С. П. Карташова, А. П. Осколков, О сходящихся разностных схемах для уравнений движения водных растворов полимеров, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1973, том 35, 21–35

О СХОДЯЩИХСЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ

С.П.Карташова, А.П.Осколков

В [I], [2] показано, что движение в области $\Omega\in E_n$, $n=2,3$, слабоконцентрированных водных растворов полимеров в первом приближении описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}-\nu\Delta\vec{v}+v_k\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_k}-\varkappa\left(\frac{\partial\Delta\vec{v}}{\partial t}+v_k\frac{\partial\Delta\vec{v}}{\partial x_k}\right)+\operatorname{grad}p=\vec{f}(x,t),\quad \operatorname{div}\vec{v}=0, \tag{I}$$

причем $\vec{v}(x,t)$ – скорость течения, $p(x,t)$ – давление в потоке, ν – кинематический, а $\varkappa$ – релаксационный коэффициенты вязкости. Система (I) решается в цилиндре $Q_T=\Omega\times[0,T]$, при следующих начальном и граничном условиях:

$$\vec{v}\big|_{t=0}=\vec{a}(x),\qquad \vec{v}\big|_{\partial Q_T}=0, \tag{2}$$

причем $\partial Q_T=\partial\Omega\times[0,T]$ – боковая поверхность цилиндра Q_T, а $\partial\Omega$ – граница области Ω, которая предполагается принадлежащей классу $C^{(2)}$.

В [3] – [5] показано, что задача (I),(2) имеет единственное классическое решение, и доказано, что, если $\vec{a}(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{J}(\Omega)$, $\vec{f}(x,t)\in L_{2,1}(Q_T)$ (по поводу обозначений см. [6]), то задача (I),(2) имеет по крайней мере одно слабое решение (решение Э.Хопфа), а если $\vec{a}(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^3(\Omega)\cap\overset{\circ}{J}(\Omega)$, $\vec{f}(x,t)\in L_2(Q_T)$, то задача (I),(2) имеет по крайней мере одно сильное решение (решение О.А.Ладыженской). При этом слабое решение задачи (I),(2) определяется как функция $\vec{v}(x,t)\in\overset{\circ}{W}{}_2^{2,0}(Q_T)\cap\overset{\circ}{J}(Q_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\iint\limits_{Q_t}\{-\vec{v}\vec{\Phi}_t+\nu\vec{v}_x\vec{\Phi}_x-v_k\vec{v}\vec{\Phi}_{x_k}-\varkappa\Delta\vec{v}\vec{\Phi}_t+\varkappa v_k\Delta\vec{v}\vec{\Phi}_{x_k}\}dQ+\int\limits_{\Omega}\vec{v}\vec{\Phi}\big|_{t=t}dx-$$
$$-\varkappa\int\limits_{\Omega}\vec{v}_x\vec{\Phi}_x\big|_{t=t}dx-\int\limits_{\Omega}(\vec{a}(x)+\varkappa\Delta\vec{a}(x))\vec{\Phi}(x,0)dx=\iint\limits_{Q_t}\vec{f}\vec{\Phi}dQ,\quad 0<t\le T, \tag{3}$$

при любой $\vec{\Phi}(x,t)\in\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(Q_T)\cap\overset{\circ}{J}(Q_T)$, а сильное решение задачи (I),(2) определяется как функция $\vec{v}(x,t)\in\overset{\circ}{J}(Q_T)$, $\vec{v}\big|_{\partial Q_T}=0$, у которой $\vec{v}_x$, $\vec{v}_t$, $\vec{v}_{xx}$, $\vec{v}_{tx}\in L_2(Q_T)$ и которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\iint\limits_{Q_T}\left(\vec{v}_t\vec{\Phi}+\nu\vec{v}_x\vec{\Phi}_x-v_k\vec{v}\vec{\Phi}_{x_k}+\varkappa\vec{v}_{xt}\vec{\Phi}_x+\varkappa v_k\Delta\vec{v}\vec{\Phi}_{x_k}\right)dQ=\iint\limits_{Q_T}\vec{f}\vec{\Phi}\,dQ \tag{4}$$

при любой $\vec{\Phi}(x,t)\in\overset{\circ}{W}{}_2^{2,0}(Q_T)\cap\overset{\circ}{J}(Q_T)$.

В [3] – [5] для доказательства существования и сильного и слабого решения $\vec{v}(x,t)$ задачи (I),(2) применяется метод введения исчезающей вязкости – система (I) аппроксимируется системой 4-го порядка с малым параметром $\varepsilon>0$:

$$\varepsilon\Delta^2\vec{v}^\varepsilon+\frac{\partial\vec{v}^\varepsilon}{\partial t}-\nu\Delta\vec{v}^\varepsilon+v_k^\varepsilon\frac{\partial\vec{v}^\varepsilon}{\partial x_k}-\varkappa\left(\frac{\partial\Delta\vec{v}^\varepsilon}{\partial t}+v_k^\varepsilon\frac{\partial\Delta\vec{v}^\varepsilon}{\partial x_k}\right)+\operatorname{grad}p^\varepsilon=\vec{f}(x,t),\ \operatorname{div}\vec{v}^\varepsilon=0, \tag{5}$$

которая решается в Q_T при следующих начально-граничных условиях:

$$\vec{v}^\varepsilon\Big|_{t=0}=\vec{a}(x),\quad \vec{v}^\varepsilon\Big|_{\partial Q_T}=0,\quad \Delta\vec{v}^\varepsilon\Big|_{\partial Q_T}=0; \tag{6}$$

показывается, что из совокупности $\{\vec{v}^{\varepsilon,n}(x,t)\}$ галеркинских приближений для решений задачи (5),(6), можно выбрать подпоследовательность $\{\vec{v}^{\varepsilon_k,n_k}(x,t)\}$, которая при $\varepsilon_k\to 0$, $n_k\to\infty$ сходится соответственно к сильному или слабому решению $\vec{v}(x,t)$ задачи (I),(2).

В настоящей статье мы построим для задачи (5),(6) аппроксимирующие ее устойчивые неявные и явные конечно-разностные схемы, аналогичные известным схемам О.А.Ладыженской для нестационарных уравнений Навье-Стокса ([6] , гл.УI), и покажем, что из совокупности кусочно-линейных восполнений решений этих конечно-разностных задач можно извлечь по крайней мере одну подпоследовательность, которая при $\varepsilon,\Delta t,\Delta x\to 0$ сходится к слабому решению $\vec{v}(x,t)$ задачи (I),(2).

Для упрощения дальнейших выкладок целесообразно при исследовании задачи (5),(6) ввести новую неизвестную функцию $\vec{u}^\varepsilon(x,t)\equiv$ $\equiv-\vec{v}^\varepsilon+\varkappa\Delta\vec{v}^\varepsilon$ и записать задачу (5),(6) в более компактной форме:

$$\frac{\partial\vec{u}^\varepsilon}{\partial t}-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\Delta\vec{u}^\varepsilon+\left(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)\Delta\vec{v}^\varepsilon+v_k^\varepsilon\frac{\partial\vec{u}^\varepsilon}{\partial x_k}-\operatorname{grad}p^\varepsilon=\vec{f}(x,t), \tag{7_I}$$

$$\varkappa\Delta\vec{v}^\varepsilon-\vec{v}^\varepsilon=\vec{u}^\varepsilon,\quad \operatorname{div}\vec{v}^\varepsilon=0, \tag{7_2}$$

$$\vec{v}^\varepsilon\Big|_{t=0}=\vec{a}(x),\quad \vec{u}^\varepsilon\Big|_{t=0}=\varkappa\Delta\vec{a}(x)-\vec{a}(x),\quad \vec{v}^\varepsilon\Big|_{\partial Q_T}=\vec{u}^\varepsilon\Big|_{\partial Q_T}=0. \tag{7_3}$$

Разобьем пространство (x,t) на элементарные ячейки плоскостями $x_i=k_ih$, $h>0$, $k_i=0,\pm1,\pm2,\dots$, и $t_\ell=\ell\Delta t$, $\Delta t=\frac{T}{N}$, $\ell=0,1,\dots,N$. Обозначим через $\Omega^\ell\equiv\Omega$ сечение цилиндра Q_T плоскостью $t_\ell=\ell\Delta t$, через $\partial\Omega^\ell\equiv\partial\Omega$ – границу области Ω^ℓ. Пусть, далее Ω_h^ℓ – совокупность точек решетки, лежащих в Ω^ℓ, $\partial\Omega_h^\ell$ –граница Ω_h^ℓ, $\bar\Omega_h^\ell=\Omega_h^\ell\cup\partial\Omega_h^\ell$, $\partial\Omega_{ih}^\ell$, $i=1,\dots,n$ – совокупность тех точек $\partial\Omega_h^\ell$, которые при сдвиге на h в направлении оси x_i переходят в какую-либо точку Ω_h^ℓ, $\partial\hat\Omega_{ih}^\ell$ – совокупность точек $\partial\Omega_h^\ell$, которые при сдвиге на $-h$ в направлении оси x_i переходят в некоторую точку Ω_h^ℓ. Положим

$$\overset{\pm i}{v}(x,t)=v(\vec{x}\pm h\vec{\ell}^i,t),\quad v_{x_i}(x,t)=\frac{1}{h}\left[\overset{+i}{v}(x,t)-v(x,t)\right],\quad v_{\bar{x}_i}(x,t)=\frac{1}{h}\left[v(x,t)-\overset{-i}{v}(x,t)\right],$$

где $\vec{\ell}^i$, $i=1,\dots,n$ – орт оси x_i. Аналогично определим сдвиги $\overset{\pm0}{v}(x,t)$ и разностные отношения v_t и $v_{\bar t}(x,t)$ по переменной t. Пусть v_h^ℓ – функция, рассматриваемая только на точках решетки на слое t^ℓ, $\ell=0,1,\dots,N$.

