

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. M. Galin, О теплообмене при ламинарном течении жидкости в плоском канале с учетом аксиальной теплопроводности при ступенчатом изменении температуры стенки,
TVT, 1973, Volume 11, Issue 6, 1213–1219

<https://www.mathnet.ru/eng/tvt9979>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.175

May 24, 2025, 20:22:53



УДК 532.517.2

О ТЕПЛОБМЕНЕ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С УЧЕТОМ АКСИАЛЬНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ СТУПЕНЧАТОМ ИЗМЕНЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ СТЕНКИ

Н. М. Галин

Комбинацией метода собственных функций, преобразования Фурье и малого параметра решена задача о теплообмене с учетом аксиальной теплопроводности при ламинарном гидродинамически стабилизированном течении несжимаемой жидкости в плоском канале для случая ступенчатого изменения температуры стенки при $Re < 1$. Дана интерполяционная формула для стабилизированных чисел Nu_∞ , пригодная при любых Re .

Подавляющее число задач конвективного теплообмена решено без учета аксиальной теплопроводности теплоносителя. Учет этого эффекта необходим при малых числах Пекле, а именно, при $Re < 100$. Аналитическое решение задач конвективного теплообмена с учетом осевой молекулярной теплопроводности имеет физические особенности и математические трудности, связанные с необходимостью учета взаимного влияния процессов теплообмена на различных участках канала. В этом случае во входное сечение обогреваемого участка жидкость может поступать уже будучи заметно подогретой вследствие теплопроводности за счет тепла, выделяемого на обогреваемом участке. В таких случаях температура на входе в канал уже не может считаться заданной, а известна только вдали от входа в обогреваемый участок, т. е. на $-\infty$.

Рассматриваемая задача изучалась ранее [1—9]. В работах [2—5] температура на входе в обогреваемый участок задавалась как известная величина и находились только предельные значения чисел Нуссельта Nu_∞ при $x \rightarrow +\infty$. В [6] задача решалась на участке от $-\infty$ до $+\infty$, но с постоянной по сечению канала скоростью. Отдельно рассматривались участки $-\infty \div 0$ и $0 \div +\infty$. На каждом из участков решение находилось методом собственных функций, причем коэффициенты разложений определялись из условия стыковки решений в сечении $x=0$. Ряд задач с постоянной скоростью при граничных условиях третьего рода рассмотрен в [7]. В [8] предложен метод решения задачи с переменным профилем скорости, но он является скорее методом численного решения. Автор [9] реализовал его для одного значения числа $Re=2$. Существенным в методе [8] является условие стыковки решений в сечении $x=0$.

В предлагаемой работе применяются методы решения, не требующие использования условия стыковки решений. Используется метод собственных функций в сочетании с комплексным преобразованием Фурье, а для $Re < 1$ — метод малого параметра.

Пусть в плоской трубе шириной h имеет место ламинарное течение жидкости вдоль оси x . При $x < 0$ температура стенки T_1 ($y=0$ и $y=+h$); при $x > 0$ температура стенки T_2 ; в сечении $x_0=0$ $T_{ст} = 1/2(T_1 + T_2)$. Введем безразмерные переменные $\hat{T} = (T - T_1) / (T_2 - T_1)$; $\xi = x/h$; $\eta = y/h$; $Pe = \bar{w}h/a$.

Тогда задача сформулируется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \eta^2} - 6\text{Pe} (1 - \eta) \eta \frac{\partial \hat{T}}{\partial \xi} = 0, \quad (1)$$

$\eta=0, \eta=1, \hat{T}=0$ при $\xi < 0, \hat{T}=1$ при $\xi > 0, \hat{T}=1/2$ при $\xi=0, \xi \rightarrow -\infty \hat{T} \rightarrow 0, \xi \rightarrow +\infty \hat{T} \rightarrow 1$.

Рассмотрим следующие частные случаи этой задачи.

