Алгебра и логика, 23, № 6 (1984), 721-729

УДК 512

О ПРОИЗВЕДЕНИИ ФОРМАЦИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Л. А. ШЕМЕТКОВ

Светлой памяти
Анатолия Ивановича Мальцева
посвящается

В работе [1] А. И. Мальцев ввел определение произведения классов алгебраических систем, имеющее большое значение для теории многообразий. Но применение этого определения в теории формаций ограничено (нетрудно, например, указать пример, когда произведение в смысле [1] двух формаций групп не является формацией). Главной причиной, почему понятие произведения из [1] не может в полной мере использоваться в теории формаций, состоит в том, что формация в отличие от многообразия не всегда является наследственным классом.

В настоящей работе дается модификация мальцевского умножения [1], использующая понятие реплики. В случае, когда рассматриваются формации групп, наше определение совпадает с хорошо известным понятием произведения формаций групп [2]. В настоящей работе вводится также понятие формации алгебраических систем и изучаются случаи, когда произведение формаций является формацией. Используется терминология книги [3]. Все рассматриваемые алгебраические системы имеют одну и ту же сигнатуру . Напомним, что совокупность $\mathfrak{K}$ алгебраических систем называется классом, если с каждой своей системой $\mathfrak{K}$ содержит и все ей изоморфные; системы из $\mathfrak{K}$ называются $\mathfrak{K}$-системами.

1. <u>Репличное умножение классов.</u> Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторый класс ал-

гебраических систем. Следуя [1], систему $A_1 \in \mathfrak{F}$ назовем $\mathfrak{F}$-репликой системы A, если существует эпиморфизм $\alpha : A \to A_1$ и для каждого эпиморфизма γ системы A на произвольную $\mathfrak{F}$-систему B найдется такой эпиморфизм ξ системы A_1 на B, что $\gamma = \alpha\xi$. Эпиморфизм α называется $\mathfrak{F}$-морфизмом системы A.

Заметим, что в книге [3] дается другое определение реплики; отличие состоит в том, что там в качестве γ берется не эпиморфизм, а гомоморфизм, что диктуется необходимостью рассмотрения наследственных классов.

Если система A имеет $\mathfrak{F}$-реплику, то эта реплика определена однозначно с точностью до изоморфизма (см. [3, с. 290-291]).

Дадим теперь наше основное

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\mathfrak{K}$ – некоторый непустой класс алгебраических систем, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ – некоторые его подклассы. Обозначим через $\mathfrak{H} \cdot_{\mathfrak{K}} \mathfrak{F}$ совокупность всех тех $\mathfrak{K}$-систем A, которые удовлетворяют следующему условию: существует $\mathfrak{F}$-морфизм $\alpha : A \longrightarrow A_1$, ядерная конгруэнция θ которого такова, что все смежные классы $a\theta$ $(a \in A)$, являющиеся $\mathfrak{K}$-подсистемами системы A, принадлежат $\mathfrak{H}$. Назовем $\mathfrak{H} \cdot_{\mathfrak{K}} \mathfrak{F}$ репличным $\mathfrak{K}$-произведением классов $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ (или, иначе, репличным произведением $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ в классе $\mathfrak{K}$).

Понятно, что $\mathfrak{H} \cdot_{\mathfrak{K}} \mathfrak{F}$ является классом. Если никакая $\mathfrak{K}$-система не имеет $\mathfrak{F}$-морфизмов, то класс $\mathfrak{H} \cdot_{\mathfrak{K}} \mathfrak{F}$ пуст. Может случиться так, что $\mathfrak{K}$-система A имеет $\mathfrak{F}$-морфизм α с ядерной конгруэнцией θ, но ни один смежный класс $a\theta$ не является $\mathfrak{K}$-системой; в этом случае, по определению, A входит в $\mathfrak{H} \cdot_{\mathfrak{K}} \mathfrak{F}$. Так же, как и для мальцевского умножения [1], из определения 1 непосредственно вытекает ряд следствий.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\mathfrak{H}_1$ – подкласс из $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{H}_1 \cdot_{\mathfrak{K}} \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \cdot_{\mathfrak{K}} \mathfrak{F}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\mathfrak{L}$ – подкласс из $\mathfrak{K}$, причем $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{L}$, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{L}$. Тогда