По аналогии с неявными конечно-разностными схемами для нестационарных уравнений Навье-Стокса ([6] , гл.VI) напишем для задачи (7_i) три аппроксимирующие ее неявные конечно-разностные схемы – две несимметричные и одну симметричную, опуская для краткости у функций $v_{ih}^{\varepsilon,\ell}$, $u_{ih}^{\varepsilon,\ell}$, $p_h^{\varepsilon,\ell}$ индексы ε и h : I) "правая" несимметричная схема

$$\left.\begin{aligned} & u^{\ell}_{it}-\frac{\varepsilon}{æ}u^{\ell+\alpha}_{ix_k\bar{x}_k}+\left(\nu-\frac{\varepsilon}{æ}\right)v^{\ell+\beta}_{ix_k\bar{x}_k}+\frac{1}{2}\left(\overset{+k_\ell}{v_k}u^{\ell+\gamma}_{ix_k}+v^{\ell}_k u^{\ell+\gamma}_{i\bar{x}_k}\right)=p^{\ell+1}_{\bar{x}_i}-f^{\ell+\delta}_i, \\ & \qquad i=1,\ldots,n, \quad (x,t)\in\Omega^{\ell+1}_h, \end{aligned}\right\} \qquad (8_I)$$

$$æ v^{\ell+1}_{ix_k\bar{x}_k}-v^{\ell+1}_i=u^{\ell+1}_i, \quad i=1,\ldots,n, \quad (x,t)\in\Omega^{\ell+1}_h, \qquad (8_2)$$

$$v^{\ell+1}_{kx_k}=0, \quad (x,t)\in\Omega^{\ell+1}_h\cup\sum_{i=1}^{n}\partial\Omega^{\ell+1}_{ih}, \qquad (8_3)$$

$$\sum_{\Omega^{\ell+1}_h\cup\sum_{i=1}^{n}\partial\Omega^{\ell+1}_{ih}} p^{\ell+1}=0, \quad \ell=0,1,\ldots,N-1; \qquad (8_4)$$

2) "левая" несимметричная схема

$$\left.\begin{aligned} & u^{\ell}_{it}-\frac{\varepsilon}{æ}u^{\ell+\alpha}_{ix_k\bar{x}_k}+\left(\nu-\frac{\varepsilon}{æ}\right)v^{\ell+\beta}_{ix_k\bar{x}_k}+\frac{1}{2}\left(\overset{-k_\ell}{v_k}u^{\ell+\gamma}_{i\bar{x}_k}+v^{\ell}_k u^{\ell+\gamma}_{ix_k}\right)=p^{\ell+1}_{x_i}-f^{\ell+\delta}_i, \\ & \qquad i=1,\ldots,n, \quad (x,t)\in\Omega^{\ell+1}_h, \end{aligned}\right\} \qquad (9_I)$$

$$æ v^{\ell+1}_{ix_k\bar{x}_k}-v^{\ell+1}_i=u^{\ell+1}_i, \quad i=1,\ldots,n, \quad (x,t)\in\Omega^{\ell+1}_h, \qquad (9_2)$$

$$v^{\ell+1}_{k\bar{x}_k}=0, \quad (x,t)\in\Omega^{\ell+1}_h\cup\sum_{i=1}^{n}\partial\hat{\Omega}^{\ell+1}_{ih}, \qquad (9_3)$$

$$\sum_{\Omega^{\ell+1}_h\cup\sum_{i=1}^{n}\partial\hat{\Omega}^{\ell+1}_{ih}} p^{\ell+1}=0, \quad \ell=0,1,\ldots,N-1; \qquad (9_4)$$

3) симметричная схема

$$\begin{aligned} & u^{\ell}_{it}-\frac{\varepsilon}{æ}u^{\ell+\alpha}_{ix_k\bar{x}_k}+\left(\nu-\frac{\varepsilon}{æ}\right)v^{\ell+\beta}_{ix_k\bar{x}_k}+\frac{1}{4}\left(\overset{-k_\ell}{v_k}+v^{\ell}_k\right)u^{\ell+\gamma}_{i\bar{x}_k}+\frac{1}{4}\left(v^{\ell}_k+\overset{+k_\ell}{v_k}\right)u^{\ell+\gamma}_{ix_k}= \\ & =\frac{1}{2}\left(p^{\ell+1}_{\bar{x}_i}+p^{\ell+1}_{x_i}\right)-f^{\ell+\delta}_i, \quad i=1,\ldots,n, \quad (x,t)\in\Omega^{\ell+1}_h, \end{aligned} \qquad (10_I)$$

$$æ v^{\ell+1}_{ix_k\bar{x}_k}-v^{\ell+1}_i=u^{\ell+1}_i, \quad i=1,\ldots,n, \quad (x,t)\in\Omega^{\ell+1}_h, \qquad (10_2)$$

$$v^{\ell+1}_{kx_k}+v^{\ell+1}_{k\bar{x}_k}=0, \quad (x,t)\in\Omega^{\ell+1}_h\cup\sum_{i=1}^{n}\partial\Omega^{\ell+1}_{ih}\cup\sum_{i=1}^{n}\partial\hat{\Omega}^{\ell+1}_{ih}, \qquad (10_3)$$

$$\sum_{\Omega_h^{l+1}\cup\sum_{i=1}^{n}\partial\Omega_{ih}^{l+1}\cup\sum_{i=1}^{n}\partial\hat{\Omega}_{ih}^{l+1}} p^{l+1}=0, \qquad l=0,1,\ldots,N-1. \tag{10$_4$}$$

Ко всем схемам добавляются одни и те же начальные и граничные условия, аппроксимирующие начальные и граничные условия (7_3):

$$\overset{\circ}{u}_i=\varkappa(\Delta a_i)_h-a_{ih}, \quad i=1,\ldots,n, \quad x\in\overset{\circ}{\Omega}_h, \tag{11$_1$}$$

$$v_i^{l+1}\Big|_{\partial\Omega_h^{l+1}}=0, \quad u_i^{l+1}\Big|_{\partial\Omega_h^{l+1}}=0, \quad i=1,\ldots,n, \quad l=0,1,\ldots,N-1; \tag{11$_2$}$$

кроме того, сеточные функции v_i^{l+1}, $i=1,\ldots,n, l=0,1,\ldots,N-1$, считаются продолженными нулем вне $\bar{\Omega}_h^{l+1}$. В уравнениях (8_I),(9_I),(10_I) параметры α, β, γ принимают значения 0 или I, а $\delta=1$ при $\alpha=\beta=\gamma=1$ (случай чисто неявной схемы) и $\delta=0$ во всех остальных случаях.

Как и в неявных схемах О.А.Ладыженской для уравнений Навье-Стокса ([6] , гл.УI), уравнения (8_4),(9_4),(10_4), нормирующие давление p^{l+1}, добавляются из-за того, что уравнения (8_3),(9_3), (10_3) соответственно связаны одной линейной зависимостью. Легко видеть, что во всех написанных выше схемах число уравнений равно числу неизвестных, и каждая из этих схем на $l+1$ -ом слое, $l=0,1,\ldots,N-1$, представляет собой линейную алгебраическую систему для нахождения неизвестных v_i^{l+1}, u_i^{l+1}, p^{l+1}, причем значения v_i^{l+1} и u_i^{l+1} во всех схемах ищутся во внутренних точках решетки Ω_h^{l+1}, а значения p^{l+1} ищутся в точках $\Omega_h^{l+1}\cup\sum_{i=1}^{n}\partial\Omega_{ih}^{l+1}$ в "правой" несимметричной схеме, в точках $\Omega_h^{l+1}\cup\sum_{i=1}^{n}\partial\hat{\Omega}_{ih}^{l+1}$ в "левой" несимметричной схеме и в точках $\Omega_h^{l+1}\cup\sum_{i=1}^{n}\partial\Omega_{ih}^{l+1}\cup\sum_{i=1}^{n}\partial\hat{\Omega}_{ih}^{l+1}$ в симметричной схеме.

