А. А. Фонарёв, О решении нелинейных уравнений с монотонными отображениями, *Дифференц. уравнения*, 1978, том 14, номер 4, 680–689

АПРЕЛЬ 1978 г., ТОМ XIV, № 4

УДК 518 : 517.946

А. А. ФОНАРЕВ

О РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С МОНОТОННЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

В гильбертовом пространстве H рассматривается итерационный процесс, сходящийся к решению уравнения

$$F(x)=0 \quad (x \in H), \tag{1}$$

где отображение $F: H \to H$ монотонное. Отдельно рассматривается случай сепарабельного гильбертова пространства.

Показывается применимость итерационного процесса для нахождения галёркинских приближений решения уравнения (1) со строго монотонным отображением $F: E \to E^*$ (E^* — пространство, сопряженное банахову пространству E). Рассматривается сходимость галёркинских приближений.

Даются приложения к первой краевой задаче для эллиптических дифференциальных уравнений и к двухточечной краевой задаче для дифференциальных уравнений второго порядка.

В рассматриваемых итерационных процессах не предполагается известной постоянная C в неравенстве $\|F(x)\| \leqslant C$ для x из некоторой окрестности решения уравнения (1), знание которой требуется для осуществимости итерационных процессов в [1, 2].

В статье будем придерживаться терминологии книги [3].

1. Итерационный процесс в гильбертовом пространстве H.

Теорема 1. *Пусть: 1) отображение $F: H \to H$ ограниченное и $\operatorname{Re}(F(x)-F(y),\ x-y) \geqslant m(\|x-y\|)$ для всех $x, y \in H$, где $m(t)$ — непрерывная функция, заданная для $t \geqslant 0$, такая, что $m(0)=0$, $m(t)>0$ для $t>0$; 2) решение уравнения (1) существует.*

Тогда для любых чисел δ и γ таких, что $\delta \geqslant \gamma > 0$, и любой последовательности положительных чисел $\{\alpha'_n\}_{n=1}^{\infty}$ такой, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha'_n$ расходится, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha'_n)^2$ сходится, итерационный процесс

$$x_{n+1}=x_n-\alpha_n F(x_n) \tag{2}$$

($n=1, 2, \ldots;$ $\alpha_n=\alpha'_n/a_n$, $\|F(x_n)\|+\delta \geqslant a_n \geqslant \|F(x_n)\|+\gamma$), *начатый с любой точки $x_1 \in H$, сходится к решению уравнения (1).*

Доказательство. Пусть $F(x_0)=0$. Взяв $x_1 \in H$, для последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, определяемой итерационным процессом (2), имеем

$$\|x_{n+1}-x_0\|^2=\|x_n-x_0-\alpha_n[F(x_n)-F(x_0)]\|^2=$$
$$=\|x_n-x_0\|^2-2\alpha_n \operatorname{Re}(F(x_n)-F(x_0),\ x_n-x_0)+\alpha_n^2\|F(x_n)\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|x_n-x_0\|^2-2\alpha_n m(\|x_n-x_0\|)+\alpha_n^2\|F(x_n)\|^2$$

($n=1, 2, \ldots$). Отсюда следует, что

$$\|x_{n+k}-x_0\|^2 \leqslant \|x_n-x_0\|^2-2\sum_{i=n}^{n+k-1}\alpha_i m(\|x_i-x_0\|)+\sum_{i=n}^{n+k-1}\alpha_i^2\|F(x_i)\|^2 \tag{3}$$

($n=1, 2, \ldots;\ k\geqslant 1$).