$$\mathfrak{H} \cdot_{\mathfrak{L}} \mathfrak{F} \supseteq (\mathfrak{H} \cdot_{\mathfrak{K}} \mathfrak{F}) \cap \mathfrak{L}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\mathfrak{L}$ – подкласс из $\mathfrak{K}$, являющийся наследственным в $\mathfrak{K}$, причем $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{L}$, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{L}$. Тогда $\mathfrak{H} \cdot_{\mathfrak{L}} \mathfrak{F} = (\mathfrak{H} \cdot_{\mathfrak{K}} \mathfrak{F}) \cap \mathfrak{L}$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если класс $\mathfrak{F}$ непуст и состоит из единичных систем, то $\mathfrak{Y}\cdot_{\mathfrak{K}}\mathfrak{F}=\mathfrak{Y}$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если класс $\mathfrak{Y}$ непуст и состоит из всех одноэлементных $\mathfrak{K}$-систем, то $\mathfrak{Y}\cdot_{\mathfrak{K}}\mathfrak{F}\supseteq\mathfrak{F}$.

Установим теперь связь репличного умножения классов с мальцевским умножением [1]. Напомним, что $\mathfrak{Y}\circ_{\mathfrak{K}}\mathfrak{F}$ – это класс всех тех $\mathfrak{K}$-систем A, которые удовлетворяют условию: существует эпиморфизм $\alpha: A\rightarrow A_1\in\mathfrak{F}$, ядерная конгруэнция θ такова, что все смежные классы $a\theta$ $(a\in A)$, являющиеся $\mathfrak{K}$-подсистемами системы A, принадлежат $\mathfrak{Y}$.

СЛЕДСТВИЕ 6. $\mathfrak{Y}\cdot_{\mathfrak{K}}\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{Y}\circ_{\mathfrak{K}}\mathfrak{F}$.

СЛЕДСТВИЕ 7. Если $\mathfrak{K}$ – наследственный класс, его подкласс $\mathfrak{Y}$ является наследственным в $\mathfrak{K}$ и каждая $\mathfrak{K}$-система имеет $\mathfrak{F}$-реплику, то $\mathfrak{Y}\cdot_{\mathfrak{K}}\mathfrak{F}=\mathfrak{Y}\circ_{\mathfrak{K}}\mathfrak{F}$.

Ввиду следствия 6, надо лишь проверить включение $\mathfrak{Y}\cdot_{\mathfrak{K}}\mathfrak{F}\supseteq\mathfrak{Y}\circ_{\mathfrak{K}}\mathfrak{F}$. Пусть имеется эпиморфизм α $\mathfrak{Y}\circ_{\mathfrak{K}}\mathfrak{F}$-системы A на $\mathfrak{F}$-систему A_1. Пусть τ – ядерная конгруэнция этого эпиморфизма, причем $a\tau\in\mathfrak{K}$ влечет $a\tau\in\mathfrak{Y}$. И пусть $\beta: A\rightarrow A_2$ есть $\mathfrak{F}$-морфизм системы A с ядерной конгруэнцией θ. Тогда, по определению реплики, существует такой эпиморфизм $\gamma: A_2\rightarrow A_1$, что $\beta\gamma=\alpha$. Если $a\theta=a_1\theta$ $(a,a_1\in A)$, то $a\beta\gamma=a_1\beta\gamma=a\alpha=a_1\alpha$. Значит, $a\tau=a_1\tau$. Таким образом, $\tau\supseteq\theta$. Если $a\theta$ есть $\mathfrak{K}$-подсистема системы A, то ввиду $a\tau\supseteq a\theta$ смежный класс $a\tau$ также является $\mathfrak{K}$-подсистемой системы A (этот факт отмечен в п. 1 статьи [1]). Так как $A\in\mathfrak{Y}\circ_{\mathfrak{K}}\mathfrak{F}$, то $a\tau\in\mathfrak{Y}$, а так как по условию класс $\mathfrak{Y}$ является наследственным в $\mathfrak{K}$, то $a\theta\in\mathfrak{Y}$, что и требовалось.

2. <u>Формации.</u> Понятие формации групп ввел в 1963 году В. Гашюц, разрабатывая общие методы отыскания подгрупп в конечных разрешимых группах. В дальнейшем это понятие с успехом использовалось многими авторами при

изучении групп и алгебр Ли. В этом пункте мы дадим общее определение формации алгебраических систем. Вначале напомним определение подпрямого произведения.