Все три написанные выше конечно-разностные схемы исследуются аналогично, поэтому мы изучим подробно лишь схему (8_i). Прежде всего мы покажем, что система (8_i) однозначно разрешима на каждом l-ом слое, $l=0,1,\ldots,N-1$. Достаточно показать, что соответствующая ей однородная система имеет только тривиальное решение. С этой целью, а также имея в виду получение для решений системы (8_i),(11_i) основной априорной оценки, умножим i-ое уравнение в (8_I) на $2\Delta t h^n u_i^{l+1}$ и просуммируем по $i=1,\ldots,n$ и всем точкам решетки Ω_h^{l+1}, а i-ое уравнение в (8_2), предварительно "продифференцировав" по t, умножим на $2\Delta t h^n u_{it}^{l}$ и также просуммируем по i и Ω_h^{l+1}. Используя известные в теории нестационарных краевых задач формулы преобразования разностных отношений по переменной t, применяя формулы суммирования по частям по пространственным переменным и формулы разностного дифференцирования произведения сеточных функций ([6] , гл.УI, § 9), используя далее уравнения (8_2),(8_3) и граничные условия (II_2), а также равенства $u^{\ell+1}_{kx_k}=0$, $x\in\Omega^{\ell+1}_h$, получим следующее энергетическое равенство:

$$
\begin{aligned}
&\|\vec{u}^{\ell+1}\|^2-\|\vec{u}^{\ell}\|^2+\frac{(\Delta t)^2}{2^{1-\beta}}\|\vec{u}^{\ell}_t\|^2+\delta_{0\beta}\frac{(\Delta t)^2}{2}\left[\varkappa^2\|\vec{v}^{\ell}_{x\bar{x}t}\|^2+2\varkappa\|\vec{v}^{\ell}_{xt}\|^2+\|\vec{v}^{\ell}_t\|^2\right]+\\
&+2\Delta t\,\frac{\varepsilon}{\varkappa}\|\vec{u}^{\ell+\alpha}_x\|^2+2\Delta t\left(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)\left[\varkappa\|\vec{v}^{\ell+\beta}_{x\bar{x}}\|^2+\|\vec{v}^{\ell+\beta}_x\|^2\right]=-2\Delta t(\vec{f}^{\ell+\delta},\vec{u}^{\ell+1})-\\
&-\delta_{0\alpha}\cdot 2(\Delta t)^2\frac{\varepsilon}{\varkappa}(\vec{u}^{\ell}_x,\vec{u}^{\ell}_{xt})-\delta_{0\beta}\cdot 2(\Delta t)^2\left(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)\left[\varkappa(\vec{v}^{\ell}_{x\bar{x}},\vec{v}^{\ell}_{x\bar{x}t})+\right.\\
&\left.+(\vec{v}^{\ell}_x,\vec{v}^{\ell}_{xt})\right]-\delta_{0\gamma}(\Delta t)^2\left(\overset{+k}{v}{}^{\ell}_k u^{\ell}_{ix_k}+v^{\ell}_k u^{\ell}_{i\bar{x}_k},u^{\ell}_{it}\right),\qquad \ell=0,1,\ldots,N-1.
\end{aligned}
\tag{I2}
$$

Из вывода равенства (I2) видно, что если в (8_I) $v^{\ell}_i=0$, $u^{\ell}_i=0$, $f^{\ell+\delta}_i=0$, то мы вместо равенства (I2) получим такое равенство:

$$\|\vec{u}^{\ell+1}\|^2+\frac{\varepsilon\Delta t}{\varkappa}\|u^{\ell+1}_x\|^2+\varkappa(\nu\varkappa-\varepsilon)\Delta t\|\vec{v}^{\ell+\beta}_{x\bar{x}}\|^2+\left(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)\Delta t\|\vec{v}^{\ell+\beta}_x\|^2=0. \tag{I3}$$

Из последнего равенства видно, что $\vec{v}^{\ell+1}=0$, $\vec{u}^{\ell+1}=0$, $x\in\Omega^{\ell+1}_h$. После этого из уравнения $p^{\ell+1}_{\bar{x}_i}=0$, $i=1,\ldots,n$; используя условие нормировки (8_4), получим $p^{\ell+1}=0$, $x\in\Omega^{\ell+1}_h\cup\sum\limits_{i=1}^{n}\partial\Omega^{\ell+1}_{ih}$.

При выводе априорных оценок для решений задачи (8_i),(II_i) предположим сначала, что $\gamma=1$. Тогда, оценивая члены в правой части (I2) с помощью неравенств (для определенности $n=3$):

$$\frac{2\varepsilon}{\varkappa}(\Delta t)^2\left|(\vec{u}^{\ell}_x,\vec{u}^{\ell}_{xt})\right|\le\frac{12\varepsilon}{\varkappa}\frac{(\Delta t)}{h^2}\|\vec{u}^{\ell}_t\|^2+\frac{\varepsilon}{\varkappa}\Delta t\|\vec{u}^{\ell}_x\|^2, \tag{I4}$$

$$2\varkappa\left(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)(\Delta t)^2\left|(\vec{v}^{\ell}_{x\bar{x}},\vec{v}^{\ell}_{x\bar{x}t})\right|\le\varkappa\left(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)\Delta t\|\vec{v}^{\ell}_{x\bar{x}}\|^2+\varkappa\left(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)(\Delta t)^3\|\vec{v}^{\ell}_{x\bar{x}t}\|^2, \tag{I5}$$

$$2\left(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)(\Delta t)^2\left|(\vec{v}^{\ell}_x,\vec{v}^{\ell}_{xt})\right|\le\left(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)\Delta t\|\vec{v}^{\ell}_x\|^2+\left(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)(\Delta t)^3\|\vec{v}^{\ell}_{xt}\|^2, \tag{I6}$$

из равенства (I2) при выполнении условий

$$2^{\beta-1}-\delta_{0\alpha}\frac{12\varepsilon}{\varkappa}\frac{\Delta t}{h^2}\equiv\omega_1(\alpha,\beta)>0, \tag{I7}$$

$$\frac{\varkappa}{2}-\left(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)\Delta t\equiv\omega_2>0,\ \text{если}\quad \beta=0 \tag{I8}$$

стандартным образом (см. [6] , гл.УI, § 9) получаем для решений задачи (8_i),(II_i) основное энергетическое неравенство: при любом $m=0,1,\ldots,N-1$

$$\|\vec{v}^{m+1}\|^2+2\varkappa\|\vec{v}_x^{m+1}\|^2+\varkappa^2\|\vec{v}_{x\bar{x}}^{m+1}\|^2=\|\vec{u}^{m+1}\|^2, \tag{19}$$

$$\|\vec{u}^{m+1}\|^2+\omega_1(\Delta t)^2\sum_{\ell=0}^{m}\|\vec{u}_t^{\ell}\|^2+\delta_{o\beta}\frac{(\Delta t)^2}{2}\sum_{\ell=0}^{m}\|\vec{v}_t^{\ell}\|^2+\delta_{o\beta}\varkappa\omega_2(\Delta t)^2\sum_{\ell=0}^{m}\|\vec{v}_{x\bar{x}t}^{\ell}\|^2+$$

$$+\delta_{o\beta}\left(\frac{\varkappa}{2}+\omega_2\right)(\Delta t)^2\sum_{\ell=0}^{m}\|\vec{v}_{xt}^{\ell}\|^2+2^{\alpha}\frac{\varepsilon\Delta t}{\varkappa}\sum_{\ell=0}^{m}\|\vec{u}_x^{\ell+\alpha}\|^2+2^{\beta}\left(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)\varkappa\Delta t\sum_{\ell=0}^{m}\|\vec{v}_{x\bar{x}}^{\ell+\beta}\|^2+ \tag{20}$$

$$+2^{\beta}\left(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)\Delta t\sum_{\ell=0}^{m}\|\vec{v}_x^{\ell+\beta}\|^2\le 2\left(\|\vec{a}\|^2+2\varkappa\|\vec{a}_x\|^2+\varkappa^2\|\vec{a}_{x\bar{x}}\|^2\right)+5\left(\Delta t\sum_{\ell=0}^{N}\|\vec{f}^{\ell+\delta}\|\right)\equiv M$$

Условия (I7),(I8) показывают, что схема (8_i),(II_i), равно как и схемы (9_i),(II_i);($I0_i$), (II_i), при $\alpha=\gamma=I$ и $\beta=0,I$ являются безусловно устойчивыми при всех достаточно малых $\Delta t, h, \varepsilon$, а при $\alpha=0$, $\gamma=I$, $\beta=0,I$ все эти схемы устойчивы лишь в том случае, если $\frac{\varepsilon\Delta t}{h^2}\sim\frac{\varkappa}{12}$.

Пусть, далее, $\vec{\varphi}(x)$ – произвольный гладкий финитный соленоидальный вектор, $\vec{\varphi}_h$ – разностно-соленоидальная аппроксимация вектора $\vec{\varphi}$ ([6] , гл.УI), причем h настолько мало, что $\vec{\varphi}_h|_{\partial\Omega^{\ell+1}}=0$. Умножим i-ое уравнение системы (8_I) на $h^n\varphi_{ih_{\ell+1}}$ и полученные равенства просуммируем по $i=1,\dots,n$ и всем точкам $\Omega_h^{\ell+1}$. Тогда, применяя формулу суммирования по частям, получим тождество:

$$(\vec{u}_t^{\ell},\vec{\varphi}_h)=-\frac{\varepsilon}{\varkappa}(\vec{u}_x^{\ell+\alpha},\vec{\varphi}_{hx})+\left(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)(\vec{v}_x^{\ell+\beta},\vec{\varphi}_{hx})-\frac{1}{2}(v_k^{+k\ell}\vec{u}_{x_k}^{\ell+1}+$$

$$+v_k^{\ell}\vec{u}_{\bar{x}_k}^{\ell+1},\vec{\varphi}_h)-(\vec{f}^{\ell+\delta},\varphi_h),\qquad \ell=0,1,\dots,N-1. \tag{21}$$

Умножим тождество (2I) на Δt и просуммируем по ℓ от ℓ_1 до ℓ_2, $0\le\ell_1<\ell_2\le N-1$. После этого, применяя неравенство Коши и энергетическое неравенство (I9),(20), получим:

$$|(\vec{u}^{\ell_2+1}-\vec{u}^{\ell_1+1},\varphi_h)|\le C(\vec{\varphi},M)\left[\sqrt{(\ell_2-\ell_1)\Delta t}+\int_{\ell_1\Delta t}^{\ell_2\Delta t}\|\vec{f}\|d\tau\right],\ \varepsilon\ge 0. \tag{22}$$