Из неравенств (3) и выбора последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ в (2) следует, что $\|x_{n+1}-x_0\|^2<\|x_1-x_0\|^2+\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha'_i)^2$ ($n=1, 2, \ldots$), что влечет ограниченность последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Далее из неравенств (3), используя неравенства для последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и ограниченность отображения F, имеем

$$b\sum_{i=1}^{n}\alpha'_i m(\|x_i-x_0\|)\leqslant\|x_1-x_0\|^2-\|x_{n+1}-x_0\|^2+\sum_{i=1}^{n}(\alpha'_i)^2 \quad (n=1, 2, \ldots), \tag{4}$$

где постоянная $b>0$ не зависит от n. Из ограниченности правых частей неравенств (4) константой, не зависящей от n, следует, что из последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся к x_0.

Для любого числа $\varepsilon>0$ существует номер n_k такой, что $\|x_{n_k}-x_0\|^2<\frac{1}{2}\varepsilon^2$ и $\sum_{i=n_k}^{\infty}(\alpha'_i)^2<\frac{1}{2}\varepsilon^2$. Тогда

$$\|x_{n_k+m}-x_0\|^2\leqslant\|x_{n_k}-x_0\|^2+\sum_{i=n_k}^{n_k+m-1}(\alpha'_i)^2<\varepsilon^2,$$

$\|x_{n_k+m}-x_0\|<\varepsilon$ для любого $m>0$. Отсюда следует, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x_0. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. В теореме 1 можно взять $\delta\geqslant\gamma\geqslant 0$ и $a_n=\|F(x_n)\|$ ($n=1, 2, \ldots$).

Замечание 2. Пусть: 1) отображение $F: H\to H$ монотонное, хеминепрерывное и ограниченное; 2) уравнение (1) имеет (возможно, неединственное) решение. Тогда из [2] следует, что решение x_α уравнения

$$\alpha x+F(x)=0 \quad (x\in H), \tag{5}$$

где $\alpha>0$, при $\alpha\to 0$ стабилизируется (сходится) к наименьшему по норме решению уравнения (1). Решение же x_α уравнения (5) можно получить, применяя итерационный процесс теоремы 1.

2. Итерационные процессы в гильбертовом сепарабельном пространстве H. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть ортонормированный базис в H. Обозначив через P_n проектор H на H_n-подпространство, натянутое на $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, для $x\in H$ имеем $P_n x=\sum_{i=1}^{n}(x, \varphi_i)\varphi_i$.

Теорема 2. *Пусть: 1) выполнены условия 1) и 2) теоремы 1; 2) для решения x_0 уравнения (1) имеем $\|P_n x_0-x_0\|\leqslant C/n^\beta$ ($n=1, 2, \ldots$) с постоянными C, $\beta>0$, не зависящими от n.*

Тогда для любых чисел δ *и* γ *таких, что* $\delta \geqslant \gamma > 0$, *и последовательности* $\alpha'_n = 1/n^\alpha$ $(n=1, 2, \ldots)$ *с* α *таким, что* $1/2 < \alpha < 1$ *и* $\alpha + \beta > 1$, *итерационный процесс*

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n P_{n+1} F(x_n) \tag{6}$$

$(n=1, 2, \ldots;\ \alpha_n = \alpha'_n / a_n,\ \ \|F(x_n)\| + \delta \geqslant a_n \geqslant \|F(x_n)\| + \gamma)$, *начатый с любой точки* $x_1 \in H_1$, *сходится к* x_0.

Теорема 2 доказывается так же, как теорема 1, используя неравенство

$$\|x_{n+1} - x_0\|^2 \leqslant \|x_n - x_0\|^2 - 2\alpha_n m(\|x_n - x_0\|) +$$
$$+ 2\alpha_n \|P_{n+1} x_0 - x_0\| \cdot \|F(x_n)\| + \alpha_n^2 \|P_{n+1} F(x_n)\|^2$$

$(n=1, 2, \ldots)$, где $F(x_0) = 0$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность итерационного процесса (6).

Теорема 3. *Пусть: 1) выполнены условия 1) и 2) теоремы 2; 2) отображение* F *является локально липшицевым в каждой точке* $x \in H$, *т. е. для любой фиксированной точки* $x \in H$ *существует постоянная* $L = L(x) > 0$ *такая, что* $\|F(x) - F(y)\| \leqslant L \|x - y\|$ *для всех* y *из некоторой окрестности точки* x.

