

*Д. В. Беклемишев*

## О ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

### ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 1. Основные определения . . . . .	174
§ 2. Суммы линейных систем квадратичных форм . . . . .	177
§ 3. $D$ -множества и $J$ -множества . . . . .	182
§ 4. Координатная запись . . . . .	185
§ 5. Критерий разложимости в прямую сумму . . . . .	188
§ 6. Одна теорема о сингулярных линейных системах квадратичных форм . . . . .	190
Цитированная литература . . . . .	191

Во многих задачах дифференциальной геометрии, связанных с погруженными многообразиями, возникает необходимость исследования алгебраического строения геометрических объектов вида

$$\Delta_{i_1 \dots i_p}^\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, \sigma; i = 1, \dots, n)$$

(см. [3]). Простейший из этих объектов — связующий тензор  $\Delta_{ij}^\alpha$ , симметричный по нижним индексам, можно интерпретировать как линейную систему квадратичных форм. О линейных системах квадратичных форм при  $\sigma$ , большем двух, известно очень немного. В [2] автор получил их классификацию для всех  $\sigma$  при  $n=3$ . В случае произвольных  $n$  и  $\sigma$  подобная классификация не только представляла бы самостоятельный интерес, но и была бы очень полезна для дифференциальной геометрии, однако пока приходится ограничиваться частными результатами.

В настоящей работе, помимо некоторых общих теорем, для довольно широкого класса линейных систем квадратичных

форм получено необходимое и достаточное условие, при котором все формы приводятся к клеточно диагональному виду в одном и том же базисе, причем дается способ нахождения такого базиса.

## § 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассматриваются два комплексных линейных пространства  $L_n$  и  $M_\sigma$  (размерностей  $n$  и  $\sigma$ ). Через  $L_{(n) \otimes L_n}$  мы обозначим симметричную часть тензорного произведения пространства  $L_n$  на него же.

Определение. Линейной системой квадратичных форм (л. с. к. ф.) мы будем называть гомоморфизм

$$\Lambda : L_{(n) \otimes L_n} \rightarrow M_\sigma.$$

Ядро этого гомоморфизма Кег  $\Lambda$  обозначим через  $V$ , область значений  $\text{Im } \Lambda$  — через  $M$ . Размерность пространства  $M$  назовем размерностью (или числом существенных образующих) л. с. к. ф.  $\Lambda$  и обозначим через  $d$ . Разумеется

$$\dim V + d = \dim L_{(n) \otimes L_n} = n(n+1)/2.$$

Линейная система квадратичных форм  $\Lambda$  определяет квадратичное отображение  $\mathbb{L} : L_n \rightarrow M_\sigma$  по формуле

$$\mathbb{L}(x) = \Lambda(x \otimes x); \quad \forall x \in L_n.$$

Обратно, по отображению  $\mathbb{L}$  можно найти  $\Lambda$ . Действительно, для любых  $x$  и  $y$  из  $L_n$  мы имеем

$$\mathbb{L}(x+y) = \Lambda(x+y \otimes x+y) = \mathbb{L}(x) + 2\Lambda(x \cdot y) + \mathbb{L}(y).$$

Здесь и всюду в дальнейшем выражение вида  $\frac{1}{2}(x \otimes y + y \otimes x)$  обозначается через  $x \cdot y$ . Любой тензор  $a \in L_{(n) \otimes L_n}$  есть линейная комбинация тензоров  $e_i \cdot e_j$ , где  $e_i$  — какой-нибудь базис в  $L_n$ . Поэтому

$$\Lambda(a) = a^{ij} \Lambda(e_i \cdot e_j) = \frac{1}{2} a^{ij} [\mathbb{L}(e_i + e_j) - \mathbb{L}(e_i) - \mathbb{L}(e_j)].$$

Первое из равенств в этой формуле показывает, что  $\Lambda$  достаточно определить на тензорах вида  $x \cdot y$ , а на все  $L_{(n) \otimes L_n}$  можно распространить по линейности.

Одновременно мы получили, что линейная оболочка области значений  $\mathbb{L}$  совпадает с  $M$ .