Так как $\vec{f}(x,t)\in L_{2,1}(Q_T)$, то неравенство (22) гарантирует равностепенную по $h,\varepsilon\ge 0$ малость разностей $|(\vec{u}^{\ell_2+1}-\vec{u}^{\ell_1+1},\varphi_h)|_\ell$ при малости временного интервала $(\ell_2-\ell_1)\Delta t$. Наконец, так как $\vec{v}^{\ell}$ есть "решение" краевой задачи (8_2),(II_2), которое можно представить в виде $\vec{v}^{\ell}(x)=(G(x,\xi),\vec{u}^{\ell}(\xi))$, где $G(x,\xi)$ – разностная функция Грина задачи (8_2),(II_2) (см., например, [7]), то имеем: $(\vec{v}^{\ell+1},\varphi_h)=(\vec{u}^{\ell+1},G\vec{\varphi}_h)$, откуда следует, что и

$$|(\vec{v}^{\ell_2+1}-\vec{v}^{\ell_1+1},\vec{\varphi}_\ell)|\le C_{G\varphi}\left[\sqrt{(\ell_2-\ell_1)\Delta t}+\int_{\ell_1\Delta t}^{\ell_2\Delta t}\|\vec{f}\|d\tau\right],\ h,\varepsilon\ge 0. \tag{23}$$

Неравенства (19),(20),(23), правые части которых не зависят от $\varepsilon \geq 0$, позволяют доказать (ср. [6], гл.VI), что из совокупности $\{\tilde{\vec{v}}_h^\varepsilon(x,t)\}$ кусочно-постоянных восполнений построенных нами сеточных функций $\vec{v}^\ell$ можно извлечь по крайней мере одну подпоследовательность, которая при $\Delta t, h, \varepsilon \to 0$ так, что выполнены условия (17),(18), сходится к слабому решению задачи (1),(2). Тем самым доказана

<u>Теорема I.</u> Пусть в задаче (1),(2) $\vec{a}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{J}(\Omega), \vec{f}(x,t) \in L_{2,1}(Q_T)$. Тогда каждая из конечно-разностных задач (8_i),(11_i);(9_i),(11_i);(10_i),(11_i) при α, $\beta = 0,1$ и $\gamma = 1$ однозначно разрешима при любых $\Delta t, h, \varepsilon > 0$ и если $\Delta t, h, \varepsilon \to 0$ так, что выполнены условия (17),(18), то из совокупности $\{\tilde{\vec{v}}_h^\varepsilon(x,t)\}$ полилинейных восполнений решений $\vec{v}^\ell$ каждой из указанных конечно-разностных задач можно извлечь подпоследовательность, которая сходится к слабому решению $\vec{v}(x,t)$ задачи (1),(2).

Если $\gamma = 0$, то энергетические неравенства для решений конечно-разностных задач (8_i),(11_i);(9_i),(11_i); (10_i)-(11_i), а потому и утверждения теоремы I имеют место при следующих ограничениях на $\Delta t, h, \varepsilon$:

$$2^{\beta-1} - \frac{12\varepsilon\Delta t}{\varkappa h^2}\delta_{0\alpha} - \left(\frac{1}{4} + 12A\frac{(\Delta t)^2}{h^5}\delta_{1\alpha}\right) \equiv \omega_3(\alpha,\beta) > 0, \tag{24}$$

$$(2-\delta_{0\alpha})\frac{\varepsilon}{\varkappa} - 2^{\alpha-1}A\frac{\Delta t}{h^3} \equiv \omega_4(\alpha) > 0, \tag{25}$$

$$\varkappa - (\nu - \frac{\varepsilon}{\varkappa})\delta_{0\beta}\Delta t - \delta_{1\beta}A\frac{(\Delta t)^2}{h^3} \equiv \omega_5(\beta) > 0, \tag{26}$$

$$(2-\delta_{0\beta})(\nu - \frac{\varepsilon}{\varkappa}) - 2^{\beta-1}A\frac{\Delta t}{h^3} \equiv \omega_6(\beta) > 0, \tag{27}$$

$$A = 24\left(\frac{4}{3}\right)^{3/4}\left[\left(\|\vec{a}\|^2 + 2\varkappa\|\vec{a}_x\|^2 + \varkappa^2\|\vec{a}_{x\bar{x}}\|^2\right)^{1/2} + 2\Delta t\sum_{k=0}^{N-1}\|\vec{f}^{k+\delta}\|\right]^2. \tag{28}$$

Эти условия возникают при оценке всех членов правой части равенства (12) (ср. [6], гл.VI, конец § 9). Они позволяют получить для решений любой из конечно-разностных задач (8_i),(11_i); (9_i),(11_i),(10_i)-(11_i) следующее энергетическое неравенство: при любом $m = 0,1,\dots,N-1$

$$\|\vec{u}^{m+1}\|^2 + \omega_3(\Delta t)^2\sum_{\ell=0}^{m}\|\vec{u}_t^\ell\|^2 + \delta_{0\beta}\frac{(\Delta t)}{2}\sum_{\ell=0}^{m}\|\vec{v}_t^\ell\|^2 + \delta_{0\beta}\varkappa\omega_2(\Delta t)^2\sum_{\ell=0}^{m}\|\vec{v}_{x\bar{x}t}^\ell\|^2 +$$
$$+\omega_5(\Delta t)^2\sum_{\ell=0}^{m}\|\vec{v}_{xt}^\ell\|^2 + \omega_4\Delta t\sum_{\ell=0}^{m}\|\vec{u}_x^{\ell+\alpha}\|^2 + 2^\beta(\nu - \frac{\varepsilon}{\varkappa})\varkappa\Delta t\sum_{\ell=0}^{m}\|\vec{v}_{x\bar{x}}^{\ell+\beta}\|^2 + \tag{29}$$

$$+\omega_6 \Delta t \sum_{\ell=0}^{m} \|\vec{v}_x^{\ell+\beta}\|^2 \leq M.$$

Условия (24)-(28) являются более ограничительными, чем условия (17),(18), ибо в силу этих условий рассматриваемые нами конечно-разностные схемы будут устойчивыми при $\gamma=0$ лишь в том случае, если при $\Delta t, h, \varepsilon \to 0$ выполняется соотношение $\frac{\Delta t}{h^3} \sim \frac{\varepsilon}{æ A}$.*)

Для задачи (1),(2) можно написать также сходящиеся конечно-разностные схемы, аналогичные явным схемам для уравнений Навье-Стокса [6] , [8] , однако в данном случае эти схемы не будут "чисто явными" - в них на каждом шаге по времени приходится решать задачу Дирихле для разностного уравнения (8_2) с нулевым граничным условием. Приведем одну из таких схем, для построения которой аппроксимируем систему (1) следующей системой с двумя малыми параметрами $\varepsilon, \theta > 0$ (ср. [6] , гл.VI):

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{æ}\Delta\vec{u} + (\nu - \frac{\varepsilon}{æ})\Delta\vec{v} + v_k \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\vec{u}\, div\, \vec{v} + \frac{1}{\theta}\, grad\, div\, \vec{v} = \vec{f}, \quad æ\Delta\vec{v} - \vec{v} = \vec{u}. \tag{30}$$

Систему (30) будем по-прежнему решать в Q_T при начально-граничных условиях (6).

При построении "явных" конечно-разностных схем для системы (30) можно воспользоваться любой из трех указанных выше (см. (8_I),(9_I),(10_I)) аппроксимаций нелинейных членов. Выбирая для определенности "правую" несимметричную аппроксимацию, получим такую конечно-разностную схему:

$$u_i^{\ell+1} = u_i^\ell + \Delta t \Big\{ -f_i^\ell + \frac{\varepsilon}{æ} u^\ell_{i x_k \bar{x}_k} - (\nu - \frac{\varepsilon}{æ}) v^\ell_{i x_k \bar{x}_k} + \frac{1}{2}(\overset{+k}{v}{}^\ell_k u^\ell_{i x_k} + v^\ell_k u^\ell_{i \bar{x}_k} + v^\ell_{k x_k} u^\ell_i) - \tag{31_1}$$

$$- \frac{1}{\theta}(v^\ell_{k x_k \bar{x}_i}) \Big\}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad (x,t) \in \Omega_h^{\ell+1}, \quad \ell = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$\vec{v}^{\,0} = \vec{a}_h, \quad \vec{u}^{\,0} = æ\vec{a}_{h x_k \bar{x}_k} - \vec{a}_h, \tag{31_2}$$

$$æ\vec{v}^{\,\ell+1}_{x_k \bar{x}_k} - \vec{v}^{\,\ell+1} = \vec{u}^{\,\ell+1}, \quad (x,t) \in \Omega_h^{\ell+1}, \quad \vec{v}^{\,\ell+1}\Big|_{\partial\Omega_h^{\ell+1}} = 0, \quad \ell = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{31_3}$$

Согласно этой схеме мы на $\ell+1$ -ом слое по времени находим $\vec{u}^{\,\ell+1}$, используя значения $\vec{u}^{\,\ell}$ и $\vec{v}^{\,\ell}$ на предыдущем слое, а затем, решая краевую задачу (31_3), находим на $\ell+1$ -ом слое значения $\vec{v}^{\,\ell+1}$, $\ell = 0, 1, \ldots, N-1$.

