитывая инвариантность подпространства $H_\alpha^\perp$ относительно оператора A, доказанную в [5, с. 336], и соотношений (1.3) и (2.7), получаем

$$\big\|Au_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)} - Au_0^{\overline{\alpha}(\delta)}\big\| \leq \delta,$$

где $u_0^{\overline{\alpha}(\delta)} = P_{\overline{\alpha}(\delta)}g_0$, а $u_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)} = P_{\overline{\alpha}(\delta)}g_\delta$.

Так как

$$\big\|Au_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)} - g_0\big\|^2 = \int\limits_0^{\overline{\alpha}(\delta)} d(E_\sigma g_0, g_0),$$

а

$$\int\limits_0^{\overline{\alpha}(\delta)} d(E_\sigma g_0, g_0) = \int\limits_0^{\overline{\alpha}(\delta)} \sigma^2 G^2(\sigma)\, d(E_\sigma v_0, v_0),$$

то

$$\left\|Au_0^{\overline{\alpha}(\delta)} - g_0\right\| \le r\overline{\alpha}(\delta)G[\overline{\alpha}(\delta)]. \tag{2.8}$$

Из (2.6) и (2.8) следует, что

$$\left\|Au_0^{\overline{\alpha}(\delta)} - g_0\right\| \le \delta, \tag{2.9}$$

а из (2.6) и (2.9) вытекает неравенство

$$\left\|Au_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)} - g_\delta\right\| \le 3\delta. \tag{2.10}$$

Из лемм 3 и 4, соотношения (2.10) имеем

$$\hat{\alpha}(g_\delta, \delta) \ge \overline{\alpha}(\delta). \tag{2.11}$$

Так как

$$\left\|P_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)}g_\delta - P_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)}g_0\right\| \le \frac{\delta}{\hat{\alpha}(g_\delta, \delta)}, \tag{2.12}$$

то из (2.12) и (2.11) следует, что

$$\left\|P_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)}g_\delta - P_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)}g_0\right\| \le \frac{\delta}{\overline{\alpha}(\delta)}, \tag{2.13}$$

а из (2.6) и (2.13) следует, что

$$\left\|P_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)}g_\delta - P_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)}g_0\right\| \le rG[\overline{\alpha}(\delta)].$$

Тем самым утверждение доказано.

Теорема [4]. *Пусть $u_0 \in M_r, \|g\| > 4\delta$, u_δ определен формулой* (2.4), *а* $\overline{\alpha}(\delta)$ — *формулой* (2.6). *Тогда справедлива оценка*

$$\|u_\delta - u_0\| \le 7rG[\overline{\alpha}(\delta)].$$

3. Оценка погрешности нелинейного метода проекционной регуляризации при решении обратной задачи Коши для уравнения теплопроводности

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}; \quad -\infty < x < \infty, \quad t \in (0,T], \quad T > 1, \tag{3.1}$$

где $u(x,t) \in C\{(-\infty,\infty)\times[0,T]\}\cap C^{2,1}\{(-\infty,\infty)\times(0,T]\}$ для любого $t \in (0,T]$, $u(x,t)$, $u'_x(x,t)$, $u''_{xx}(x,t) \in L_2(-\infty,\infty)\cap L_1(-\infty,\infty)$ и существует функция $\chi(x) \in L_1(-\infty,\infty)$ такая, что почти для любого $t \in (0,T]$

$$|u(x,t)| + \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right| \le \chi(x); \quad x \in (-\infty,\infty). \tag{3.2}$$

Пусть нам дано распределение температуры $g(x) \in L_2(-\infty,\infty) \cap L_1(-\infty,\infty)$ в момент времени $T > 0$

$$u(x,T) = g(x); \quad -\infty < x < \infty, \tag{3.3}$$

а начальное распределение $u_0(x)$

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{3.4}$$

требуется определить.