Пусть дано некоторое множество алгебраических систем $\{M_i \mid i \in I\}$. Рассмотрим их декартово произведение $\mathbb{D} = \prod M_i$ и проектирования $\pi_i : \mathbb{D} \to M_i$. Подсистему H из $\mathbb{D}$ называют подпрямым произведением систем M_i, если $H^{\pi_i} = M_i$ для любого i; о всякой системе, изоморфной H, говорят, что она разлагается в подпрямое произведение систем M_i. Если множество I конечно, то говорят о конечном подпрямом произведении.

К понятию подпрямого произведения приводит также следующая хорошо известная конструкция. Пусть даны гомоморфизмы δ_i некоторой алгебраической системы M в M_i. Тогда (см. [3, с. 73]) существует гомоморфизм $\delta : M \to \mathbb{D} = \prod M_i$, удовлетворяющий для каждого i равенству $\delta_i = \delta\pi_i$. Функция δ строится следующим образом: если $m \in M$, то $(m\delta)(i) = m\delta_i$. Если все δ_i –эпиморфизмы, а δ оказывается мономорфизмом (т. е. δ есть изоморфизм M на M^δ), то M удовлетворяет условию разложимости в подпрямое произведение систем M_i.

Пусть $\mathfrak{K}$ – некоторый класс алгебраических систем. Обозначим через $R_0\mathfrak{K}$ класс всех систем, разложимых в конечные подпрямые произведения $\mathfrak{K}$ –систем. Через $H\mathfrak{K}$ обозначается класс всех гомоморфных образов $\mathfrak{K}$ –систем. Класс $\mathfrak{K}$ называют R_0 –замкнутым (H –замкнутым), если $R_0\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}$ (соответственно $H\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Класс алгебраических систем $\mathfrak{F}$ называется формацией, если $\mathfrak{F}$ одновременно R_0 –замкнут и H –замкнут.

Пустое множество, по определению, является формацией. Непустая формация всегда содержит единичную систему. Заметим также, что любое многообразие алгебраических систем является формацией, но существуют формации, не являющиеся многообразиями (например, формация конечномерных алгебр Ли).

В теории формаций групп, как известно, центральное место занимает понятие $\mathfrak{F}$ –корадикала, которое служит основой для почти всех построений. Следующая теорема, оправдывая понятие формации, показывает, что существование корадикалов (или реплик) неизбежно приводит к формации.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{F}$ - непустой H - замкнутый подкласс некоторой формации $\mathfrak{M}$. Если каждая $\mathfrak{M}$ - система имеет $\mathcal{F}$ - реплику, то $\mathcal{F}$ является формацией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что класс $\mathcal{F}$ R_0-замкнут. Пусть $\mathbb{H}$ - подпрямое произведение из $\mathbb{D}=\Pi_{i=1}^{n}\mathbb{M}_i$, где все $\mathbb{M}_i$ принадлежат $\mathcal{F}$. Пусть π_i - проектирование $\mathbb{D}$ на $\mathbb{M}_i$. Так как $\mathfrak{M}$ - формация, то $\mathbb{H}\in\mathfrak{M}$ и, значит, по условию для $\mathbb{H}$ существует $\mathcal{F}$-морфизм $\alpha:\mathbb{H}\to\mathbb{M}\in\mathcal{F}$. Так как $\mathbb{M}_i\in\mathcal{F}$ и $\mathbb{H}^{\pi_i}=\mathbb{M}_i$, то, по определению реплики, для каждого i существует такой эпиморфизм δ_i: $\mathbb{M}\to\mathbb{M}_i$, что $\pi_i=\alpha\delta_i$. Тогда, как отмечалось в начале данного пункта, существует гомоморфизм $\delta:\mathbb{M}\to\mathbb{D}$, удовлетворяющий для каждого i равенству $\delta_i=\delta\pi_i$. Таким образом, мы приходим к равенству $\pi_i=\alpha\delta\pi_i$, т. е. для любого $h\in\mathbb{H}$ имеет место $h\pi_i=h(\alpha\delta)\pi_i$. Так как последнее равенство выполняется для любого i, а элементы h и $h(\alpha\delta)$ принадлежат прямому произведению $\mathbb{D}$, то $h=h(\alpha\delta)$, т. е. отображение $\alpha\delta:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ является тождественным. Отсюда следует, что α - изоморфизм системы $\mathbb{H}$ на систему $\mathbb{M}\in\mathcal{F}$.