Для исследования сходимости конечно-разностной схемы (31_i)

---

*) При $n=2$ в этом условии и условиях (25) и (27) h^3 надо заменить на h^2 (см. [6] , гл.VI).

умножим уравнения ($3I_I$) на $2\Delta t h^n u_i^{\ell+1}$ и просуммируем полученные равенства по $i=1,\dots,n$ и точкам решетки $\Omega_h^{\ell+1}$. Производя те же преобразования, что и при получении равенства (I2), получим следующее энергетическое равенство:

$$\|\vec{u}^{\ell+1}\|^2-\|\vec{u}^{\ell}\|^2+\frac{(\Delta t)^2}{2}\|\vec{u}_t^{\ell}\|^2+\frac{(\Delta t)^2}{2}\varkappa^2\|\vec{v}_{x\bar{x}t}^{\ell}\|^2+\varkappa(\Delta t)^2\|\vec{v}_{xt}^{\ell}\|^2+\frac{(\Delta t)^2}{2}\|\vec{v}_t^{\ell}\|^2+$$

$$+2\Delta t\frac{\varepsilon}{\varkappa}\|\vec{u}_x^{\ell}\|^2+2\Delta t\varkappa(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa})\|\vec{v}_{x\bar{x}}^{\ell}\|^2+2\Delta t(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa})\|\vec{v}_x^{\ell}\|^2+\frac{2\Delta t}{\theta}\|v_{kx_k}^{\ell}\|^2+2\varkappa\frac{\Delta t}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\|(v_{kx_k}^{\ell})_{\bar{x}_i}\|^2= \tag{32}$$

$$=-2\Delta t(\vec{f}^{\ell},\vec{u}^{\ell+1})-\frac{2\varepsilon}{\varkappa}(\Delta t)^2(\vec{u}_x^{\ell},\vec{u}_{xt}^{\ell})-2\varkappa(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa})(\Delta t)^2(\vec{v}_{x\bar{x}}^{\ell},\vec{v}_{x\bar{x}t}^{\ell})-2(\Delta t)^2(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa})(\vec{v}_x^{\ell},\vec{v}_{xt}^{\ell})-$$

$$-\frac{2(\Delta t)^2}{\theta}(v_{kx_k}^{\ell},v_{ix_it}^{\ell})-\frac{2\varkappa}{\theta}(\Delta t)^2(v_{kx_k\bar{x}_i}^{\ell},v_{ix_k\bar{x}_kt}^{\ell})+j^{\ell},\qquad \ell=0,1,\dots,N-1,$$

$$j^{\ell}=-(\Delta t)^2(\overset{+k_\ell}{v_k}\,u_{ix_k}^{\ell}+v_k^{\ell}u_{i\bar{x}_k}^{\ell}+v_{kx_k}^{\ell}u_i^{\ell},\ u_{it}^{\ell}). \tag{33}$$

Из равенства (32),(33), полагая для определенности $n=3$*), используя оценки (I4)-(I6) и неравенства

$$2\frac{(\Delta t)^2}{\theta}|(v_{kx}^{\ell},v_{ix_it}^{\ell})|\le\frac{\Delta t}{\theta}\|v_{kx_k}^{\ell}\|^2+\frac{(\Delta t)^3}{\theta}\|\vec{v}_{xt}^{\ell}\|^2, \tag{34_I}$$

$$\frac{2\varkappa(\Delta t)^2}{\theta}|(v_{kx_k\bar{x}_i}^{\ell},v_{ix_k\bar{x}_kt}^{\ell})|\le\frac{\varkappa\Delta t}{\theta}\sum_i\|v_{kx_k\bar{x}_i}^{\ell}\|^2+\frac{\varkappa(\Delta t)^3}{\theta}\|\vec{v}_{x\bar{x}t}^{\ell}\|^2, \tag{34_2}$$

$$|j^{\ell}|\le\frac{(\Delta t)^2}{4}\|\vec{u}_t^{\ell}\|^2+24\sqrt{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{3/2}\left\{\frac{(\Delta t)^2}{h^3}\|\vec{v}^{\ell}\|^2\cdot\|\vec{v}_x^{\ell}\|^2+\frac{(\Delta t)^2}{h^3}\|\vec{u}^{\ell}\|^2\cdot\|\vec{u}_x^{\ell}\|^2\right\}, \tag{35}$$

получим при выполнении условий

$$\frac{1}{4}-\frac{12\varepsilon\Delta t}{\varkappa h^2}\equiv\omega_7>0,\qquad \frac{\varkappa}{2}-(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa})\Delta t-\frac{\Delta t}{\theta}\equiv\omega_8>0, \tag{36}$$

$$\frac{\varepsilon}{\varkappa}-A\frac{\Delta t}{h^3}\equiv\omega_9>0,\qquad \nu+\omega_9-\frac{2\varepsilon}{\varkappa}\equiv\omega_{10}>0, \tag{37}$$

следующее энергетическое неравенство: при любом $m=0,1,\dots,N-1$

$$\|\vec{u}^{m+1}\|^2+\omega_7(\Delta t)^2\sum_{\ell=0}^{m}\|\vec{u}_t^{\ell}\|^2+\varkappa\omega_8(\Delta t)^2\sum_{\ell=0}^{m}\|\vec{v}_{x\bar{x}t}^{\ell}\|^2+(\frac{\varkappa}{2}+\omega_8)(\Delta t)^2\sum_{\ell=0}^{m}\|\vec{v}_{xt}^{\ell}\|^2+$$

$$+\omega_9\Delta t\sum_{\ell=0}^{m}\|\vec{u}_x^{\ell}\|^2+\varkappa(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa})\Delta t\sum_{\ell=0}^{m}\|\vec{v}_{x\bar{x}}^{\ell}\|^2+\omega_{10}\Delta t\sum_{\ell=0}^{m}\|\vec{v}_x^{\ell}\|^2+\frac{\Delta t}{\theta}\sum_{\ell=0}^{m}\|\vec{v}_{kx_k}^{\ell}\|+ \tag{38}$$

$$+\frac{\varkappa\Delta t}{\theta}\sum_{\ell=0}^{m}\sum_i\|v_{kx_k\bar{x}_i}^{\ell}\|^2\le M.$$

---

*) При $n=2$ надо в условии (37) заменить h^3 на h^2 и изменить в условиях (36)-(37) числовые постоянные [6].

Далее, рассуждая, как и при получении (21)-(22), и используя неравенство (38), получим при любом гладком соленоидальном $\vec{\varphi}(x)$ такое неравенство: если $0 \leq l_1 < l_2 \leq N$, то

$$\left|(\vec{u}^{l_2},\vec{\varphi}_h)-(\vec{u}^{l_1},\vec{\varphi}_h)\right| \leq C(M,\vec{\varphi})\left[\sqrt{(l_2-l_1)\frac{\Delta t}{\theta}} + \int\limits_{l_1\Delta t}^{l_2\Delta t} \|\vec{f}\| d\tau\right], \qquad (39)$$

а из этого неравенства, предполагая выполненным условие

$$\frac{\Delta t}{\theta} = o(\Delta t), \quad \Delta t, \theta \to 0, \qquad (40)$$

пользуясь тем, что $\vec{f}(x,t) \in L_{2,1}(Q_T)$, получим при малости временного интервала $(l_2-l_1)\Delta t$ равномерно по $h, \varepsilon, \theta \geq 0$ такое неравенство:

$$\left|(\vec{v}^{l_2},\vec{\varphi}_h)-(\vec{v}^{l_1},\vec{\varphi}_h)\right| = o(\Delta t), \quad h, \varepsilon, \theta \geq 0. \qquad (41)$$

Неравенства (38),(41) позволяют доказать, что справедлива

Теорема 2. Пусть в задаче (1),(2) $\vec{a}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap \overset{\circ}{J}(\Omega)$, $\vec{f}(x,t) \in L_{2,1}(Q_T)$. Тогда, если $\Delta t, h, \varepsilon, \theta \to 0$ так, что выполнены условия (44)-(47),(50), то из совокупности $\{\tilde{\vec{v}}_h^{\varepsilon,\theta}(x,t)\}$ полилинейных восполнений решений $\vec{v}^l$ конечно-разностной задачи (31_i) можно извлечь подпоследовательность, которая сходится к слабому решению $\vec{v}(x,t)$ задачи (1),(2).

При построении "явных" схем для задачи (1),(2) можно исходить и из следующей аппроксимации системы (1) системой уравнений 4-го порядка с двумя малыми параметрами $\varepsilon, \theta > 0$ (см. [8]):

$$\begin{gathered} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{\varkappa}\Delta\vec{u} + \left(\nu - \frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)\Delta\vec{v} + v_k\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\vec{u}\,\mathrm{div}\,\vec{v} - \mathrm{grad}\,p = \vec{f}, \\ \theta\left(\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p\right) + \mathrm{div}\,\vec{u} = 0, \quad \varkappa\Delta\vec{v} - \vec{v} = \vec{u}, \end{gathered} \qquad (42)$$

которая решается в Q_T при начально-граничных условиях (6) и начально-граничных условиях

$$p\big|_{t=0} = \mathcal{P}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \quad p\big|_{\partial Q_T} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial p}{\partial n}\Big|_{\partial Q_T} = 0. \qquad (43)$$

Условия сходимости и устойчивости для "явных" конечно-разностных задач, построенных по (42),(6),(43), несколько лучше условий (36),(37),(40), но при доказательстве сходимости решения $\vec{v}(x,t)$ исходной задачи (1),(2) нужно предполагать достаточно гладкими (ср. [8]).