Помимо квадратичного отображения, с  $\Lambda$  связаны три гомоморфизма. Прежде чем их определить, условимся, что

звездочка около буквы, обозначающей пространство, означает переход к сопряженному пространству. Заметим, что всегда  $(L \otimes L')^* = L^* \otimes L'^*$ . Итак, по линейной системе квадратичных форм  $\Lambda$  определяются и в свою очередь определяют ее следующие гомоморфизмы:

1. Сопряженный гомоморфизм  $\Lambda^*: M_\sigma \rightarrow L_{(n)}^* \otimes L_n^*$ . Напомним его определение. Вектор  $\rho \in M_\sigma^*$  можно рассматривать как линейное отображение  $M_\sigma$  в поле комплексных чисел  $\mathbb{C}$ . Суперпозиция  $\rho \circ \Lambda$  есть линейное отображение  $L_{(n)} \otimes L_n$  в  $\mathbb{C}$ , т. е. элемент  $L_{(n)}^* \otimes L_n^*$ . Этот элемент мы назовем значением гомоморфизма  $\Lambda^*$  на векторе  $\rho$ , т. е.  $\Lambda^*(\rho) = \rho \circ \Lambda$  или, несколько более подробно,

$$\Lambda^*(\rho)(a) = \Lambda(a)(\rho), \quad \forall a \in L_{(n)} \otimes L_n, \quad \rho \in M_\sigma^*.$$

Известно, что  $\text{Ker } \Lambda^*$  есть ортогональное дополнение  $M^\perp$  пространства  $M$ .  $\text{Im } \Lambda^* = V^\perp$  мы обозначим через  $Q$ . Это  $d$ -мерное подпространство в пространстве  $L_{(n)}^* \otimes L_n^*$  (последнее можно отождествить с совокупностью всех квадратичных форм на  $L_n$ ).

Число  $\max_{\varphi \in Q} \text{Rg } \varphi$  мы назовем рангом л. с. к. ф.  $\Lambda$  и обозначим через  $r$ . Если  $r < n$ , то л. с. к. ф. называется сингулярной.  $\min_{\varphi \in Q \setminus 0} \text{Rg } \varphi$  также является существенной характеристикой л. с. к. ф., но мы не будем ее использовать.

2. Введем определение гомоморфизма  $\Gamma: M_\sigma^* \otimes L_n \rightarrow L_n^*$  так: образ  $\Gamma(\rho \otimes x)$  элемента вида  $\rho \otimes x$  ( $\rho \in M_\sigma^*$ ,  $x \in L_n$ ) есть линейная функция на  $L_n$  такая, что ее значение на произвольном векторе  $y \in L_n$  равно значению  $\Lambda(x \cdot y)$  на  $\rho$ , т. е.

$$\Gamma(\rho \otimes x)(y) = \Lambda(x \cdot y)(\rho), \quad \forall x, y, \rho.$$

На все остальные элементы пространства  $M_\sigma^* \otimes L_n$  так определенный гомоморфизм  $\Gamma$  продолжается по линейности.

3. Гомоморфизм  $\Gamma^*: L_n \rightarrow M_\sigma \otimes L_n^*$ , сопряженный  $\Gamma$ , определяемый равенством

$$\Gamma^*(x)(\rho) = \Gamma(\rho)(x), \quad \forall x \in L_n, \quad \rho \in M_\sigma^* \otimes L_n.$$

Гомоморфизмы  $\Gamma$  и  $\Gamma^*$  определяют следующие подпространства

$$\text{Ker } \Gamma \subseteq M_\sigma^* \otimes L_n, \quad I = \text{Im } \Gamma \subseteq L_n^*,$$

$$J = \text{Ker } \Gamma^* \subseteq L_n, \quad \text{Im } \Gamma^* \subseteq M_\sigma \otimes L_n^*.$$

Заметим, что  $\text{Ker } \Gamma = (\text{Im } \Gamma^*)^\perp$ ,  $J = I^\perp$ . Можно рассматривать число

$$r' = \max_{p \in \text{Im } \Gamma^*} \text{Rg } p,$$

называемое  $\Gamma$ -рангом. Еще один инвариант л. с. к. ф. — это

$$r = \dim \text{Im } \Gamma = n - \dim \text{Ker } \Gamma^*.$$

Число  $r$  называется числом существенных переменных.