1. Случай $\text{Pe}=0$, конвекция отсутствует. В этом частном случае при сформулированных граничных условиях температура в сечении $\xi=0$ известна из условия симметрии температурного поля, $\hat{T}(0, \eta)=1/2$. Задача сводится к решению уравнения Лапласа в двух полубесконечных полосах с известной температурой в начальном сечении. Запишем сразу окончательное решение

$$\hat{T}_0 = \theta \mp \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \sin [\pi (2n+1) \eta] \exp [-\pi (2n+1) |\xi|]. \quad (2)$$

Здесь и далее θ — единичная ступенчатая функция

$$\theta = \begin{cases} 0 & \xi < 0, \\ 1/2 & \xi = 0, \\ 1 & \xi > 0. \end{cases}$$

В (2) знак минус берется для $\xi > 0$, плюс — для $\xi < 0$.

2. Случай произвольного Pe , скорость постоянна по сечению.

Ранее эта задача решалась в [6, 7], здесь она будет решена еще раз другим методом. Введем новую переменную $\vartheta = \hat{T} - \theta$. Задача (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \eta^2} - \text{Pe} \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} &= \text{Pe} \delta(\xi) - \delta'(\xi), \\ \eta=0 \quad \vartheta=0; \quad \xi \rightarrow +\infty \quad \vartheta \rightarrow 0; \\ \eta=1 \quad \vartheta=0; \quad \xi \rightarrow -\infty \quad \vartheta \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\delta(\xi)$ и $\delta'(\xi)$ — дельта-функция и ее первая производная по ξ в сечении $\xi=0$.

Решение задачи (3) ищем в виде

$$\vartheta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\xi) \sin \pi (2n+1) \eta. \quad (4)$$

Подставим (4) в (3)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} C_n''(\xi) \sin \pi (2n+1) \eta + \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\xi) [-\pi^2 (2n+1)^2] \cdot \sin \pi (2n+1) \eta - \\ - \text{Pe} \sum_{n=0}^{\infty} C_n'(\xi) \sin \pi (2n+1) \eta = \text{Pe} \delta(\xi) - \delta'(\xi). \end{aligned}$$

В правой части уравнения при обоих слагаемых множитель единица представим рядом Фурье по $\sin k\eta$, коэффициенты этого разложения $4/\pi (2n+1), n=0, 1, 2, \dots$. Для неизвестных коэффициентов $C_n(\xi)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$C_n''(\xi) - \text{Pe} C_n'(\xi) - \pi^2 (2n+1)^2 C_n(\xi) = [\text{Pe} \delta(\xi) - \delta'(\xi)] \frac{4}{\pi (2n+1)} \quad (5)$$

с граничными условиями $\xi \rightarrow \pm\infty C_n \rightarrow 0$.

Из физических соображений ясно также, что при $\xi \rightarrow \pm\infty$ стремятся к нулю не только коэффициенты $C_n(\xi)$, но и их производные $C_n'(\xi)$. Учи-

тывая это, применим к уравнению (5) комплексное преобразование Фурье

$$= C_n \int_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{ip\xi} d\xi,$$

тогда для C_n получим следующее соотношение:

$$C_n = \frac{4}{\pi(2n+1)} \frac{\text{Re} + ip}{(ip)^2 + ip \text{Re} - \pi^2(2n+1)^2}. \quad (6)$$

Найдем $C_n(\xi)$

$$C_n(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip\xi} C_n dp. \quad (7)$$

В точках $p_1 = \frac{1}{2}(\text{Re} - \sqrt{\text{Re}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2})i = b_1 i$ и $p_2 = \frac{1}{2}(\text{Re} + \sqrt{\text{Re}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2})i = b_2 i$ подынтегральная функция (6) имеет простые полюса, поэтому интеграл (7) может быть вычислен с помощью теории вычетов, причем

$$\text{Выч}_k = \frac{(\text{Re} + ip_k) e^{-i\xi p_k}}{\{d\}dp [i^2 p^2 + \text{Re} ip - \pi^2(2n+1)^2]}_{p=p_k}, \quad k = 1 \text{ или } 2.$$

Для $\xi > 0$ берем p_1 , а для $\xi < 0$ — p_2 . Для C_n получаем

$$\xi > 0 \quad C_n = \frac{4}{\pi(2n+1)} \frac{b_1 - \text{Re}}{\sqrt{\text{Re}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2}} \exp(b_1 \xi), \quad (8)$$

$$\xi < 0 \quad C_n = \frac{4}{\pi(2n+1)} \frac{\text{Re} - b_2}{\sqrt{\text{Re}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2}} \exp(b_2 \xi). \quad (9)$$