Для задачи (1),(2), как и для уравнений Навье-Стокса [6], можно написать, кроме того, конечно-разностные схемы переменных направлений, сходящиеся, в отличие от явных схем, при любом соотношении между шагами Δt и Δx и состоящие из более простых, чем в неявных схемах, алгебраических систем. Для построения таких схем воспользуемся следующей регуляризацией системы (1):

$$\frac{\partial \vec{u}^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{\varkappa}\Delta\vec{u}^\varepsilon + \left(\nu - \frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)\Delta\vec{v}^\varepsilon + v_k^\varepsilon\frac{\partial \vec{u}^\varepsilon}{\partial x_k} + \frac{1}{2}(\mathrm{div}\,\vec{v}^\varepsilon)\vec{u}^\varepsilon - \mathrm{grad}\,p^\varepsilon = \vec{f}(x,t), \qquad (44_1)$$

$$\theta\frac{\partial p^\varepsilon}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{u}^\varepsilon=0, \tag{44$_2$}$$

$$\varkappa\Delta\vec{v}^\varepsilon-\vec{v}^\varepsilon=\vec{u}^\varepsilon, \qquad \varepsilon,\theta>0 \tag{44$_3$}$$

и составим для нее аддитивные схемы относительно $\vec{u}^\varepsilon$ и p^ε и схему с полной аппроксимацией для $\vec{v}^\varepsilon$, т.е. рассмотрим конечно-разностные схемы:

$$\frac{1}{\Delta t}\Big(u_i^{m-\frac{k-1}{n}}-u_i^{m-\frac{k}{n}}\Big)-\frac{\varepsilon}{\varkappa}u_{ix_k\bar{x}_k}^{m-\frac{k-1}{n}}+\frac{1}{2^{\alpha+\beta}}\Big[\delta_{1\alpha}\Big(\overset{+}{v}_k^{k_{m-1}}u_{ix_k}^{m-\frac{k-1}{n}}+v_k^{m-1}u_{i\bar{x}_k}^{m-\frac{k-1}{n}}+v_{kx_k}^{m-1}u_i^{m-\frac{k-1}{n}}\Big)+$$

$$+\delta_{1\beta}\Big(v_k^{m-1}u_{ix_k}^{m-\frac{k-1}{n}}+\bar{v}_k^{k_{m-1}}u_{i\bar{x}_k}^{m-\frac{k-1}{n}}+v_{k\bar{x}_k}^{m-1}u_i^{m-\frac{k-1}{n}}\Big)\Big]+\delta_{k1}\Big(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\Big)\sum_{j=1}^{n}v_{ix_j\bar{x}_j}^{m-\gamma}-$$

$$-\frac{\delta_{ik}}{\alpha+\beta}\Big(\delta_{1\alpha}p_{\bar{x}_k}^{m-\frac{k-1}{n}}+\delta_{1\beta}p_{x_k}^{m-\frac{k-1}{n}}\Big)=\frac{1}{3}f_i^{m-\frac{k-1}{n}}, \qquad (x,t)\in\Omega_h^{m-\frac{k-1}{n}}, \tag{45$_1$}$$

$$\frac{\theta}{\Delta t}\Big(p^{m-\frac{k-1}{n}}-p^{m-\frac{k}{n}}\Big)+\frac{1}{\alpha+\beta}\Big(\delta_{1\alpha}u_{kx_k}^{m-\frac{k-1}{n}}+\delta_{1\beta}u_{k\bar{x}_k}^{m-\frac{k-1}{n}}\Big)=0, \tag{45$_2$}$$

$$\varkappa\sum_{j=1}^{n}v_{ix_j\bar{x}_j}^{m}-v_i^m=u_i^m, \qquad (x,t)\in\Omega_h^{m-\frac{k-1}{n}}, \tag{45$_3$}$$

$$k,i=1,2,\dots,n; \qquad m=1,2,\dots,N,$$

причем суммирование по k в этих схемах не производится, а по временной переменной на сетке введены точки с целыми и дробными индексами. При $\alpha=1$, $\beta=0$ схемы (45_i) дают "правую" схему переменных направлений, при $\alpha=0$, $\beta=1$ – "левую", а при $\alpha=1$, $\beta=1$ имеем "симметричную" схему переменных направлений. В "правой" схеме уравнения (45_2) рассматриваются в точках $(x,t)\in\Omega_h^{m-\frac{k-1}{n}}\cup\sum_{i=1}^{n}\partial\Omega_{ih}^{m-\frac{k-1}{n}}$, в "левой" схеме – в точках $(x,t)\in\Omega_h^{m-\frac{k-1}{n}}\cup\sum_{i=1}^{n}\partial\hat{\Omega}_{ih}^{m-\frac{k-1}{n}}$, в "симметричной" схеме в точках $(x,t)\in\Omega_h^{m-\frac{k-1}{n}}\cup\sum_{i=1}^{n}\partial\Omega_{ih}^{m-\frac{k-1}{n}}\cup\sum_{i=1}^{n}\partial\hat{\Omega}_{ih}^{m-\frac{k-1}{n}}$.
При $\gamma=1$ уравнения системы (45_i) становятся явными относительно $\vec{v}$.

К конечно-разностным уравнениям (45_i) добавим начально-граничные условия

$$\vec{v}\big|_{t=0}=\vec{v}^\circ=\vec{a}_h, \qquad \vec{u}\big|_{t=0}=\vec{u}^\circ=\varkappa\Delta\vec{a}_h-\vec{a}_h, \tag{46$_1$}$$

$$p\big|_{t=0}=p^\circ=p_{oh}, \tag{46$_2$}$$

где $p_o(x)$ есть значение давления $p(x,t)$ при $t=0$, вычисленное из задачи (I),(2),

$$\vec{v}^m\big|_{\partial\Omega^m}=0, \quad \vec{u}^{m-\frac{k-1}{n}}\big|_{\partial\Omega^{m-\frac{k-1}{n}}}=0, \qquad m=0,1,\dots,N-1, \tag{46$_3$}$$

и, кроме того, сеточные функции $u_i^{m-\frac{k-1}{n}}$, $i,k=1,2,\dots,n$, $m=1,2,\dots,N$, и v_i^m считаются продолженными нулем вне $\bar\Omega_h^{m-\frac{k-1}{n}}$ и $\bar\Omega_h^m$ соответственно. Число уравнений в написанных схемах равно числу неизвестных.

Умножая i-е уравнения в (45_1) на $2\Delta t h^n u_i^{m-\frac{k-1}{n}}$, i-е уравнения (45_2) на $2\Delta t h^n p^{m-\frac{k-1}{n}}$, суммируя полученные равенства по $i=1,2,\dots,n$ и точкам решетки $\Omega_h^{m-\frac{k-1}{n}}$ и используя, где необходимо, уравнения (45_3), получим энергетическое равенство (для определенности возьмем случай $\alpha=1$, $\beta=0$):

$$\|\vec u^{\,m-\frac{k-1}{n}}\|^2-\|\vec u^{\,m-\frac{k}{n}}\|^2+\|\vec u^{\,m-\frac{k-1}{n}}-\vec u^{\,m-\frac{k}{n}}\|^2+2\Delta t\,\frac{\varepsilon}{\varkappa}\|\vec u_{x_k}^{\,m-\frac{k-1}{n}}\|^2+$$

$$+\delta_{0\gamma}\delta_{k1}2\Delta t\,\varkappa\Big(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\Big)\Big\|\sum_{i,j=1}^{n} v^m_{ix_j\bar x_j}\Big\|^2+\delta_{0\gamma}\cdot 2\Delta t\Big(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\Big)\sum_{j=1}^{n}\|\vec v^{\,m}_{x_j}\|^2+\theta\Big[\|p^{m-\frac{k-1}{n}}\|^2-\|p^{m-\frac{k}{n}}\|^2+$$

$$+\|p^{m-\frac{k-1}{n}}-p^{m-\frac{k}{n}}\|^2\Big]=\frac{2}{n}\Delta t\big(\vec f^{\,m-\frac{k-1}{n}},\vec u^{\,m-\frac{k-1}{n}}\big)+\delta_{1\gamma}\delta_{k2}2\Delta t\Big(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\Big)\Big(\sum_j v^{m-1}_{ix_j\bar x_j},u_i^m\Big),\qquad(47)$$

а из (45_3) равенство

$$\varkappa^2\Big\|\sum_{i,j=1}^{n} v^m_{ix_j\bar x_j}\Big\|^2+2\varkappa\sum_j\|\vec v^{\,m}_{x_j}\|^2+\|\vec v^{\,m}\|^2=\|\vec u^{\,m}\|^2.\qquad(48)$$

С помощью (48), взятого на слое $m-1$, оцениваем второе слагаемое в правой части (47).