**Определение.** Линейные системы квадратичных форм  $\Lambda: L_{(n)} \otimes L_n \rightarrow M_\sigma$  и  $\Lambda': L'_{(n)} \otimes L'_n \rightarrow M'_\sigma$  называются эквивалентными, если существуют изоморфизмы  $\lambda: L_n \rightarrow L'_n$  и  $\mu: M_\sigma \rightarrow M'_\sigma$  такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} L_{(n)} \otimes L_n & \xrightarrow{\Lambda} & M_\sigma \\ \lambda \otimes \lambda \downarrow & & \downarrow \mu \\ L'_{(n)} \otimes L'_n & \xrightarrow{\Lambda'} & M'_\sigma \end{array} \quad (1)$$

Если  $\lambda$  (соответственно,  $\mu$ ) — тождественный изоморфизм, то  $\Lambda$  и  $\Lambda'$  называются  $M$ -эквивалентными (соответственно,  $L$ -эквивалентными).

Мы можем указать некоторые простые условия эквивалентности.

**Теорема 1.** Если для л. с. к. ф.  $\Lambda$  и  $\Lambda'$  имеем  $L_n = L'_n$ ,  $Q = Q'$ ,  $\sigma = d = \sigma' = d'$ , то  $\Lambda$  и  $\Lambda'$  являются  $M$ -эквивалентными.

Докажем сначала, что при  $\sigma = d$ , т. е. при  $M^\perp = 0$ , отображение  $\Lambda^*$  обратимо на  $Q$ . Действительно, очевидно, что  $\Lambda^*$  сюръективно на  $Q$ . Если  $\rho$  и  $\rho'$  таковы, что  $\Lambda^*(\rho') = \Lambda^*(\rho)$ , то  $\rho - \rho' \in \text{Ker } \Lambda^*$ , и поскольку  $\text{Ker } \Lambda^* = M^\perp = 0$ ,  $\rho = \rho'$ . Итак на  $Q$  определено отображение  $(\Lambda^*)^{-1}$ , обратное  $\Lambda^*$ .

Теперь, если для  $\Lambda$  и  $\Lambda'$  совпадают подпространства  $Q$  и  $Q'$ , то отображение  $(\Lambda'^*)^{-1} \circ \Lambda^*$  будет изоморфизмом  $M_\sigma^*$  на  $M_\sigma'^*$ . Обозначив этот изоморфизм через  $(\mu^*)^{-1}$ , имеем  $\Lambda' = \mu \circ \Lambda$ , как нам и требовалось.

Еще одну теорему мы получим, если сформулируем условие, достаточное для того, чтобы изоморфизмом  $\lambda$  можно было совместить подпространства  $Q$  и  $Q'$  или, что то же самое, подпространства  $V$  и  $V'$ . В качестве такого условия можно предложить существование определенных систем тензоров ранга 1 и 2, полных в  $V$  и  $V'$ .

**Определение.** Пусть  $P$  — набор из  $N$  сочетаний (с повторениями) по два элемента из заданной системы элементов  $x_1, \dots, x_m$ . Матрицей инцидентности<sup>1)</sup> набора  $P$  назовем матри-

<sup>1)</sup> Это слово взято из книги М. Холла «Комбинаторика». М., 1970 (где в сходной ситуации строятся аналогичные матрицы)

цу из  $N$  строк и  $m$  столбцов, построенную следующим образом: ее элемент  $a_{st}$  ( $t=1, \dots, m; s=1, \dots, N$ ) равен 0, 1 или 2 в зависимости от того, сколько раз элемент  $x_t$  входит в  $s$ -ое сочетание.

Два набора  $P$  и  $P'$  называются эквивалентными, если их матрицы инцидентности могут быть получены одна из другой некоторой перестановкой строк и столбцов.

Легко видеть, что эквивалентность наборов необходима и достаточна для того, чтобы их можно было совместить некоторой перестановкой элементов и некоторым изменением нумерации пар в наборе.