Таким образом, для поля температур окончательно имеем

$$\xi > 0 \quad \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{\text{Re} + \sqrt{\text{Re}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2}}{\sqrt{\text{Re}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2}} \times \\ \times \exp\left[\frac{1}{2} \xi (\text{Re} - \sqrt{\text{Re}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2})\right] \sin \pi(2n+1) \eta, \quad (10)$$

$$\xi < 0 \quad \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{\sqrt{\text{Re}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2} - \text{Re}}{\sqrt{\text{Re}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2}} \times \\ \times \exp\left[\frac{1}{2} \xi (\text{Re} + \sqrt{\text{Re}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2})\right] \sin \pi(2n+1) \eta. \quad (11)$$

Можно легко убедиться в том, что в сечении $\xi=0$ формулы (10) и (11) при любых Re удовлетворяют требованиям стыковки. Частный случай (2) получается из (10) и (11) при $\text{Re}=0$.

Найдем среднюю по сечению канала температуру жидкости. Если определить ее как среднеинтегральную, т. е. и здесь считать профиль скорости постоянным, то из (10) и (11) получаются формулы

$$\xi > 0 \quad \bar{T} = 1 - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{\text{Re} + \sqrt{\text{Re}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2}}{\sqrt{\text{Re}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2}} \times \\ \times \exp\left[\frac{1}{2} \xi (\text{Re} - \sqrt{\text{Re}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2})\right], \quad (10a)$$

$$\xi < 0 \quad \bar{T} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{\sqrt{\text{Re}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2} - \text{Re}}{\sqrt{\text{Re}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2}} \times \\ \times \exp\left[\frac{1}{2} \xi (\text{Re} + \sqrt{\text{Re}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2})\right]. \quad (11a)$$

Средняя температура смешения с учетом реального профиля скоростей

должна быть найдена по формуле

$$\bar{T} = \int_0^1 \hat{w} \hat{T} d\eta / \int_0^1 \hat{w} d\eta, \quad \hat{w} = 6\eta(1 - \eta). \quad (12)$$

После выполнения нужных вычислений получим

$$\xi > 0 \quad \bar{T} = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n}{2n+1} \frac{\text{Pe} + \sqrt{\text{Pe}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2}}{\sqrt{\text{Pe}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2}} \times \\ \times \exp \left[\frac{1}{2} \xi (\text{Pe} - \sqrt{\text{Pe}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2}) \right], \quad (106)$$

$$\xi < 0 \quad \bar{T} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n}{2n+1} \frac{\sqrt{\text{Pe}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2} - \text{Pe}}{\sqrt{\text{Pe}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2}} \times \\ \times \exp \left[\frac{1}{2} \xi (\text{Pe} + \sqrt{\text{Pe}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2}) \right], \quad (116)$$

$$K_n = \frac{\int_0^1 \eta(1-\eta) \sin \pi(2n+1)\eta d\eta}{\int_0^1 \eta(1-\eta) d\eta} = \frac{24}{\pi^3(2n+1)^3}.$$

Число Nu определяется из уравнения теплообмена

$$\text{Nu} = - \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial \eta} \right)_{\text{ст}} / \hat{T}_{\text{ст}} - \bar{T}. \quad (13)$$

Если использовать среднюю температуру (10а), то для $\xi > 0$ получается

$$\text{Nu} = \frac{\pi^2}{2} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{Pe} + \sqrt{\text{Pe}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2}}{\sqrt{\text{Pe}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2}} \times \\ \times \exp \left[\frac{1}{2} \xi (\text{Pe} - \sqrt{\text{Pe}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2}) \right]}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \frac{\text{Pe} + \sqrt{\text{Pe}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2}}{\sqrt{\text{Pe}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2}} \times \\ \times \exp \left[\frac{1}{2} \xi (\text{Pe} - \sqrt{\text{Pe}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2}) \right]}, \quad (13а)$$