Предположим, что при $g(x) = g_0(x)$ существует $u_0(x)$ такое, что $u_0(x)$, $u'_0(x) \in L_2(-\infty,\infty)\cap L_1(-\infty,\infty)$. Функция $u'_0(x)$ является четной и имеет конечное число точек разрыва первого рода. Решение задачи (3.1), (3.4) удовлетворяет условию $u(x,T) = g_0(x)$. Но точное значение $g_0(x)$ нам неизвестно, а вместо него даны некоторое приближение $g_\delta(x) \in L_2(-\infty,\infty) \cap L_1(-\infty,\infty)$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\|g_\delta(x) - g_0(x)\|_{L_2} \le \delta. \tag{3.5}$$

Требуется, используя исходные данные (g_δ, δ) задачи (3.1), (3.3), (3.5), определить приближенное решение $u_\delta(x) \in L_2(-\infty,\infty)$ и оценить величину $\|u_\delta(x) - u_0(x)\|_{L_2}$.

Для решения задачи (3.1), (3.3), (3.5) воспользуемся пространствами $W_2^p(-\infty,\infty)$, $p > 0$, описанными в [3, с. 252], и преобразованием Фурье, применимость которого следует из условия (3.2).

Таким образом, получим, что

$$\hat{u}'_t(\lambda,t) = -\lambda^2 \hat{u}(\lambda,t); \quad \lambda \in (-\infty,\infty), \quad t \in (0,T] \tag{3.6}$$

и

$$\hat{u}(\lambda,T) = \hat{g}(\lambda); \quad \lambda \in (-\infty,\infty), \tag{3.7}$$

где $\hat{u}(\lambda,t) = \mathcal{F}[u(x,t)]$, а $\hat{g}(\lambda) = \mathcal{F}[g(x)]$.

Решая задачу (3.6), (3.7), сведем ее к операторному уравнению

$$A\hat{u}(\lambda) = e^{-\lambda^2 T}\hat{u}(\lambda) = \hat{g}(\lambda); \quad \hat{u}(\lambda), \quad \hat{g}(\lambda) \in L_2(-\infty,\infty). \tag{3.8}$$

Из условий четности производной $u'_0(x)$ и существования у нее лишь конечного числа точек разрыва первого рода следует, что

$$u'_0(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) + \psi(x), \tag{3.9}$$

где для любого $i \in \overline{1,n}$ существуют числа $a_i \ne 0$ и $x_i > 0$ такие, что

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} a_i, & -x_i \le x \le x_i, \\ 0, & x < -x_i,\ x > x_i, \end{cases} \tag{3.10}$$

а

$$\psi(x) \in W_2^{\frac{1}{2}}(-\infty,\infty). \tag{3.11}$$

Таким образом, из (3.10) следует, что

$$\hat{\varphi}_i(\lambda) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, a_i \dfrac{\sin x_i\lambda}{\lambda}, & -\infty < \lambda < 0,\ 0 < \lambda < \infty, \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, a_i x_i, & \lambda = 0, \end{cases} \tag{3.12}$$

где $\hat{\varphi}_i(\lambda) = \mathcal{F}[\varphi_i(x)]$.

Сформулируем одну лемму.

Лемма 5 [3]. *Пусть $\varphi(x) \in L_2(-\infty,\infty) \cap L_1(-\infty,\infty)$, а $\hat{\varphi}(\lambda) = \mathcal{F}[\varphi(x)]$. Тогда из того, что $\varphi(x) \in W_2^p(-\infty,\infty)$, $p \in (0,\infty)$, следует, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[1 + |\lambda|^{2p}\right] |\hat{\varphi}(\lambda)|^2 \, d\lambda < \infty$$

и

$$\|\varphi(x)\|^2_{W_2^p} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 + |\lambda|^{2p}\right] |\hat{\varphi}(\lambda)|^2 \, d\lambda.$$

Из (3.12) и леммы 5 следует, что для любого $\varepsilon \in (0, 1/2)$

$$\varphi_i(x) \in W_2^{\frac{1}{2}(1-\varepsilon)}\big(-\infty, \infty\big), \quad i \in \overline{1,n}. \tag{3.13}$$

Из (3.13) следует, что для любого $i \in \overline{1,n}$ существует c_i такая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big[1 + |\lambda|^{1-\varepsilon}\big] |\hat{\varphi}_i(\lambda)|^2 \, d\lambda \leq \frac{4}{\pi} \frac{a_i^2}{\varepsilon} + c_i. \tag{3.14}$$

Из (3.9), (3.11) и (3.14) следует существование числа $a > 0$ такого, что для любого $\varepsilon \in (0, 1/2)$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big[1 + |\lambda|^{3(1-\varepsilon)}\big] |\hat{u}_0(\lambda)|^2 \, d\lambda \leq \frac{a}{\varepsilon} \tag{3.15}$$