Из равенств (47),(48) следует прежде всего, что конечно-разностные задачи (45_i),(46_i) на каждом m-ом слое, $m=1,\dots,N$ однозначно разрешимы. Далее, из (47), (48) следует (ср. [6], гл.VI) основное энергетическое неравенство (для определенности $n=2$ и, как и выше, $\alpha=1$, $\beta=0$): при любом $m=1,\dots,N$

$$\|\vec u^{\,m}\|^2+2\Delta t\,\frac{\varepsilon}{\varkappa}\sum_{\ell=1}^{m}\big(\|\vec u^{\,\ell}_{x_1}\|^2+\|\vec u^{\,\ell-\frac12}_{x_2}\|^2\big)+\sum_{\ell=1,k=1}^{m,2}\|\vec u^{\,\ell-\frac{k-1}{2}}-\vec u^{\,\ell-\frac{k}{2}}\|^2+\delta_{0\gamma}\cdot 2\Delta t\,\varkappa\Big(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\Big)\cdot$$

$$\cdot\Big\|\sum_{i,j=1}^{2} v^m_{ix_j\bar x_j}\Big\|^2+\delta_{0\gamma}\cdot 2\Delta t\Big(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\Big)\sum_{j=1}^{n}\|\vec v^{\,m}_{x_j}\|^2+\theta\Big(\|p^m\|^2+\sum_{\ell=1,k=1}^{m,2}\|p^{\ell-\frac{k-1}{2}}-p^{\ell-\frac{k}{2}}\|^2\Big)\le$$

$$\le\delta_{0\gamma}\Big[2\|\vec u^{\,0}\|^2+\frac{5}{4}\Big(\Delta t\sum_{\ell=1,k=1}^{m,2}\|\vec f^{\,\ell-\frac{k-1}{2}}\|\Big)^2+2\theta\|p^0\|^2\Big)+\delta_{1\gamma}\cdot e^{2\frac{\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}}{\varkappa}T}\Big[\|\vec u^{\,0}\|^2+C\Big(\Delta t\sum_{\ell=1,k=1}^{m,2}\|\vec f^{\,\ell-\frac{k-1}{2}}\|\Big)^2+\theta\|p^0\|^2\Big]\le$$

$$\le\delta_{0\gamma}C_1+\delta_{1\gamma}\cdot C_2,\qquad(49)$$

причем в схеме с $\gamma=1$ эта оценка получается при условии

$$1-\frac{\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}}{\varkappa}\Delta t>0.\qquad(50)$$

Чтобы доказать сходимость $\vec u_h^{\,\varepsilon,\theta}$, $\vec v_h^{\,\varepsilon,\theta}$ к точному решению задачи (I),(2), (в схемах (45_i)-(49) индексы h,ε и θ для простоты везде были опущены), предположим, что задача (I),(2) имеет гладкое (см. ниже), решение v, p. Пусть v_h, p_h – значения v, p в точках сетки. Равенства (45_i) для них выполняются с невязками $\tau_i^{m,k}$, $\rho^{m,k}$ и γ_i^m соответственно, причем $\sum_{k=1}^{2}\vec{\tau}^{m,k}\equiv\vec{\tau}^m$, $\sum_{k=1}^{2}\rho^{m,k}\equiv\rho^m$, $\vec{\gamma}^m$ малы при малых h, Δt, θ, ε.

Напишем разностную схему для $\vec{w}_h=\vec{u}_h-\vec{u}_h^{\varepsilon,\theta}$, $\vec{z}_h=\vec{v}_h-\vec{v}_h^{\varepsilon,\theta}$, $q_h=p_h-p_h^{\varepsilon,\theta}$ (для определенности $\alpha=1$, $\beta=\gamma=0$):

$$\frac{1}{\Delta t}\left(w_i^{m-\frac{k-1}{2}}-w_i^{m-\frac{k}{2}}\right)-\frac{\varepsilon}{\varkappa}w_{ix_k\bar{x}_k}^{m-\frac{k-1}{2}}+\frac{1}{2}\left(\overset{+}{z}{}_k^{k_{m-1}}u_{ix_k}^{m-\frac{k-1}{2}}+z_k^{m-1}u_{i\bar{x}_k}^{m-\frac{k-1}{2}}+z_{kx_k}^{m-1}u_i^{m-\frac{k-1}{2}}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\overset{+}{v}{}_k^{k_{m-1}}w_{ix_k}^{m-\frac{k-1}{2}}+v_k^{m-1}w_{i\bar{x}_k}^{m-\frac{k-1}{2}}+v_{kx_k}^{m-1}w_i^{m-\frac{k-1}{2}}\right)+\delta_{k1}\left(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)\sum_{j=1}^{2}z_{ix_j\bar{x}_j}^m-\delta_{ik}q_{\bar{x}_k}^{m-\frac{k-1}{2}}=\tau_i^{m,k}, \tag{51$_1$}$$

$$\frac{\theta}{\Delta t}\left(q^{m-\frac{k-1}{2}}-q^{m-\frac{k}{2}}\right)+w_{kx_k}^{m-\frac{k-1}{2}}=\rho_i^{m,k}, \tag{51$_2$}$$

$$\varkappa\sum_{j=1}^{2}z_{ix_j\bar{x}_j}^m-z_i^m=w_i^m+\gamma_i^m, \tag{51$_3$}$$

$$k=1,2,\quad m=1,\dots,N.$$

К системе (51_i) добавляются начально-граничные условия

$$\vec{w}_h\big|_{\partial\Omega_h}=\vec{z}_h\big|_{\partial\Omega_h}=0,\qquad \vec{w}_h\big|_{t=0}=q_h\big|_{t=0}=\vec{z}_h\big|_{t=0}=0. \tag{52}$$

Энергетическое равенство для системы (51_i),(52) имеет вид:

$$\|\vec{w}^{m-\frac{k-1}{2}}\|^2-\|\vec{w}^{m-\frac{k}{2}}\|^2+\|\vec{w}^{m-\frac{k-1}{2}}-\vec{w}^{m-\frac{k}{2}}\|^2+2\frac{\varepsilon}{\varkappa}\Delta t\|\vec{w}_{x_k}^{m-\frac{k-1}{2}}\|^2+2\Delta t\varkappa\left(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)\sum_{i,j=1}^{2}\|\vec{z}_{x_i\bar{x}_j}^m\|^2+$$

$$+2\Delta t\left(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)\sum_{j=1}^{2}\|\vec{z}_{x_j}^m\|^2+\theta\left(\|q^{m-\frac{k-1}{2}}\|^2-\|q^{m-\frac{k}{2}}\|^2+\|q^{m-\frac{k-1}{2}}-q^{m-\frac{k}{2}}\|^2\right)=$$

$$=2\Delta t\left(\vec{\tau}^{m,k},\vec{w}^{m-\frac{k-1}{2}}\right)+2\Delta t\left(\rho^{m,k},q^{m-\frac{k-1}{2}}\right)+2\Delta t\left(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)\left(\sum_{j=1}^{2}\vec{z}_{x_j\bar{x}_j},\vec{\gamma}^m\right)+j_1^{m,k}, \tag{53}$$

где
$$j_1^{m,k}=-\Delta t h^2\sum_{\Omega_h}\sum_{i=1}\left(\overset{+}{z}{}_k^{k_{m-1}}u_{ix_k}^{m-\frac{k-1}{2}}+z_k^{m-1}u_{i\bar{x}_k}^{m-\frac{k-1}{2}}+z_{kx_k}^{m-1}u_i^{m-\frac{k-1}{2}}\right)\cdot w_i^{m-\frac{k-1}{2}}$$

Из (51_3) и (52) легко получается равенство

$$\varkappa\sum_{j=1}^{2}\|\vec{z}_{x_j}^m\|^2+\frac{1}{2}\|\vec{z}^m\|^2\leq\|\vec{w}^m\|^2+\|\vec{\gamma}^m\|^2, \tag{54}$$

с помощью которого, используя ограниченность $\vec{u}$ и $\vec{u}_x$ оценим $j_1^{m,k}$

$$|j_1^{m,k}|\leq C_3\left(\vec{u},\frac{1}{\varkappa}\right)\Delta t\left(\|\vec{w}^{m-1}\|^2+\sum_{k=m-\frac{1}{2}}^{m}\|\vec{w}^k-\vec{w}^{k-\frac{1}{2}}\|^2+\|\vec{\gamma}^{m-1}\|^2\right). \tag{55}$$

Оценивая остальные члены в правой части (53) как в [6], гл. VI, § 9, и производя суммирование по $k=1,2$, придем к неравенству

$$\|\vec{w}^m\|^2+\left(\frac{1}{2}-C_3\Delta t\right)\sum_{k=m-\frac{1}{2}}^{m}\|\vec{w}^k-\vec{w}^{k-\frac{1}{2}}\|^2+2\frac{\varepsilon}{\varkappa}\Delta t\sum_{k=1}^{2}\|\vec{w}_{x_k}^{m-\frac{k-1}{2}}\|^2+2\Delta t\varkappa\left(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)\sum_{\substack{i=1,j=1\\ i\neq j}}^{2,2}\|\vec{z}_{x_i\bar{x}_j}^m\|^2+$$

$$+\Delta t\varkappa\left(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)\sum_{j=1}^{2}\|\vec{z}_{x_j\bar{x}_j}^m\|^2+2\Delta t\left(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)\sum_{j=1}^{2}\|\vec{z}_{x_j}^m\|^2+\theta\|q^m\|^2+\frac{\theta}{2}\sum_{k=m-\frac{1}{2}}^{m}\|q^k-q^{k-\frac{1}{2}}\|^2\leq,$$

$$\leq\left[1+\left(1+C_3\left(\vec{u},\frac{1}{\varkappa}\right)\Delta t\right]\left(\|\vec{w}^{m-1}\|^2+\theta\|q^{m-1}\|^2\right)+\Delta t\,I_m,\qquad\text{где} \tag{56}$$

$$I_m = 2\Delta t\|\vec{\tau}^{\,m,1}\|^2+(1+2\Delta t)\|\vec{\tau}^{\,m}\|^2+\frac{2\Delta t}{\theta}\|\rho^{m,1}\|^2+\frac{1+2\Delta t}{\theta}\|\rho^m\|^2+C_4(C_3,\frac{\nu}{\varkappa})\|\vec{\gamma}^{\,m-1}\|^2,$$