а (106) для $\xi > 0$ дает

$$\text{Nu} = \frac{\pi^2}{24} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{Pe} + \sqrt{\text{Pe}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2}}{\sqrt{\text{Pe}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2}} \times \\ \times \exp \left[\frac{1}{2} \xi (\text{Pe} - \sqrt{\text{Pe}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2}) \right]}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \frac{\text{Pe} + \sqrt{\text{Pe}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2}}{\sqrt{\text{Pe}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2}} \times \\ \times \exp \left[\frac{1}{2} \xi (\text{Pe} + \sqrt{\text{Pe}^2 + 4\pi^2(2n+1)^2}) \right]}. \quad (13б)$$

Для $\xi \rightarrow \infty$ (13а) дает $\text{Nu}_{\infty} \approx 4,93$, из (13б) получается $\text{Nu}_{\infty} = 4,059$. В обоих случаях Nu_{∞} не зависит от Pe, что не соответствует действительности, но во втором случае численное значение Nu_{∞} гораздо ближе к истинным, лежащим в пределах $4,059 \div 3,77$; точный результат 4,059 соответствует $\text{Pe} = 0$. Таким образом, профиль температуры, рассчитанный с использованием постоянной скорости, и средняя температура смешения, найденная для реального профиля скорости, дают неплохие результаты, но при этом теряется эффект зависимости Nu от Pe. Сами по себе формулы (106) и

(116) для средней температуры могут представить интерес для оценки влияния аксиальной теплопроводности. В частности, в эксперименте может представить интерес значение средней температуры на входе в обогреваемый участок, она вычисляется по (106) или (116) при $\xi=0$. На рис. 1 показано изменение средней температуры по длине трубы при различных Re , а на рис. 2 — температура смешения в сечении $\xi=0$ в зависимости от Re . Из графиков видно, что эффект аксиальной теплопроводности проявляется при $Re < 100$, но особенно ощутимо при $Re < 1$.

3. Параболический профиль скорости, $Re < 1$. Если Re мало, то задача (1) является задачей с малым параметром. В соответствии с этим ее решение можно искать в виде

$$\hat{T} = \hat{T}_0 + Re \hat{T}_1 + Re^2 \hat{T}_2 + \dots \quad (14)$$

Здесь \hat{T}_0 — решение для предельного случая $Re=0$ определяется формулами (3), (10), (11). Если ограничиться одним приближением, то для \hat{T}_1 будем иметь уравнение

$$\frac{\partial^2 \hat{T}_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}_1}{\partial \eta^2} = 6\eta(1-\eta) \frac{\partial \hat{T}_0}{\partial \xi}, \quad (15)$$

$$\hat{T}_0 = \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{b_n} e^{b_n \xi} \sin \pi(2n+1)\eta, \quad (16)$$

$$b_n = \begin{cases} -\pi(2n+1) & \xi > 0, \\ +\pi(2n+1) & \xi < 0. \end{cases} \quad (17)$$

Если учесть, что при дифференцировании \hat{T}_0 по ξ при $\xi=0$ дважды появляется δ -функция, то получим

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial \eta^2} = 6\eta(1-\eta) \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot e^{b_n \xi} \sin \pi(2n+1)\eta - \delta'(\xi), \quad (18)$$

$$\vartheta_1 = \hat{T}_1 - \theta; \quad \eta=0 \quad \vartheta_1=0; \\ \eta=1 \quad \vartheta_1=0; \quad \xi \rightarrow \pm\infty \quad \vartheta_1 \rightarrow 0.$$

Решение задачи (18) ищем в виде

$$\vartheta_1 = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \sin \pi(2m+1)\eta. \quad (19)$$

Подставим (19) в (18)

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m'' \sin \pi(2m+1)\eta -$$

$$- \sum_{m=0}^{\infty} A_m \pi^2 (2m+1)^2 \times$$

$$\times \sin \pi(2m+1)\eta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{b_n \xi} 12\eta(1-\eta) \times$$

$$\times \sin \pi(2n+1)\eta - \delta'(\xi). \quad (20)$$

Умножим (20) на $\sin \pi(2m+1)\eta$ и проинтегрируем от 0 до 1, получим дифференциальное уравнение для A_m

$$A_m''(\xi) - \pi^2(2m+1)^2 A_m(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{b_n \xi} K_{mn} - \frac{4}{\pi(2m+1)} \delta'(\xi), \quad (21)$$