и

$$\|A\hat{u}_0(\lambda) - \hat{g}_\delta(\lambda)\| \leq \delta.$$

Применяя к решению уравнения (3.8) метод проекционной регуляризации, введем регуляризующее семейство операторов $\big\{P_\alpha\colon\ \alpha > 0\big\}$, определяемых формулой

$$P_\alpha \hat{f}(\lambda) = \begin{cases} e^{\lambda^2 T} \hat{g}(\lambda), & |\lambda| \leq \alpha, \\ 0, & |\lambda| > \alpha. \end{cases}$$

Таким образом, приближенное решение $u_\delta^\alpha(\lambda)$ в уравнении (3.8) определим формулой

$$\hat{u}_\delta^\alpha(\lambda) = P_\alpha \hat{g}_\delta(\lambda), \tag{3.16}$$

а для выбора параметра регуляризации $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\hat{g}_\delta, \delta)$ в формуле (3.16) используем уравнение

$$\|A\hat{u}_\delta^\alpha - \hat{g}_\delta\|^2 = 16\delta^2. \tag{3.17}$$

Из (3.16) и (3.17) определим приближенное решение $\hat{u}_\delta(\lambda)$ уравнения (3.8) формулой

$$\hat{u}_\delta(\lambda) = \hat{u}_\delta^{\hat{\alpha}(\hat{g}_\delta, \delta)}(\lambda),$$

а из теоремы и соотношений (3.15)–(3.17) следует оценка

$$\|\hat{u}_\delta(\lambda) - \hat{u}_0(\lambda)\| \leq 7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}\, G_\varepsilon\big(\overline{\alpha}(\delta, \varepsilon)\big), \tag{3.18}$$

где функция $G_\varepsilon(\sigma)$ в соответствии с (3.8) и (3.15) определена параметрически формулами

$$G_\varepsilon(\sigma) = \big[1 + |\lambda|^{3(1-\varepsilon)}\big]^{-1/2}, \quad \sigma = e^{-\lambda^2 T}, \quad \lambda \in (-\infty, \infty), \tag{3.19}$$

а $\overline{\alpha}(\delta, \varepsilon)$ определено уравнением

$$\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}\, G_\varepsilon(\alpha)\alpha = \delta. \tag{3.20}$$

Так как оценка (3.18) выполняется при любом $\varepsilon \in (0, 1/2]$, то выберем значение $\varepsilon(\delta)$, минимизирующее эту оценку, т. е.

$$7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon(\delta)}}\, G_{\varepsilon(\delta)}\big(\overline{\alpha}(\delta, \varepsilon(\delta))\big) = \min_{\varepsilon \in (0, 1/2]} 7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}\, G_\varepsilon\big(\overline{\alpha}(\delta, \varepsilon)\big). \tag{3.21}$$

Тогда из (3.18)–(3.21) для $\hat{u}_\delta(\lambda)$ будет справедлива оценка

$$\|\hat{u}_\delta(\lambda) - \hat{u}_0(\lambda)\| \le 7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon(\delta)}}\, G_{\varepsilon(\delta)}\big(\overline{\alpha}(\delta, \varepsilon(\delta))\big). \tag{3.22}$$

Применяя к $\hat{u}_\delta(\lambda)$ обратное преобразование Фурье $\mathcal{F}^{-1}$ и взяв действительную часть, получим приближенное решение $u_\delta(x) = \mathrm{Re}\big[\mathcal{F}^{-1}(\hat{u}_\delta(\lambda))\big]$ обратной задачи (3.1), (3.3), (3.5). Для этого решения ввиду теоремы Планшереля [6, с. 411] будет справедлива оценка (3.22).

Для сравнения оценки (3.22) с известными оценим правую часть соотношения (3.22) в элементарных функциях.