**Теорема 2.** Пусть для двух л. с. к. ф.  $\Lambda: {}^rL_n \otimes L_n \rightarrow M_\sigma$  и  $\Lambda': L_n \otimes L_n \rightarrow M'_\sigma$  существуют системы линейно независимых векторов  $x_i \in L_n$  и  $x'_i \in L_n$  и такие эквивалентные наборы  $P$  и  $P'$  по  $C_{n+1}^2 - d$  пар, составленных из этих систем, что подпространства  $\text{Кег } \Lambda$  и  $\text{Кег } \Lambda'$  натянуты соответственно на системы тензоров  $x_i \cdot x_j$  и  $x'_i \cdot x'_j$ , составленные для пар из наборов  $P$  и  $P'$ . В этом случае л. с. к. ф.  $\Lambda$  и  $\Lambda'$  эквивалентны.

Для доказательства дополним (в случае необходимости) каждую из систем  $x_i$  и  $x'_i$  до базиса и изоморфизмом  $\lambda: L_n \rightarrow L_n$  совместим эти базисы, согласовав нумерацию так, чтобы совпали наборы  $P$  и  $P'$ . Среди векторов  $\Delta_{ij} = \Lambda(x_i \cdot x_j)$  будет  $d$  линейно независимых и  $C_{n+1}^2 - d$  равных нулю. То же можно сказать и о векторах  $\Delta'_{ij}$ . Остается изоморфизмом  $\mu: M_\sigma \rightarrow M'_\sigma$  совместить эти системы векторов. Для таких изоморфизмов  $\lambda$  и  $\mu$  легко проверить коммутативность диаграммы (1).

Пусть л. с. к. ф.  $\Lambda$  удовлетворяет условиям теоремы 2, т. е. обладает тем свойством, что  $\text{Кег } \Lambda$  натянуто на систему тензоров  $x_i \cdot x_j$ , где пара  $x_i, x_j$  принадлежит к набору  $P$  пар векторов из линейно независимой системы  $x_1, \dots, x_n$ . В этом случае мы будем называть  $\Lambda$  полной л. с. к. ф. строения  $P$  (или  $A(P)$ , где  $A(P)$  — соответствующая матрица инцидентности).

Перечисление всех полных линейных систем квадратичных форм всевозможных строений при заданных  $n$  и  $\sigma$  не представляет принципиальных трудностей.

## § 2. СУММЫ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Пусть  $\Lambda$  и  $\Lambda'$  — л. с. к. ф. с одними и теми же пространствами  $L_n$  и  $M_\sigma$ . Под их суммой, или суммой первого рода, мы будем понимать их сумму как сумму гомоморфизмов:

$$(\Lambda + \Lambda')(a) = \Lambda(a) + \Lambda'(a), \quad \forall a \in L_n \otimes L_n.$$

Нетрудно проверить, что при сложении л. с. к. ф. соответствующие гомоморфизмы  $\Lambda^*$ ,  $\Gamma$  и  $\Gamma^*$  также складываются.

Пусть теперь  $M_{\sigma_1}^* \subseteq M_{\sigma}^*$  и  $\Lambda_1^* = \Lambda^*/M_{\sigma_1}^*$ , т. е. является ограничением  $\Lambda^*$  на подпространстве  $M_{\sigma_1}^*$ . Если  $N_1$  — ортогональное дополнение  $M_{\sigma_1}^*$  и  $p_{N_1}$  — стягивание по модулю  $N_1$  (т. е. отображение, сопоставляющее каждому вектору из  $M_{\sigma}$  его класс по модулю  $N_1$ ), то, как известно,

$$\Lambda' \equiv (\Lambda^*/M_{\sigma_1}^*)^* = p_{N_1} \cdot \Lambda. \quad (2)$$

Линейную систему квадратичных форм  $\Lambda'$ , определенную формулой (2), мы назовем подсистемой системы  $\Lambda$ , задаваемой подпространством  $M_{\sigma_1}^*$ .

Из определения следует, что

$$\Lambda': L_{(n)} \otimes L_n \rightarrow M_{\sigma}/N_1.$$

Ясно, что можно построить л. с. к. ф.

$$\bar{\Lambda}': L_{(n)} \otimes L_n \rightarrow M_{\sigma}.$$

$M$ -эквивалентную подсистеме  $\Lambda'$ .