Тогда для чисел δ *и* γ, *последовательности* $\{\alpha'_n\}_{n=1}^{\infty}$, *таких же, как в теореме 2, итерационный процесс*

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n P_{n+1} F(x_n) \tag{7}$$

$(n=1, 2, \ldots;\ \ \alpha_n = \alpha'_n / a_n,\ \ b_n + \delta \geqslant a_n \geqslant b_n + \gamma,\ \ b_n = \max(\|x_n\|, \|P_{n+1} F(x_n)\|))$, *начатый с любой точки* $x_1 \in H_1$, *сходится к решению уравнения (1).*

Теорема 3 доказывается так же, как теорема 1, используя неравенство

$$\|x_{n+1} - x_0\|^2 \leqslant \|x_n - x_0\|^2 - 2\alpha_n m(\|x_n - P_{n+1} x_0\|) +$$
$$+ 2\alpha_n \|x_n - P_{n+1} x_0\| \cdot \|F(P_{n+1} x_0)\| + \alpha_n^2 \|P_{n+1} F(x_n)\|^2$$

$(n=1, 2, \ldots)$, где $F(x_0) = 0$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность итерационного процесса (7).

Сформулируем теорему, подобную теореме 2 из [2].

Теорема 4. *Пусть отображение* $F: H \to H$ *деминепрерывное. Предположим, что последовательность положительных чисел* $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такая, что ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ *расходится, а последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ *такая, что* $x_n \in H_n$ *и*

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n P_{n+1} F(x_n)$$

$(n=1, 2, \ldots)$ *и* $x_n \to x_0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда* $F(x_0) = 0$.

3. Галёркинские уравнения. В вещественном банаховом пространстве E будем рассматривать E_n — n-мерное подпространство пространства E, натянутое на систему n линейно независимых векторов $\varphi_i \in E$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Пусть выполнено

Условие (A). Отображение $F: E \to E^*$ строго монотонное и является непрерывным на конечномерных подпространствах пространства E.

Зафиксируем $x_0 \in E_n$. Тогда для всех $x \in E_n$ имеем $\varphi_{x_0}(x) \equiv \langle F(x) - F(x_0), x - x_0 \rangle \geqslant 0$. Далее, функция $\varphi_{x_0}: E_n \to R$ (R — вещественная прямая) непрерывна и $\varphi_{x_0}(x) = 0$ только при $x = x_0$.

Пусть R^n — n-мерное евклидово пространство, получающееся введением в E_n скалярного произведения $(x, y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ для $x, y \in E_n$ $\left(x=\sum_{i=1}^{n} x_i\varphi_i,\ y=\sum_{i=1}^{n} y_i\varphi_i\right)$.

Рассмотрим отображение $B: R^n \to R^n$, определяемое следующим образом: $B(x)=y$, где $y=\sum_{i=1}^{n} y_i\varphi_i$ и $y_i=\langle F(x), \varphi_i\rangle$ $(i=1, \ldots, n)$, $x=\sum_{i=1}^{n} x_i\varphi_i$. Для фиксированного $x_0 \in E_n$ и любого $x \in E_n$ $\left(x_0=\sum_{i=1}^{n} x_i^0\varphi_i\right.$ и $\left.x=\sum_{i=1}^{n} x_i\varphi_i\right)$ имеем

$$(B(x)-B(x_0), x-x_0)=\sum_{i=1}^{n} (\langle F(x), \varphi_i\rangle-\langle F(x_0), \varphi_i\rangle)(x_i-x_i^0)=$$
$$=\langle F(x)-F(x_0),\ x-x_0\rangle \equiv \varphi_{x_0}(x).$$

Из доказательства теоремы 1 и изложенного выше в п. 3 следует

Теорема 5. *Пусть: 1) для отображения $F: E \to E^*$ выполнено условие (A); 2) система Галёркина*

$$\langle F(x), \varphi_i\rangle=0 \quad (x \in E_n;\ i=1, \ldots, n) \tag{8}$$

имеет решение.