Теорема доказана.

3. Мальцевские формации. Приведем введенное в [1] понятие поляризованного класса. Полярной операцией на алгебре $\mathbb{A}=\langle A,\Omega\rangle$ называется термальная унарная операция $e(x)$, все значения которой одинаковы (т. е. $e(x)=e(y)=e$ для любых $x,y\in A$), причем для любой операции $F\in\Omega$ имеет место $F(e,\ldots,e)=e$; указанный элемент e называется полюсом алгебры $\mathbb{A}$. Полярой класса алгебр $\mathfrak{K}$ называется унарный терм, представляющий в каждой $\mathfrak{K}$-алгебре полярную операцию. Класс алгебр $\mathfrak{K}$ называется поляризованным, если он обладает хотя бы одной полярой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Непустую формацию алгебр $\mathfrak{K}$ назовем мальцевской, если она поляризована и на всех $\mathfrak{K}$-алгебрах конгруэнции перестановочны.

Сделаем некоторые очевидные замечания (см. [1]). Пусть $\mathfrak{K}$ - мальцевская формация алгебр. Так как класс $\mathfrak{K}$ H-замкнут, то он содержит единичную алгебру $\mathbb{E}$. Отсюда следует, что каждая $\mathfrak{K}$-алгебра $\mathbb{A}$

обладает единственным полюсом e_A, образующим ее единичную подалгебру. Если θ – некоторая конгруэнция на $A \in \mathfrak{K}$, то смежный класс $e_A\theta$ является подалгеброй алгебры A; если к тому же $e_A\theta \in \mathfrak{K}$, то из смежных классов A/θ класс $e_A\theta$ и только он один является $\mathfrak{K}$-подалгеброй алгебры A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс алгебр. Если алгебра A имеет $\mathfrak{F}$-морфизм, то его ядерную конгруэнцию будем называть $\mathfrak{F}$-корадикальной конгруэнцией.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс алгебр. Следующие утверждения относительно алгебры A и ее конгруэнции θ равносильны:

1) θ – $\mathfrak{F}$-корадикальная конгруэнция на A;

2) $A/\theta \in \mathfrak{F}$ и для любой фактор-алгебры A/τ из $A/\tau \in \mathfrak{F}$ вытекает $\tau \supseteq \theta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть θ и τ – ядерные конгруэнции эпиморфизмов α и β алгебры A. Для простоты будем считать, что α и β – канонические гомоморфизмы алгебры A на A/θ и A/τ. Если α – $\mathfrak{F}$-морфизм и $A/\tau \in \mathfrak{F}$, то существует эпиморфизм $\gamma : A/\theta \to A/\tau$ такой, что $\beta = \alpha\gamma$. Значит, $(a\theta)\gamma = a\tau$, $a \in A$. Отсюда следует, что $a\theta \subseteq a\tau$, т. е. $\theta \subseteq \tau$. Если дано 2), то отображение $a\theta \to a\tau$ есть эпиморфизм A/θ на A/τ, так что A/θ оказывается $\mathfrak{F}$-репликой алгебры A.

В дополнение к лемме 1 заметим, что если $\mathfrak{F}$ – непустая формация и алгебра A обладает $\mathfrak{F}$-морфизмом, то на A существует единственная $\mathfrak{F}$-корадикальная конгруэнция, которую мы будем обозначать через $A^{\mathfrak{F}}$. Единственность $A^{\mathfrak{F}}$ вытекает из того, что формация $\mathfrak{F}$ R_0-замкнута, а $A/\sigma \cap \theta$ разлагается в подпрямое произведение алгебр A/σ и A/θ.

Напомним, что через $\sigma \vee \tau$ обозначают наименьшую конгруэнцию, содержащую конгруэнции σ и τ.