Пусть задано разложение  $M_{\sigma}^* = M_{\sigma_1}^* \oplus M_{\sigma_2}^*$ . Подпространства  $M_{\sigma_1}^*$  и  $M_{\sigma_2}^*$  определяют ограничения

$$\Lambda_1^* = \Lambda^*/M_{\sigma_1}^*, \quad \Lambda_2^* = \Lambda^*/M_{\sigma_2}^*.$$

Определим гомоморфизмы

$${}^q\Lambda_1^*: M_{\sigma}^* \rightarrow L_{(n)}^* \otimes L_n^*,$$

$${}^q\Lambda_2^*: M_{\sigma}^* \rightarrow L_{(n)}^* \otimes L_n^*$$

следующим образом:

$${}^q\Lambda_1^*(\rho) = \Lambda_1^*(\rho_1) \equiv \Lambda^*(\rho_1),$$

$${}^q\Lambda_2^*(\rho) = \Lambda_2^*(\rho_2) \equiv \Lambda^*(\rho_2),$$

если  $\rho = \rho_1 + \rho_2$ ,  $\rho_1 \in M_{\sigma_1}^*$ ,  $\rho_2 \in M_{\sigma_2}^*$ . Очевидно, что

$$\Lambda^* = {}^q\Lambda_1^* + \Lambda^*_{\sigma_2}.$$

Если  $N_1, N_2$  — ортогональные дополнения  $M_{\sigma_1}^*$  и  $M_{\sigma_2}^*$ , то  $M_{\sigma} = N_1 \oplus N_2$ . Можно построить изоморфизм

$$\mu: M_{\sigma}/N_1 \oplus M_{\sigma}/N_2 \rightarrow M_{\sigma},$$

при котором  $M_\sigma/N_1 \rightarrow N_2$ ,  $M_\sigma/N_2 \rightarrow N_1$ . Рассмотрим л. с. к. ф.

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 = p_{N_1} \cdot \Lambda + p_{N_2} \cdot \Lambda = (p_{N_1} + p_{N_2}) \cdot \Lambda,$$

определенную на  $L_{(n)} \otimes L_{(n)}$  и имеющую значения в  $M_\sigma/N_1 \oplus \oplus M_\sigma/N_2$ . Она  $M$ -изоморфна исходной л. с. к. ф.  $\Lambda$ , так как  $\mu \cdot (p_{N_1} + p_{N_2}) = \text{Id}$ .

Имея в виду этот изоморфизм, мы для краткости будем говорить, что  $\Lambda$  является суммой подсистем, определяемых подпространствами  $M_{\sigma_1}^*$  и  $M_{\sigma_2}^*$ .

Рассмотрим две л. с. к. ф.  $\Lambda'$  и  $\Lambda''$ , имеющие значения в одном и том же пространстве  $M_\sigma$ :

$$\Lambda' : L_{(n')} \otimes L_{(n')} \rightarrow M_\sigma,$$

$$\Lambda'' : L_{(n'')} \otimes L_{(n'')} \rightarrow M_\sigma.$$

Обозначим прямую сумму  $L_{(n')} \oplus L_{(n'')}$  через  $L_n$ . Таким образом, каждый вектор  $x \in L_n$  имеет единственное представление в виде  $x' + x''$ ,  $x' \in L_{(n')}$ ,  $x'' \in L_{(n'')}$ . Определим л. с. к. ф.

$$\Lambda : L_{(n)} \otimes L_{(n)} \rightarrow M_\sigma$$

по формуле

$$\Lambda(x \cdot y) = \Lambda'(x' \cdot y') + \Lambda''(x'' \cdot y'')$$

для всех тензоров вида  $x \cdot y$  и по линейности доопределим  $\Lambda$  на всем пространстве  $L_{(n)} \otimes L_{(n)}$ .

Так определенную л. с. к. ф.  $\Lambda$  мы будем называть прямой суммой (или суммой второго рода) л. с. к. ф.  $\Lambda'$  и  $\Lambda''$  и обозначать  $\Lambda' \oplus \Lambda''$ .