Тогда решение системы (8) можно найти, применяя к отображению $B: R^n \to R^n$ итерационный процесс теоремы 1.

Известно (см. [3]), что если отображение F из сепарабельного вещественного рефлексивного банахова пространства E в E^* сильно монотонное, хеминепрерывное и ограниченное, то галёркинские приближения решения уравнения

$$F(x)=f \quad (x \in E) \tag{9}$$

сходятся к решению.

В [4] уравнение (9) с монотонным отображением F из банахова пространства E в E^* заменяется семейством регуляризованных (корректных) задач введением сглаживающего отображения с положительным коэффициентом α:

$$\Phi_\alpha(x) \equiv F(x)+\alpha U(x)=f \tag{10}$$

и накладываются условия, при которых решение x_α уравнения (10) при $\alpha \to 0$ стабилизируется по норме пространства E к решению уравнения (9).

Рассмотрим галёркинские приближения решения уравнения (10) при фиксированном $\alpha>0$. Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — полная система в вещественном сепарабельном банаховом пространстве E, а значит, линейная оболочка ее плотна в E. Обозначим через E_m подпространство, натянутое на векторы $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, и рассмотрим систему Галёркина

$$\langle \Phi_\alpha(u)-f,\ \varphi_i\rangle=0 \quad (u \in E_m), \tag{11}$$

$i=1, \ldots, m$. В качестве сглаживающего отображения в (10) возьмем дуальное отображение, и в нижеследующей теореме наложим на пространство E условия, при которых справедлива теорема 1 о стабилизации решения из [4]. Сформулируем теорему (без доказательства).

Теорема 6. *Пусть: 1) F — ограниченное, хеминепрерывное, монотонное отображение из рефлексивного сепарабельного вещественного банахова пространства E в E^*; 2) пространства E и E^* строго выпуклы; 3) в пространстве E выполняется условие Ефимова — Стечкина, т. е. из слабой сходимости и сходимости норм следует сильная сходимость.*

Тогда для фиксированного $\alpha>0$ решение системы (11) существует и единственно для $m=1, 2, \ldots$, и последовательность $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ решений систем (11) сходится по норме пространства E к единственному решению уравнения (10).

Замечание 3. Если выполнены условия теоремы 6, то для отображения $\Phi_\alpha : E \to E^*$ $(\alpha>0)$ выполнены условия теоремы 5.

Введем пространства с аппроксимацией.

Определение 1. Банахово пространство E с аппроксимацией, если существует последовательность конечномерных подпространств $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространства E и последовательность отображений $P_n : E \to E_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ таких, что $x=\lim\limits_{n\to\infty} P_n x$ для любого $x \in E$.

Для пространств с аппроксимацией справедлива

Теорема 7. *Пусть E — вещественное рефлексивное строго выпуклое банахово пространство E с аппроксимацией, удовлетворяющее условию Ефимова — Стечкина, и сопряженное пространство E^* строго выпукло. Предположим, что: 1) отображение $F : E \to E^*$ ограниченное, хеминепрерывное и монотонное; 2) $\langle F(u)-f, u\rangle \geqslant 0$ для $\|u\|>\lambda>0$; 3) существует последовательность положительных чисел $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\gamma_n \to 0$ при $n\to\infty$, такая, что для любого $x \in N$ (N — множество решений уравнения (9), из условий 1) и 2) следует, что N* (см. [3, стр. 264]) *непусто) существует постоянная $C=C(x)>0$ такая, что $\|x-P_n x\| \leqslant C\gamma_n$ $(n=1, 2, \ldots)$; 4) $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ — любая последовательность положительных чисел такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n/\alpha_n=0$.*