ЛЕММА 2. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой H-замкнутый класс алгебр. Если на алгебре A существует $\mathfrak{F}$-корадикальная конгруэнция θ, то для любой конгруэнции τ на A справедливо утверждение: $\theta\vee\tau/\tau$ – $\mathfrak{F}$-корадикальная конгруэнция на $\mathbb{A}/\tau$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя то, что $\mathbb{A}/\theta\in\mathfrak{F}$ и класс $\mathfrak{F}$ H-замкнут, получаем:

$$\mathbb{A}/\tau/\theta\vee\tau/\tau\simeq\mathbb{A}/\theta\vee\tau\simeq\mathbb{A}/\theta/\theta\vee\tau/\theta\in\mathfrak{F}.$$

Пусть теперь η/τ – такая конгруэнция на $\mathbb{A}/\tau$, что

$$\mathbb{A}/\tau/\eta/\tau\simeq\mathbb{A}/\eta\in\mathfrak{F}.$$

По лемме 1, $\eta\supseteq\theta$ и, таким образом, $\eta/\tau\supseteq\theta\vee\tau/\tau$. Из леммы 1 теперь следует, что $\theta\vee\tau/\tau$ – $\mathfrak{F}$-корадикальная конгруэнция на $\mathbb{A}/\tau$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathfrak{K}$ – наследственная мальцевская формация алгебр. Тогда репличное $\mathfrak{K}$-произведение любых двух H-замкнутых подклассов $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ из $\mathfrak{K}$ является H-замкнутым классом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{A}$ – любая алгебра из $\mathfrak{M}=\mathfrak{H}\cdot_{\mathfrak{K}}\mathfrak{F}$, e – полюс $\mathbb{A}$. На алгебре $\mathbb{A}$ существует $\mathfrak{F}$-корадикальная конгруэнция θ, причем смежный класс $e\theta$ является $\mathfrak{H}$-подалгеброй алгебры $\mathbb{A}$.

Рассмотрим произвольную фактор-алгебру $\mathbb{A}/\tau$. Ввиду леммы 2, $\theta\tau/\tau$ есть $\mathfrak{F}$-корадикальная конгруэнция на $\mathbb{A}/\tau$.

Учитывая то, что $e\theta\in\mathfrak{H}$ и класс $\mathfrak{H}$ H-замкнут, получаем:

$$e\theta\tau/\tau\simeq e\theta/\theta\cap\tau\in\mathfrak{H}.$$

Таким образом, класс $\mathfrak{M}$ H-замкнут.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ – подформации наследственной мальцевской формации $\mathfrak{K}$, причем каждая $\mathfrak{X}$-алгебра имеет $\mathfrak{F}$-реплику. Тогда $(\mathfrak{H}\cdot_{\mathfrak{K}}\mathfrak{F})\cap\mathfrak{X}$ является формацией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду теоремы 2, достаточно установить, что класс $\mathfrak{M}=(\mathfrak{H}\cdot_{\mathfrak{K}}\mathfrak{F})\cap\mathfrak{X}$ является R_0-замкнутым. Пусть на алгебре

$\mathfrak{M}$ имеются такие конгруэнции σ_1 и σ_2, что $\mathfrak{M}/\sigma_i \in \mathfrak{M}$ $(i=1,2)$. Нам нужно доказать, что $\mathfrak{M}/\sigma_1 \cap \sigma_2 \in \mathfrak{M}$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\sigma_1 \cap \sigma_2$ – нулевая конгруэнция. Ясно, что $\mathfrak{M} \in \mathfrak{X}$. По условию алгебры $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}/\sigma_1$ и $\mathfrak{M}/\sigma_2$ имеют $\mathfrak{F}$-реплики.

Пусть e – полюс алгебры $\mathfrak{M}$. Ввиду леммы 2, $\mathfrak{M}^{\mathfrak{F}}\sigma_i/\sigma_i$ – $\mathfrak{F}$-корадикальная конгруэнция алгебры $\mathfrak{M}/\sigma_i$. Поскольку $\mathfrak{M}/\sigma_i \in \mathfrak{H} \cdot_{\mathfrak{K}} \mathfrak{F}$, то $e\mathfrak{M}^{\mathfrak{F}}\sigma_i/\sigma_i \in \mathfrak{H}$. Отсюда получаем:

$$e\mathfrak{M}^{\mathfrak{F}}\sigma_i/\sigma_i \simeq e\mathfrak{M}^{\mathfrak{F}}/\mathfrak{M}^{\mathfrak{F}} \cap \sigma_i \in \mathfrak{H},\ e\mathfrak{M}^{\mathfrak{F}}/\mathfrak{M}^{\mathfrak{F}} \cap \sigma_1 \cap \sigma_2 \simeq e\mathfrak{M}^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}.$$

