L. A. Levin, Various measures of complexity for finite objects (axiomatic description), *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1976, Volume 227, Number 4, 804–807

Доклады Академии наук СССР
1976. Том 227, № 4

УДК 517.11+519.211+681.3

МАТЕМАТИКА

Л. А. ЛЕВИН

О РАЗЛИЧНЫХ МЕРАХ СЛОЖНОСТИ КОНЕЧНЫХ ОБЪЕКТОВ (АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ)

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 I 1976)

1. В ([1]) было определено понятие сложности задания конечного объекта $K(x)$. Впоследствии оказалось, что во многих случаях удобно использовать различные другие меры сложности, построенные по аналогии с $K(x)$, но не совпадающие с ней. Таковы, например, условная сложность $K(x|y)$ ([1]), сложность разрешения слова ([5]), логарифм априорной вероятности ([3]), мера случайности слова (длина минус дефект случайности ([2])) и др. Мы приведем общую конструкцию, которая связывает каждую из этих мер сложности с некоторым функционалом (называемым нормой или квазинормой), имеющим аналитически простой вид. Оказывается, что по любому функционалу, удовлетворяющему некоторым аксиомам, наша конструкция строит соответствующую меру сложности. Среди всех таких мер существует самая большая — KP. Она асимптотически совпадает с K и тем самым (с этой точностью) выделяет K из всех прочих сложностных мер. Но в случаях, когда эта точность недостаточна, KP часто обладает техническими преимуществами перед K. Среди мер сложности, удовлетворяющих сильному варианту аксиоматики, существует также «самая богатая» $KM(f)=[\log_2 M(f/\max f(\omega))]$, где $M(f)$ — априорное математическое ожидание элементарной функции f (см. ([9])). Все остальные меры являются в некотором смысле ее частными случаями для разных классов элементарных функций.

Прежде чем перейти к общему изложению, рассмотрим предлагаемую конструкцию на примере, иллюстрирующем идею работы.

Условимся обозначать: N — натуральный ряд, $\bar{R}_+$ — множество неотрицательных действительных чисел, включая $+\infty$; T — множество функций типа $N\to\bar{R}_+$; $S\subset T$ — множество финитных функций, т. е. функций с рациональными значениями, равными 0 всюду, кроме непустого конечного множества. Функцию $f\in T$ будем называть перечислимой (снизу), если перечислимо множество пар (r, x) таких, что $r<f(x)$ (r — рациональное число). Рассмотрим функционал $N(f)=\sup(r\cdot d\{x\colon f(x)\geqslant r\})$, где $d(A)$ — мощность множества A.

Предложение 1. *Среди перечислимых функций f с $N(f)<\infty$ существует максимальная, с точностью до мультипликативной константы. Ее минус двоичный логарифм равен колмогоровской сложности $K(x)$ (см. ([1])) с точностью до аддитивной константы.*

Таким образом, мера сложности $K(x)$ естественным образом связана с функционалом N. Каждая из остальных перечисленных вначале мер сложности связана с некоторым своим функционалом, имеющим столь же простой вид. В силу простоты этих функционалов с ними часто работать удобнее, чем с самими мерами сложности (например, при изучении всяких соотношений между различными мерами сложности). В этом смысле предлагаемая конструкция дает удобный аппарат и при изучении конкретных мер сложности. Кроме того в тех изложениях, в которых желательно подчеркнуть аналитическую сторону дела, удобно утверждение предложения 1 принять за определение сложности, а его эквивалентность обычному определению рассматривать как теорему типа теорем кодирования в теории информации.

2. Теорема Колмогорова и общее понятие сложности. Для рассмотрения мер сложности различных конструктивных объектов достаточно ограничиться каким-нибудь стандартным типом таких объектов, например, натуральными числами. Мы так и сделаем, но иногда, допуская вольность речи, будем говорить о сложности слов, элементарных функций и пр., подразумевая номера этих объектов в естественной нумерации.

Определение. Монотонный функционал N: $T \to \bar{R}_+$, конечный и ненулевой на S, называется нормой, если выполняются следующие условия:

1) непрерывность: $N(f) = \sup N(g)$, $g \in S$, $g \leqslant f$;

2) вычислимость: существует алгоритм $A(g, n)$, вычисляющий $N(g)$ для $g \in S$ с точностью $1/n$;

3) однородность и выпуклость:

а) $N(\alpha f) = \alpha N(f)$ для действительного $\alpha \geqslant 0$,

б) $N(f+g) \leqslant N(f) + N(g)$.