Тогда для любого n система уравнений

$$\langle \alpha_n U(x)+F(x)-f, \ \varphi_i^n\rangle=0 \tag{12}$$

($x \in E_n$; U — дуальное отображение из E в E^*), где элементы $\varphi_i^n \in E_n$ $(i=1, \ldots, k_n)$ образуют базис пространства E_n, имеет единственное решение $x_n \in E_n$, и последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ решений систем (12) сходится по норме пространства E к такому решению x_0 уравнения (9), что

$$\|x_0\| = \min \|x\| \quad (x \in N).$$

При доказательстве теоремы 7 было показано, что для последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ решений систем (12) и для любого $x \in N$ справедлива оценка $\|x_n\| \leqslant \|P_n x\| + M\gamma_n/\alpha_n$ $(n=1, 2, \ldots)$, где постоянная $M>0$ зависит от x и не зависит от n. Используя эту оценку, доказательство проводилось, следуя схеме доказательства теоремы 1 из [4].

Замечание 4. Систему (12) теоремы 7 можно решать в конечномерном евклидовом пространстве, применяя итерационный процесс теоремы 1 (см. рассуждения п. 3, предшествующие теореме 5).

Замечание 5. Заменим условие 2) теоремы 7, сохраняя остальные условия, на условие: отображение F коэрцитивное. Пусть f в системе (12) задано приближенно

$$\langle \alpha_n U(x)+F(x)-f_n, \ \varphi_i^n\rangle=0 \tag{13}$$

$(i=1, \ldots, k_n)$, где $\|f_n-f\| \leqslant \delta_n$, $\delta_n \to 0$ при $n\to\infty$. Тогда если $\delta_n/\alpha_n \to 0$ при $n\to\infty$, то для любого n система (13) имеет единственное решение

$x_n \in E_n$ и последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ решений систем (13) сходится по норме пространства E к такому решению x_0 уравнения (9), что

$$\|x_0\| = \min \|x\| \quad (x \in N).$$

4. Приложения к дифференциальным уравнениям.

4.1. Эллиптические дифференциальные уравнения. В области $G \subset R^n$ с границей Γ рассмотрим первую краевую задачу для квазилинейного уравнения вида ([5, § 7])

$$L(u) \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}(x, D^{\gamma}u) = h(x), \quad |\gamma| \leqslant m, \tag{14.1}$$

$$D^{\omega}u|_{\Gamma} = 0, \quad |\omega| \leqslant m-1. \tag{14.2}$$

Далее понадобятся условия (см. [5]):

I. Функции $A_{\alpha}(x, \xi_{\gamma})$ непрерывны по всем аргументам, причем

$$|A_{\alpha}(x, \xi_{\gamma})| \leqslant K_1 \Big(\sum_{|\gamma| \leqslant m} |\xi_{\gamma}|^{p-1} + K_2 \Big),$$

где $p > 1$, K_1, K_2 — постоянные.

II. Для любой функции $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}$ справедливо неравенство

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} (A_{\alpha}(x, D^{\gamma}u), D^{\alpha}u)) \geqslant a_1 \|u\|_{m,p}^{p} - a_2,$$

где $a_1 > 0$, $a_2 \geqslant 0$ — постоянные.

III. Для любых $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}$ и $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}$

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} (A_{\alpha}(x, D^{\gamma}u) - A_{\alpha}(x, D^{\gamma}v), D^{\alpha}(u-v)) \geqslant 0.$$

Замечание 6. Требования, налагаемые на функции $A_{\alpha}(x, \xi_{\gamma})$ в условии I, можно ослабить (см. [3, § 25]).

Для $u(x)$, $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}$ введем $L(u, v) \equiv \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} (A_{\alpha}(x, D^{\gamma}u), D^{\alpha}v)$.