Из (3.19) следует, что при достаточно малых значениях σ справедливо соотношение

$$G_\varepsilon(\sigma) \le T^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \ln^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \frac{1}{\sigma}\,, \tag{3.23}$$

а из (3.23) и того, что

$$\lim_{\sigma\to 0} \frac{G_\varepsilon(\sigma)}{T^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \ln^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \dfrac{1}{\sigma}} = 1,$$

следует, что при достаточно малых значениях σ

$$T^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)}\sigma^2 < \sigma G_\varepsilon(\sigma). \tag{3.24}$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}\, T^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)}\alpha^2 = \delta. \tag{3.25}$$

Решение $\hat{\alpha}(\delta, \varepsilon)$ уравнения (3.25) определяется формулой

$$\hat{\alpha}(\delta, \varepsilon) = T^{-\frac{3}{8}(1-\varepsilon)} \sqrt{\delta\sqrt{\frac{\varepsilon}{a}}}\,. \tag{3.26}$$

Из (3.20), (3.24) и (3.25) следует, что

$$\overline{\alpha}(\delta, \varepsilon) \le \hat{\alpha}(\delta, \varepsilon). \tag{3.27}$$

Таким образом, из (3.18), (3.23) и (3.27) следует, что

$$\|u_\delta(x) - u_0(x)\| \le 7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}\, T^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \ln^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \frac{1}{\hat{\alpha}(\delta, \varepsilon)}. \tag{3.28}$$

Из (3.26) и (3.28) окончательно получим

$$\|u_\delta(x) - u_0(x)\| \le 7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}\, (2T)^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \ln^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \Big[T^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\varepsilon}\delta}\Big]. \tag{3.29}$$

В оценке (3.29) значение $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ определим формулой

$$\varepsilon(\delta) = \frac{2a}{\ln\ln \dfrac{1}{\delta}}\,. \tag{3.30}$$

Из (3.29) и (3.30) следует, что

$$\|u_\delta(x) - u_0(x)\| \le \frac{7}{2}\sqrt{2}(2T)^{3/4}\sqrt{\ln\ln\frac{1}{\delta}}\; \ln^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon(\delta))} \left[\frac{\sqrt{\ln\ln\dfrac{1}{\delta}}}{\sqrt{2}\delta}\right]. \tag{3.31}$$

Если $\ln\ln\dfrac{1}{\delta_0} \geq \sqrt{2}$, то при $\delta \in (0, \delta_0]$ из (3.31) следует оценка

$$\|u_\delta(x) - u_0(x)\| \leq \frac{7}{2}\sqrt{2}(2T)^{3/4}\sqrt{\ln\ln\frac{1}{\delta}}\, \ln^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon(\delta))}\left(\frac{1}{\delta}\right). \tag{3.32}$$

Так как из (3.30) следует, что

$$\ln^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon(\delta))}\left(\frac{1}{\delta}\right) = \ln^{-\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{\delta}\right) \cdot \ln^{\frac{3a}{2\ln\ln\frac{1}{\delta}}}\left(\frac{1}{\delta}\right),$$

а

$$\ln\left[\ln^{\frac{3a}{2\ln\ln\frac{1}{\delta}}}\left(\frac{1}{\delta}\right)\right] = \frac{3a}{2\ln\ln\dfrac{1}{\delta}}\ln\ln\frac{1}{\delta} = \frac{3a}{2},$$

то из (3.32) следует, что

$$\|u_\delta(x) - u_0(x)\| \leq 7\sqrt{2}e^{\frac{3a}{2}}T^{3/4}\sqrt{\ln\ln\frac{1}{\delta}}\,\ln^{-\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{\delta}\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
2. О возможности определения энергетического спектра бозе-системы по термодинамическим функциям / В.К. Иванов, В.А. Коршунов, Т.Н. Решетова, В.П. Танана // Докл. АН СССР. 1976. Т. 228, № 1. С. 19–22.
3. **Крейн С.Г.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1972. 544 с.
4. **Танана В.П., Япарова Н.М.** Об оптимальном по порядку методе решения условно-корректных задач // Сиб. журн. вычисл. математики. 2006. Т. 9, № 4. С. 154–168.
5. **Люстерник Л.А., Соболев В.И.** Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
6. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.

Поступила 16.04.2011

Танана Виталий Павлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Южно-Уральский государственный университет
e-mail: tvpa@susu.ac.ru

Бредихина Анна Борисовна
аспирант
Южно-Уральский государственный университет
e-mail: bredikhina-ann@yandex.ru

Камалтдинова Татьяна Сергеевна
старший преподаватель
Южно-Уральский государственный университет
e-mail: kamaltdinovats@mail.ru