Если вместо 3б) выполняется более слабое условие

3б′) квазивыпуклость:

$$N \max(f, g) \leqslant 2 \max(N(f), N(g)),$$

тогда N называется квазинормой * (это условие нужно для существования максимальной по порядку функции из теоремы Колмогорова). Очевидно, что функционал, рассмотренный в пункте 1, является квазинормой. Оказывается, что и любая другая квазинорма задает некоторую меру сложности: теорема Колмогорова об оптимальной сложности ([1]) обобщается на случай любой квазинормы.

Теорема 1 (Колмогорова об оптимальности). *Для произвольной квазинормы N существует максимальная с точностью до мультипликативной константы перечислимая функция f с $N(f) < \infty$.*

Функцию $[-\log_2 f(x)]$ мы будем называть мерой сложности, связанной с N, и обозначать $KN(x)$. Заметим, что логарифм и целая часть здесь берется без потери точности (так как $f(x)$ все равно задается неоднозначно с точностью до мультипликативной константы). В целочисленной же логарифмической шкале функция $KN(x)$ задается уже с точностью до аддитивной константы (т. е. до изменения на конечное ограниченное число делений шкалы). Таким образом, эта шкала является наиболее естественной для измерения сложности, поскольку в ней достигается наибольшая однозначность в задании $KN(x)$, возможная без потери точности. Кроме того эта шкала соответствует принятой в теории информации аддитивной шкале.

Соответствие между квазинормами и соответствующими мерами сложности взаимно однозначно, а именно справедлива

Теорема 2. *Меры сложности KN_1 и KN_2 совпадают с точностью до аддитивной константы тогда и только тогда, когда соответствующие квазинормы эквивалентны (с точностью до мультипликативной константы).*

Теорема 3. *Для всякой меры сложности $KN(x)$ существует максимальная с точностью до аддитивной константы вычислимая функция $g_N(x)$, меньшая $KN(x)$.*

Очевидно, что функция $KN'(x) = KN(x) - g_N(x)$ будет мерой сложности, связанной с квазинормой $N'(f) = N(f/2^{g_N})$, причем $g_{N'}(x)$ будет тождественно равна 0. Такие меры сложности и соответствующие им квазинормы мы будем называть приведенными. Приведенные меры сложности, построенные по квазинорме, являющейся нормой, будем называть регулярными. Все нетривиальные приведенные меры сложности невычислимы, поскольку любая мажорируемая ими вычислимая функция ограничена константой. Неприведенные же сложностные меры отличаются от приве-

---

* Всякая квазинорма не более чем в два раза отличается от некоторой другой квазинормы, удовлетворяющей условию 3б) для всех f, g таких, что $\min(f, g) = 0$.

денных сдвигом на произвольную вычислимую функцию и, следовательно, их можно исключить из рассмотрения, не ограничивая общности.

Обычно сложностные меры строились по следующей схеме. Вначале задавалось семейство L перечислимых (сверху) функций, характеризующих сложность, относительно частных способов задания объектов (например, в работе [1] это семейство сложностей $K_A(x)$ относительно всех алгоритмов A) и затем доказывалась теорема о существовании в этом семействе оптимальной функции. С каждым таким семейством естественно связать функционал $\Phi(f)=\inf\{r\colon [-\log_2(f/r)]\in L\}$, где f — перечислима снизу. Непрерывность, вычислимость и квазивыпуклость этого функционала являются тремя аксиомами, которым должно удовлетворять семейство, чтобы вписываться в нашу общую конструкцию. Эти аксиомы можно было бы, конечно, сформулировать и в терминах самого семейства L.

3. Две конкретные меры сложности. Приведем теорему, которая выделит из всех мыслимых мер сложности одну, играющую особую роль. Знаки $\preccurlyeq$, $\succcurlyeq$ и $\asymp$ обозначают неравенства и эквивалентности с точностью до аддитивной константы.