Пусть $v_1(x), \ldots, v_n(x), \ldots$ — система линейно независимых функций, полная в $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}$. В [5] приближенное решение задачи (14.1), (14.2) ищется в виде $u_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_{in} v_i(x)$, при этом постоянные c_{in} определяются из моментных уравнений Галёркина:

$$L(u_n, v_i) = (h, v_i) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{15}$$

Утверждение 1. *Пусть выполнены условия I, II, III. Если в условии III равенство достигается только при $u = v$, то для нахождения решения системы (15) применима теорема 5, причем отображение $B : R^n \to R^n$ имеет вид*

$$(B(u))_i = L(u, v_i) - (h, v_i) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где $u = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i v_i(x)$, $(c_1, \ldots, c_n) \in R^n$, $((B(u))_1, \ldots, (B(u))_n) \in R^n$.

Замечание 7. Если выполнены условия I, II, III, то можно рассмотреть регуляризованные уравнения (см. замечание 3).

4.2. Двухточечная краевая задача. В связи с двухточечной краевой задачей будем рассматривать, применяя обозначения из [6], пространства $\overset{\circ}{W}{}^1_2(0, \pi)$, $L_2(0, \pi)$, $C([0, \pi])$, $C^1([0, \pi])$, $C^2([0, \pi])$, $C^{1/2}([0, \pi])$, причем в качестве скалярного произведения в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(0, \pi)$ возьмем

$(u, v)_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(0,\pi)} = \int\limits_0^\pi u'(x)\,v'(x)\,dx$ для $u(x), v(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(0, \pi)$. Отметим, что для любой функции $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(0, \pi)$ справедливы неравенства

$$\|u\|^2_{L_2(0,\pi)} \leqslant \frac{\pi^2}{4}\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(0,\pi)}, \tag{16}$$

$$\|u\|_{C^{1/2}([0,\pi])} \leqslant \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} + 1\right)\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(0,\pi)}, \tag{17}$$

которые легко выводятся, используя равенство $f(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \operatorname{sign}(x-s) \times$ $\times f'(s)\,ds$ ([7, стр. 154]), справедливое для любой функции $f(x) \in$ $\in C^1([0, \pi])$ с $f(0) = f(\pi) = 0$.

Рассмотрим задачу

$$\mathscr{L}(u(x)) = f(x, u(x)), \tag{18.1}$$

$$u(0) = u(\pi) = 0, \tag{18.2}$$

где $\mathscr{L}(u(x)) \equiv -(a_1(x)u'(x))' + a_0(x)u(x)$.

Предположим, что выполнены условия:

I′. Функция $a_1(x) \in C^1([0, \pi])$ и $a_1(x) \geqslant k_1 > 0$, функция $a_0(x) \in$ $\in C([0, \pi])$ и $a_0(x) \geqslant -k_0$, где $k_0 > 0$, причем $k_2 = k_1 - \frac{\pi^2}{4}k_0 > 0$. Вещественная функция $f(x, u)$ непрерывна на $[0, \pi] \times R$ и (см. [8, гл. 4])

$$\frac{f(x, u) - f(x, v)}{u - v} \leqslant \gamma < \lambda \tag{19}$$

для всех $x \in [0, \pi]$ и всех $u, v \in R$, $u \neq v$, где

$$\lambda = \inf_{\substack{w \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(0,\pi) \\ w \neq 0}} \frac{\int\limits_0^\pi [a_1(x)(w'(x))^2 + a_0(x)w^2(x)]\,dx}{\int\limits_0^\pi w^2(x)\,dx}.$$

II′. Для любой постоянной $C > 0$ существует положительная постоянная $M(C)$ такая, что

$$\left|\frac{f(x, u) - f(x, v)}{u - v}\right| \leqslant M(C)$$

для всех $x \in [0, \pi]$ и всех $u \neq v$ с $|u| \leqslant C$ и $|v| \leqslant C$.

Введем в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(0, \pi)$ квазибилинейную форму

$$B(u, v) \equiv \int\limits_0^\pi [a_1(x)u'(x)v'(x) + a_0(x)u(x)v(x)]\,dx -$$

$$-\int_0^\pi f(x, u(x))v(x)dx$$

для $u,\ v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi)$.