$$\xi \rightarrow \pm\infty, \quad A_m \rightarrow 0,$$

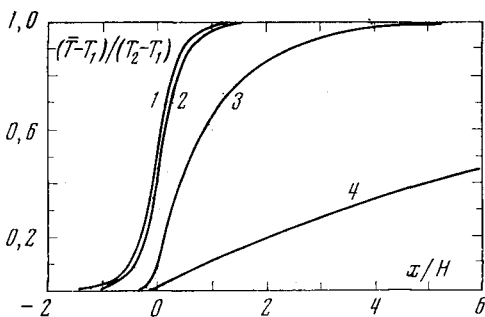


Рис. 1. Измерение средней температуры жидкости по длине трубы:

1 — $Re=0$; 2 — 1; 3 — 10; 4 — 100

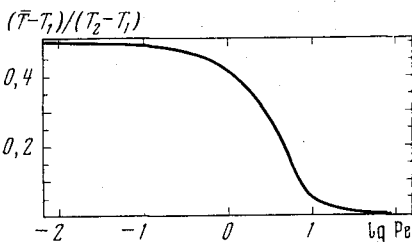


Рис. 2. Средняя температура на входе в обогреваемый участок в зависимости от числа Re

$$K_{mn} = 24 \int_0^1 \eta(1-\eta) \sin[\pi(2m+1)\eta] \sin[\pi(2n+1)\eta] d\eta. \quad (22)$$

Уравнение (21) подвергается преобразованию Фурье, тогда для Фурье-образов коэффициентов A_m получим

$$\bar{A}_m = \sum_{n=0}^{\infty} K_{mn} \frac{-2\pi(2n+1)}{[(ip)^2 - \pi^2(2m+1)^2][(ip)^2 - \pi^2(2n+1)^2]} + \frac{4ip}{\pi(2m+1)[(ip)^2 - \pi^2(2m+1)^2]}.$$

Обратное преобразование совершается так же, как и в предыдущем случае. Выполнив его, для $\xi > 0$ получим

$$A_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_{mn}}{\pi^2} (2n+1) \left[\frac{e^{-\pi(2m+1)\xi}}{2(2m+1)^3 - (2n+1)^2(2m+1)} + \frac{e^{-\pi(2n+1)\xi}}{2(2n+1)^3 - (2m+1)^2(2n+1)} \right] - \frac{2}{\pi(2m+1)} e^{-\pi(2m+1)\xi}. \quad (23)$$

Для ϑ с учетом (2), (14) и (23) получаем

$$\begin{aligned} \vartheta = & (1 + \text{Pe}) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{-2}{\pi(2m+1)} e^{-\pi(2m+1)\xi} \sin \pi(2m+1)\eta + \\ & + \text{Pe} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_{mn}}{\pi^2} (2n+1) \left[\frac{e^{-\pi(2m+1)\xi}}{2(2m+1)^3 - (2n+1)^2(2m+1)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{e^{-\pi(2n+1)\xi}}{2(2n+1)^3 - (2m+1)^2(2n+1)} \right] \right\} \sin \pi(2m+1)\eta. \end{aligned} \quad (24)$$

Число Нуссельта $\text{Nu} = \alpha h / \lambda$ в данном случае вычисляется по формуле

$$\text{Nu} = \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} / \bar{\vartheta}, \quad \bar{\vartheta} = \int_0^1 \eta(1-\eta) \vartheta d\eta / \int_0^1 \eta(1-\eta) d\eta. \quad (25)$$

Подставив (25) в (24), получим выражение для $\text{Nu}(\xi)$

$$\begin{aligned} \text{Nu} = & \frac{\pi^4}{24} \frac{2(1 + \text{Pe}) \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\pi(2m+1)\xi} - \frac{\text{Pe}}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} K_{mn} (2n+1) \times \right. \\ & \times \left[\frac{e^{-\pi(2m+1)\xi}}{2(2m+1)^3 - (2n+1)^2(2m+1)} + \frac{e^{-\pi(2n+1)\xi}}{2(2n+1)^3 - (2m+1)^2(2n+1)} \right] \left. \right\}}{2(1 + \text{Pe}) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^4} e^{-\pi(2m+1)\xi} - \frac{\text{Pe}}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^3} \times} \\ & \times \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} K_{mn} (2n+1) \left[\frac{e^{-\pi(2m+1)\xi}}{2(2m+1)^3 - (2n+1)^2(2m+1)} + \frac{e^{-\pi(2n+1)\xi}}{2(2n+1)^3 - (2m+1)^2(2n+1)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Из этого выражения можно получить формулу для предельных значений Nu_{∞} , соответствующих большому ξ