Теорема 4. *Среди всех возможных приведенных мер сложности существует максимальная KP с точностью до аддитивной константы. Она будет регулярной. Имеют место неравенства*

$$K(x)\preccurlyeq KP(x)\preccurlyeq K(x)+2\log_2 K(x).$$

Эта мера (назовем ее абсолютной сложностью) заслуживает специального рассмотрения. Алгоритм A назовем префиксиным, если для любых двоичных слов p_1, p_2 таких, что $A(p_1)$ определено и p_1 является началом p_2, имеет место $A(p_2)=A(p_1)$. Такие алгоритмы естественно интерпретировать как машины, которые не могут пользоваться специальным знаком о конце программы. Информацию о том, где программа кончается, нужно кодировать двоичными знаками самой программы (на что расходуется дополнительная длина). Относительно таких префиксных алгоритмов A можно рассмотреть сложность, как в [1]. Среди них тоже есть оптимальный алгоритм, сложность по которому (с точностью до аддитивной константы) меньше, чем по любому другому префиксному алгоритму; эта сложность и есть KP.

Функция $K(x)$ меньше, чем $KP(x)$, поскольку при определении $K(x)$ мы не учитываем информацию о конце программы. Возникает опасение, что при определении $KP(x)$ мы тоже могли не учесть какой-то информации и «истинная сложность» должна быть еще больше. Однако эту опасность исключает теорема 4. Норма P, связанная со сложностью KP, имеет вид $P(f)=\sum f(x)$. Таким образом, $\sum 2^{-KP(x)}<1$. Иными словами, KP есть минус логарифм максимального по порядку перечислимого снизу распределения вероятностей на множестве натуральных чисел. Это распределение (его можно называть априорным) имеет интересные применения в теории вероятностей. Многие уравнения и неравенства выполняются для KP более точно, чем для K. В частности, пусть $\varphi(x, y)$ — вычислимая функция (например, нумерация пар чисел). Тогда $KP(\varphi(x, y))\preccurlyeq KP(x)+KP(y)$.

Можно выразить функцию K через KP, а именно: K — это единственная с точностью до аддитивной константы функция, удовлетворяющая уравнению $KP(x|K(x))\asymp K(x)$ (условная сложность $KP(x|y)$ определяется естественно по аналогии с $K(x|y)$).

В заключение приведем теорему о существовании «самой богатой» — регулярной меры сложности. В [9] рассматривалась функция $KM(f)=[-\log_2 M(f/\sup f(\omega))]$, где M — априорное математическое ожидание элементарной функции f (непрерывной кусочно-постоянной функции с рациональными значениями на пространстве бесконечных двоичных последовательностей).

Теорема 5. *KM — регулярная мера сложности, причем для произвольной регулярной меры сложности KN существует вычислимая нумерация $x\to f_x$ такая, что $KN(x)\asymp KM(f_x)$.*

В [9], теорема 3с, эта теорема была проиллюстрирована для случая $KN=KP$ ($x \to f_x$ — произвольное вычислимое отображение с непересекающими носителями f_x для разных x). Функция $KM(f)$ для случая, когда f — характеристические функции интервалов, рассматривалась также в [7] и в [3] (с обозначением $[-\log_2 R(\Gamma_x)]$). Функция KP использовалась в [4, 6, 8]. В [4] содержатся утверждения теорем 1, 3, 4 (в несколько иной терминологии). Интересные сведения о мерах сложности KP и KM содержатся в работах [6, 10].

Автор пользуется случаем выразить благодарность А. С. Немировскому за многочисленные консультации при работе над данной статьей.

Поступило
7 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Н. Колмогоров,* Проблемы передачи информации, т. 1, № 1, 3 (1965). [2] *P. Martin-Löf,* Information and Control, v. 9, 602 (1966). [3] *А. К. Звонкин, Л. А. Левин,* УМН, т. 25, в. 6 (1970). [4] *Л. А. Левин,* Некоторые теоремы об алгоритмическом подходе к теории вероятностей и теории информации. Диссертация, Автореф., Новосибирск, 1971. [5] *D. W. Loveland,* Information and Control, v. 15, 510 (1969). [6] *П. Гач,* ДАН, т. 218, № 6 (1974). [7] *Л. А. Левин,* ДАН, т. 212, № 3 (1973). [8] *Л. А. Левин,* Проблемы передачи информации, т. 10, № 3 (1974). [9] *Л. А. Левин,* ДАН, т. 227, № 1 (1976). [10] *C. P. Schnorr,* Zufälligkeit und Wahrscheinlichkeit, Lecture Notes in Mathematics, v. 218, Berlin — Heidelberg — N. Y., 1971.