Из неравенств для $a_1(x)$ и $a_0(x)$ в условии I′ и неравенства (16) для любой функции $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi)$ имеем

$$\int_0^\pi [a_1(x)(u'(x))^2 + a_0(x)u^2(x)]\,dx \geqslant k_2\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\pi)}.$$

Отсюда и из неравенства (16) следует, что в неравенстве (19) $\lambda>0$. Учитывая неравенство из [8, стр. 56], имеем $B(u, u-v)-B(v, u-v) \geqslant$

$\geqslant k\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\pi)}$ для всех $u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi)$, где $k = k_2(\lambda-\gamma)/\lambda$.

Из [8, гл. 4] следует, что существует ограниченное отображение $A : \overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi) \to \overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi)$, удовлетворяющее условию

$$B(u, v) = (A(u), v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\pi)}$$

для всех $u,\ v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi)$, и что задача (18.1), (18.2) имеет обобщенное решение $u_0(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi)$, т. е. $B(u_0, v)=0$ для всех $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi)$. Из неравенства (17) следует, что $u_0(x) \in C([0, \pi])$. Тогда и $f(x, u_0(x)) \in C([0, \pi])$. Из [7, гл. 4, § 2] следует, что $u_0(x) \in C^2([0, \pi])$, так как функция $u_0(x)$ является обобщенным решением краевой задачи $\mathscr{L}(u(x)) \equiv \equiv -(a_1(x)u'(x))'+a_0(x)u(x)=f(x, u_0(x))$, $u(0)=u(\pi)=0$. Отметим, что функция $u_0(x)$ является классическим решением задачи (18.1), (18.2).

Возьмем в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi)$ ортонормированную систему функций $\varphi_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{\sin nx}{n}$ $(n=1, 2, \ldots)$. Так как собственными функциями оператора $\mathscr{L}_1 \equiv (u')'$, $u(0)=u(\pi)=0$, являются функции $\sin nx$ $(n=1, 2, \ldots)$, то система функций $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ есть ортонормированный базис в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi)$ (см. [7], гл. 4, § 1, п. 3, § 2, п. 1). Значит, для любой функции $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi)$ справедливо разложение в ряд $u(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$, где коэффициенты Фурье $c_n=\int_0^\pi u'(x)\varphi_n'(x)dx$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Для коэффициентов Фурье функции $u_0(x)$, применяя интегрирование по частям, имеем $c_n=-\dfrac{1}{n}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int_0^\pi u_0''(x)\sin nxdx$ $(n=1, 2, \ldots)$. Отсюда следует, что

$$\|u_0(x)-\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x)\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\pi)} = \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i^2 \leqslant M_0\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{i^2} < \frac{M_0}{n}$$

$(n = 1, 2, \ldots;$ постоянная $M_0>0$ не зависит от $n)$. Отсюда имеем

$$\|u_0(x)-\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x)\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\pi)} = O\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right).$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 2, причем условие II′ не использовалось. Отсюда следует, что справедливо

Утверждение 2. *Пусть выполнено условие* I′. *Тогда в пространстве* $\overset{c}{W}{}_2^1(0, \pi)$ *для нахождения решения задачи (18.1), (18.2) применима теорема 2.*

Из условия II′ следует, что отображение A непрерывно по Липшицу для ограниченных аргументов (см. [8, гл. 4]). Следовательно, справедливо

Утверждение 3. Пусть выполнены условия I′, II′. Тогда в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi)$ для нахождения решения задачи (18.1), (18.2) применима теорема 3.

Замечание 8. В утверждении 2 (соответственно 3) для последовательности итерационного процесса (6) (соответственно (7)) имеем

$$u_{n+1}=u_n-\alpha_n P_{n+1}A(u_n)$$

$(n=1, 2, \ldots)$, где $u_n=\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^n\varphi_i(x)$, $P_{n+1}A(u_n)=\sum\limits_{i=1}^{n+1} B(u_n, \varphi_i)\varphi_i(x)$.