$$Nu_{\infty} = \frac{\pi^4}{24} \frac{2 + 2Pe - \frac{Pe}{\pi} \left(K_{00} - \frac{3}{7} K_{01} - \frac{5}{23} K_{02} - \frac{7}{47} K_{03} - \dots \right) - \frac{K_{00}}{\pi} Pe + \frac{3}{7\pi} K_{10} Pe}{2 + 2Pe - \frac{Pe}{\pi} \left(K_{00} - \frac{3}{7} K_{01} - \frac{5}{23} K_{02} - \frac{7}{47} K_{03} - \dots \right) - \frac{K_{00}}{\pi} Pe + \frac{1}{27} \frac{K_{10}}{7\pi} Pe} \quad (27)$$

Значения коэффициентов K_{mn} определяются из (22). Ниже используются следующие значения этих коэффициентов:

$$K_{00}=2,60798, \quad K_{01}=0,45599, \quad K_{02}=0,084442, \quad K_{03}=0,029555.$$

Из (27) получается следующее выражение:

$$Nu_{\infty} = 4,0587 [1 - 0,03072Pe / (1 + 0,13465Pe)]. \quad (28)$$

Задача решалась методом малого параметра, поэтому, строго говоря, результаты (24), (26), (28) справедливы при $Pe < 1$. Однако нетрудно убедиться, что формула (28) дает правильные значения и при $Pe > 1$. В [9] численно было найдено значение Nu_{∞} для $Pe=2$, оно оказалось равным 3,90, формула (28) дает 3,862. Более того, характер зависимости Nu_{∞} от Pe , который дает формула (28), соответствует действительному вплоть до $Pe \rightarrow \infty$. На этом основании формулу (28) можно скорректировать таким образом, чтобы при $Pe \rightarrow \infty$ получилось $Nu_{\infty} = 3,77$. Тогда получается формула, пригодная во всем диапазоне чисел Pe

$$Nu_{\infty} = 4,0587 \left(1 - \frac{0,0307 Pe}{1 + 0,4319 Pe} \right). \quad (29)$$

Для малых Pe расчет по (29) совпадает с (28); при $Pe \rightarrow \infty$ получается 3,77; при $Pe=2$ —3,92. При $Pe \ll 1$ из (28) получается, что $Nu_{\infty} = 4,0587 (1 - 0,03072 \cdot Pe)$, это совпадает с результатом, полученным в [4]: $Nu_{\infty} = 4,059 (1 - 0,031Pe + \dots)$. Зависимость Nu_{∞} от Pe для произвольных Pe показана на рис. 3.

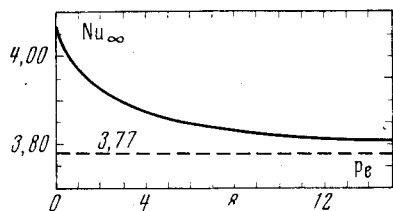


Рис. 3. Зависимость стабилизированных чисел Nu_{∞} от числа Pe

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
1 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. С. Петухов. Теплообмен и сопротивление при ламинарном движении жидкости в трубах. «Энергия», 1967.
2. Д. А. Лабунцов. Докл. АН СССР, № 6, 1958.
3. Д. А. Лабунцов. Теплоэнергетика, № 3, 55, 1958.
4. S. Pahor, J. Strnad. Appl. Sci. Res., A10, 81, 1960.
5. S. Pahor, J. Strnad. ZAMP, 7, № 6, 536, 1956.
6. H. A. Wilson. Proc. of the Cambridge Philos. Soc., 12, part 5, 406, 1904.
7. P. J. Schneider. Trans. ASME, 79, 765, 1957.
8. S. C. R. Dennis, G. Poofs. Quart. of Appl. Math., 14, 231, 1956.
9. H. C. Agrawal. Appl. Sci. Res., A9, № 2, 3, 177, 1959.