Таким образом, $\mathfrak{M} \in \mathfrak{H} \cdot_{\mathfrak{K}} \mathfrak{F}$, и теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. 1. *Пусть $\mathfrak{K}$ – наследственная мальцевская формация алгебр, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ – ее подформации. Если каждая $\mathfrak{K}$ – алгебра имеет $\mathfrak{F}$ – реплику, то класс $\mathfrak{H} \cdot_{\mathfrak{K}} \mathfrak{F}$ является формацией.*

СЛЕДСТВИЕ 3. 2. *Пусть $\mathfrak{K}$ – наследственная мальцевская формация алгебр, $\mathfrak{X}$ – совокупность всех конечных $\mathfrak{K}$ – алгебр. Тогда для любых подформаций $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ из $\mathfrak{K}$ класс $(\mathfrak{H} \cdot_{\mathfrak{K}} \mathfrak{F}) \cap \mathfrak{X}$ является формацией.*

4. Открытые вопросы. Остановимся кратко на некоторых дальнейших возможных путях исследования мальцевских формаций алгебр.

Общее направление исследований состоит в изучении формаций, у которых выделенная система подформаций удовлетворяет определенным требованиям. Естественно также выделять и изучать подформации заданной формации.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторая совокупность алгебр, $\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ – пересечение всех формаций, содержащих $\mathfrak{X}$. Класс $\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ называется формацией, порожденной $\mathfrak{X}$. Можно доказать, что $\mathrm{form}\,\mathfrak{X} = HR_0\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X}$ состоит лишь из одной алгебры A, то формацию $\mathrm{form}\,A$ назовем однопорожденной.

Введем операцию $\vee$ объединения формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ следующим образом: $\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2 = \mathrm{form}\,(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$. Всякую совокупность формаций, замкнутую относительно операций пересечения $\cap$ и объединения $\vee$, назовем решеткой формаций. В частности, совокупность $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ всех подформаций фиксированной формации $\mathcal{F}$ является решеткой. Перспективное направление состоит в нахождении формаций $\mathcal{F}$, для которых $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ удовлетворяет определенным требованиям (например, дистрибутивна).

Зафиксируем теперь наследственную мальцевскую формацию конечных алгебр $\mathfrak{K}$. Будем рассматривать в дальнейшем только алгебры из $\mathfrak{K}$; в частности, под формацией мы будем понимать $\mathfrak{K}$-формацию. Вместо $\mathfrak{H} \circ_{\mathfrak{K}} \mathcal{F}$ будем употреблять упрощенную запись $\mathfrak{H}\mathcal{F}$ и говорить о произведении $\mathfrak{H}$ и $\mathcal{F}$. По теореме 3, произведение любых двух формаций является формацией.

Первый вопрос, на который мы хотели обратить внимание, состоит в нахождении всех таких формаций $\mathfrak{H}$ и $\mathcal{F}$, для которых произведение $\mathfrak{H}\mathcal{F}$ является однопорожденной формацией. В классе конечных групп этот вопрос решен [4]; можно исследовать данный вопрос и для других типов алгебр.

Интерес представляет изучение формаций, неразложимых нетривиальным образом в произведение своих двух подформаций.

Ряд вопросов встает в связи с изучением решетки подформаций однопорожденной формации. Конечна или нет решетка подформаций однопорожденной формации? Для случая конечных групп этот вопрос известен под названием проблемы Гашюца (см. [2, проблема 2]).

Весьма сложным представляется вопрос изучения не однопорожденных формаций, у которых все нетривиальные подформации являются однопорожденными. Этот вопрос не исследован и в классе конечных групп.

Литература

1. А. И. МАЛЬЦЕВ, Об умножении классов алгебраических систем, Сиб. матем. ж., 8, № 2 (1967), 346–365.

2. Л. А. ШЕМЕТКОВ, Формации конечных групп, М., Наука, 1978.

3. А. И. МАЛЬЦЕВ, Алгебраические системы, М., Наука, 1970.

4. А. Н. СКИБА, О произведении формаций, Алгебра и логика, 22, № 5 (1983), 574–583.

Поступило 8 октября 1984 г.