Замечание 9. Сходимость последовательности итерационного процесса утверждения 2 (соответственно 3) в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi)$ и неравенство (17) обеспечивают сходимость этой последовательности в $C^{1/2}([0, \pi])$.

Пусть выполнено условие

I″. Выполнено условие I′ без неравенства (19), вместо которого имеем два неравенства:

$$\frac{f(x, u)-f(x, v)}{u-v}\leqslant\lambda$$

для всех $x\in[0, \pi]$ и всех $u, v\in R$, $u\neq v$,

$$\frac{f(x, u)}{u}\leqslant\beta<\lambda$$

для всех $x\in[0, \pi]$ и всех $u\in R$, $u\neq 0$.

Тогда $B(u, u-v)-B(v, u-v)\geqslant 0$ для всех $u, v\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi)$ и $B(u, u)\geqslant c\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi)}$ для всех $u\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi)$, где $c=k_2(\lambda-\beta)/\lambda$.

Рассмотрим задачу

$$\mathscr{L}(u(x))=f(x, u(x))+h(x), \tag{20.1}$$

$$u(0)=u(\pi)=0, \tag{20.2}$$

где $h(x)\in C([0, \pi])$.

Определим отображение $A_1:\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi)\to\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi)$ следующим образом:

$$(A_1(u), v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi)}=B_1(u, v)$$

для всех $u, v\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi)$, где $B_1(u, v)=B(u, v)-\int\limits_0^\pi h(x)v(x)dx$. Отображение A_1 хеминепрерывное, ограниченное, монотонное и коэрцитивное. Значит, уравнение $A_1(u)=0$ $(u\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi))$ имеет решение [3, теорема 18.8], т. е. задача (20.1), (20.2) имеет обобщенное решение $u_0(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi)$. Из $B_1(u_0, v)=0$ для всех $v\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi)$ следует, что $u_0(x)$

является обобщенным решением задачи $\mathscr{L}(u(x))=f(x, u_0(x))+h(x)$, $u(0)=u(\pi)=0$. Отсюда, как и выше в п. 4.2, имеем $u_0(x)\in C^2([0, \pi])$ и $\|u_0(x)-\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x)\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi)}=O\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right)$, где c_i — коэффициенты Фурье функции $u_0(x)$. Теперь можем сформулировать

Утверждение 4. Пусть выполнено условие I''. Тогда в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi)$ для нахождения решения задачи (20.1), (20.2) применима теорема 7 и система (12) принимает вид

$$\alpha_n(x, \varphi_i)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi)}+B_1(x, \varphi_i)=0 \tag{21}$$

($i=1, \ldots, n$; $x\in H_n$, H_n — подпространство пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi)$, натянутое на $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$). И можно взять $\alpha_n=1/n^{\alpha}$ $(n=1, 2, \ldots)$ с любым фиксированным α: $0<\alpha<1/2$.

Замечание 10. Систему (21) утверждения 4 можно решать, применяя итерационный процесс теоремы 1 в конечномерном евклидовом пространстве.

Автор благодарен проф. В. А. Треногину за научное руководство работой.

Литература

1. Bruck Ronald E. Jr. Bull. Amer. Math., Soc., **79**, N 6, 1973, 1258—1261.
2. Bruck Ronald E. Jr. J. Math. Anal. and Appl., **48**, 1974, 114—126.
3. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М., «Наука», 1972.
4. Альбер Я. И. Сибир. матем. журнал, **16**, № 1, 1975, стр. 3—11.
5. Дубинский Ю. А. УМН, **23**, вып. 1, 1968, стр. 45—90.
6. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1973.
7. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., «Наука», 1976.
8. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. М., «Мир», 1974.

*Поступила в редакцию
6 декабря 1976 г.*

Московский институт стали и сплавов