из которого при условии $\frac{1}{2}-C_3\Delta t>0$ следует неравенство

$$\|\vec{w}^{\,m}\|^2+\theta\|q^m\|^2\le e^{CT}(\|\vec{w}^{\,0}\|^2+\theta\|q^0\|^2+\Delta t\sum_{\ell=1}^{m} I_\ell)\equiv e^{CT} j_2^m,\quad m=1,\dots,N. \tag{57}$$

Из неравенств (56),(57) и (54) вытекает основная оценка

$$|\vec{w},z|^2\equiv \max_{1\le m\le N}\{\|\vec{z}^{\,m}\|^2+\sum_{j=1}^{2}\|\vec{z}^{\,m}_{x_j}\|^2+\max_{k=1,2}\|\vec{w}_{x_k}^{\,m-\frac{k-1}{2}}\|^2\}+\Delta t\sum_{m=1,k=1}^{N,2}\|\vec{w}_{x_k}^{\,m-\frac{k-1}{2}}\|^2\le C_5(T)\cdot j_2^N \tag{58}$$

Если при $\Delta t, h, \varepsilon, \theta\to 0$ выполнены условия

$$\|q^0\|^2+\Delta t\sum_{\ell=1}^{N}(\|\vec{\tau}^{\,m,1}\|^2+\|\rho^{\ell,1}\|^2)\le const \tag{59}$$

и $$\frac{\Delta t}{\theta}+\Delta t\sum_{\ell=1}^{N}(\frac{1}{\theta}\|\rho^\ell\|^2+\|\vec{\tau}^{\,\ell}\|^2+\|\vec{\gamma}^{\,\ell-1}\|^2)+\|\vec{w}^{\,0}\|^2\to 0, \tag{60}$$

то j_2^N, а потому, в силу (58), и $|\vec{w},\vec{z}|\to 0$ при $\Delta t, h, \varepsilon, \theta\to 0$. Условия (59),(60) заведомо выполнены, если точное решение $\vec{v}, p$ задачи (I),(2) имеет непрерывные в Q_T производные $\mathcal{D}_t^2\vec{v}_{xx}$, $\mathcal{D}_x^5\vec{v}$, $\mathcal{D}_x^2 p$ и $\Delta t\sim h,\varepsilon,\theta$ и $\frac{\Delta t}{\theta}\to 0$.

Как и в случае уравнений Навье-Стокса [9], для задачи (I),(2) можно составить сходящиеся схемы переменных направлений, неявные по $\vec{u}\equiv\vec{v}-\varkappa\Delta\vec{v}$, неявные (при $\gamma=0$) и явные (при $\gamma=1$) по $\vec{v}$, явные по давлению. Для построения этих схем по-прежнему воспользуемся регуляризацией (44_i) системы (I). Тогда указанные схемы имеют вид ($n=3$)

$$\frac{1}{\Delta t}(u_i^{m-\frac{\tau-1}{3}}-u_i^{m-\frac{\tau}{3}})-\frac{\varepsilon}{\varkappa}u_{ix_k\bar{x}_k}^{m-\frac{\tau-1}{3}}+\frac{1}{2^{\alpha+\beta}}\Big[\delta_{1\alpha}(\overset{+}{v}{}^{k_{m-1}}u_{ix_k}^{m-\frac{\tau-1}{3}}+v_k^{m-1}u_{i\bar{x}_k}^{m-\frac{\tau-1}{3}}+v_{kx_k}^{m-1}u_i^{m-\frac{\tau-1}{3}})+$$
$$+\delta_{1\beta}(v_k^{m-1}u_{ix_k}^{m-\frac{\tau-1}{3}}+\bar{v}_k^{k_{m-1}}u_{i\bar{x}_k}^{m-\frac{\tau-1}{3}}+v_{k\bar{x}_k}^{m-1}u_i^{m-\frac{\tau-1}{3}})\Big]+\delta_{\tau,1+2\gamma}(\nu-\frac{\varepsilon}{\varkappa})\sum_{j=1}^{n}v_{ix_j\bar{x}_j}^{m-\gamma}-$$
$$-\frac{\delta_{\tau 3}}{\alpha+\beta}(\delta_{1\alpha}p_{\bar{x}_k}^{m-1}+\delta_{1\beta}p_{x_k}^{m-1})=-\frac{1}{3}f_i^{m-\frac{\tau-1}{3}},\quad (x,t)\in\Omega_h^{m-\frac{\tau-1}{3}}; \tag{61_1}$$

$$\frac{\theta}{\Delta t}(p^m-p^{m-1})+\frac{1}{\alpha+\beta}(\delta_{1\alpha}\sum_{i=1}^{n}u_{ix_i}^{m-\frac{2}{3}}+\delta_{1\beta}\sum_{i=1}^{n}u_{ix_i}^{m-\frac{2}{3}})=0, \tag{61_2}$$

$$(x,t)\in\Omega_h^m\cup\delta_{1\alpha}\sum_{i=1}^{n}\partial\Omega_{ih}^m\cup\delta_{1\beta}\sum_{i=1}^{n}\partial\hat{\Omega}_{ih}^m,$$

$$\varkappa\sum_{j=1}^{m}v_{ix_j\bar{x}_j}^m-v_i^m=u_i^m,\qquad (x,t)\in\Omega_h^m, \tag{61_3}$$

$$\tau,k,i=1,2,3,\qquad m=1,2,\dots,N,$$

где при $\tau=1$ i принимает последовательно значения I,2,3,а $k=3$, I,2 соответственно; при $\tau=2$, $i=$ I,2,3, $k=$2,3,I,при $\tau=3$ $i=$I,2,3, $k=$ I,2,3. К уравнениям (61_i) по-прежнему добавляются начально-граничные условия (46_i).

Энергетическое неравенство для схемы (61_i),(46_i) имеет вид ($\alpha=1$, $\beta=\gamma=0$):

$$\|\vec{u}^m\|^2+\varepsilon\Delta t\,\omega\sum_{\ell=1,i=1}^{m,3}\|u_{ix_i}^{\ell-\frac{2}{3}}\|^2+2\frac{\varepsilon}{\varkappa}\Delta t\sum_{\substack{\ell=1,i=1,k=1,r=1\\ \text{при } r\neq 3}}^{m,3,3,2}\|u_{ix_k}^{\ell-\frac{r-1}{3}}\|^2+\sum_{\ell=1,r=1}^{m,3}\|\vec{u}^{\ell-\frac{r-1}{3}}-\vec{u}^{\ell-\frac{r}{3}}\|^2+$$

$$+2\Delta t(\nu-\tfrac{\varepsilon}{\varkappa})\cdot\varkappa\sum_{i,j=1}^{3}\|\vec{v}_{x_i\bar{x}_j}^{\,m}\|^2+2\Delta t(\nu-\tfrac{\varepsilon}{\varkappa})\sum_{j=1}^{3}\|\vec{v}_{x_j}^{\,m}\|^2+\theta\|p^m\|^2\leq 2(\|\vec{u}^0\|^2+\theta\|p^0\|^2)+$$

$$+\frac{5}{9}\Big(\Delta t\sum_{\ell=1,r=1}^{m,3}\|\vec{f}^{\,\ell-\frac{r-1}{3}}\|\Big)^2 \qquad (62)$$

и выполняется при условии

$$\omega=\frac{2}{\varkappa}-\frac{\Delta t}{\varepsilon\theta}>0. \qquad (63)$$

В схемах с $\gamma=1$, кроме того, требуется условие (50).

Сходимость решений этих конечно разностных задач к достаточно гладкому решению задачи (I),(2) доказывается также, как и в схемах ($5\mathrm{I}_i$),(52).

ЛИТЕРАТУРА

I. Я.И.Войткунский, В.Б.Амфилохиев, В.А.Павловский. Уравнения движения жидкости с учетом ее релаксационных свойств.Труды Ленингр.Кораблестр.ин-та, I970, 69.

2. В.А.Павловский.К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров. ДАН СССР, I97I, 200, № 4.

3. А.П.Осколков. О разрешимости в целом первой краевой задачи для одной квазилинейной системы 3-го порядка, встречающейся при изучении движения вязкой жидкости.Записки научн.семинаров ЛОМИ им.В.А.Стеклова АН СССР,I972,27, I45-I60.

4. А.П.Осколков. О единственности и глобальной разрешимости первой краевой задачи для системы уравнений, описывающих движение водных растворов полимеров.Труды Ленингр.Кораблестр.ин-та, I972,80.

5. А.П.Осколков. О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров.Записки научн.семинаров ЛОМИ им.В.А.Стеклова АН СССР, I973,36.

6. О.А.Ладыженская. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, Наука, М., 2-е изд., I970.

7. А.А.Самарский. Введение в теорию разностных схем. Наука,М.,I97I.

8. А.П.Осколков. О некоторых сходящихся разностных схемах для уравнений Навье-Стокса. Труды МИАН им.В.А.Стеклова,I973, I25.

9. О.А.Ладыженская, В.Я.Ривкинд. О сходящихся разностных схемах для уравнений Навье-Стокса. Числ.методы мех.сплошн. среды, инф.бюлл., том 2, № I, Новосибирск, I97I г.