Для гомоморфизма, сопряженного прямой сумме, мы имеем при всех  $\rho \in M_\sigma^*$ :

$$\begin{aligned} \Lambda^*(\rho)(x \cdot y) &= \Lambda(x \cdot y)(\rho) = \Lambda'(x' \cdot y')(\rho) + \Lambda''(x'' \cdot y'')(\rho) = \\ &= \Lambda'^*(\rho)(x' \cdot y') + \Lambda''^*(\rho)(x'' \cdot y''). \end{aligned} \quad (3)$$

Условие распада л. с. к. ф.  $\Lambda$  в прямую сумму можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3. Пусть  $L_n = L_{(n')} \oplus L_{(n'')}$ . Для того чтобы  $\Lambda = \Lambda' \oplus \Lambda''$ , где

$$\Lambda' = \Lambda/L_{(n')} \otimes L_{(n')}, \quad \Lambda'' = \Lambda/L_{(n'')} \otimes L_{(n'')},$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\Lambda(x' \cdot y'') = 0 \quad (4)$$

для всех  $x' \in L_{(n')}$ ,  $y'' \in L_{(n'')}$ .

Доказательство теоремы очевидно, и на нем мы останавливаться не будем.

Определение прямой суммы может быть переписано в виде

$$\Gamma^*(x)(\rho \otimes y) = \Gamma'^*(x')(\rho \otimes y') + \Gamma''^*(x'')(\rho \otimes y''),$$

где  $x = x' + x''$ ,  $y = y' + y''$ ;  $x', y' \in L_{n'}$ ;  $x'', y'' \in L_{n''}$ . Если  $x \in \text{Ker } \Gamma^*$ , то для всех  $\rho$  и  $y$

$$\Gamma'^*(x')(\rho \otimes y') + \Gamma''^*(x'')(\rho \otimes y'') = 0,$$

а потому

$$\Gamma'^*(x')(\rho \otimes y') = 0, \quad \forall \rho, y',$$

$$\Gamma''^*(x'')(\rho \otimes y'') = 0, \quad \forall \rho, y''.$$

Это означает, что

$$x' \in \text{Ker } \Gamma'^*, \quad x'' \in \text{Ker } \Gamma''^*. \quad (5)$$

Легко проверить, что и обратно из (5) вытекает

$$x' + x'' \in \text{Ker } \Gamma^*.$$

Следовательно, если  $\Lambda = \Lambda' \oplus \Lambda''$ , то

$$\text{Ker } \Gamma^* = \text{Ker } \Gamma'^* \oplus \text{Ker } \Gamma''^*. \quad (6)$$

Пусть представление л. с. к. ф.  $\Lambda$  в виде  $\Lambda' \oplus \Lambda''$  соответствует разложению  $L_n = L_{n'} \oplus L_{n''}$ . Рассмотрим л. с. к. ф.

$${}^p\Lambda' : L_{(n)} \otimes L_n \rightarrow M_c,$$

определяемую равенством

$${}^p\Lambda'(x \cdot y) = \Lambda'(x' \cdot y') \equiv \Lambda(x' \cdot y')$$

для элементов вида  $x \cdot y$  и доопределяемую по линейности на все  $L_{(n)} \otimes L_n$ . Гомоморфизм  $\Gamma^*$  для этой л. с. к. ф. обозначим  ${}^p\Gamma^*$ .

Теперь мы можем написать равенство (4) в виде

$$\rho \circ {}^p\Lambda'(x \cdot y'') = {}^p\Gamma'^*(y'')(\rho \otimes x) = 0, \quad \forall x, y'', \rho,$$

что равносильно

$${}^p\Gamma'^*(y'') = 0$$

или

$$L_{n''} \subseteq \text{Ker } {}^p\Gamma'^*. \quad (7)$$

Аналогично мы получаем

$$L_{n'} \subseteq \text{Ker } {}^p\Gamma''^*. \quad (8)$$

Итак, доказана

Теорема 4. Для разложения  $\Lambda$  в прямую сумму ее ограничений на подпространствах  $L_{(n' \otimes L_{n'})}$  и  $L_{(n'' \otimes L_{n''})}$  необходимо и достаточно выполнения любого из включений (7) или (8).

Замечание. В определение  $\rho\Gamma^{**}$  входят оба подпространства  $L_{n'}$  и  $L_{n''}$  и потому включение (7) является условием как на  $L_{n''}$ , так и на  $L_{n'}$ . То же относится и к (8).

Формула (4) означает, что произведения вида  $x' \cdot y''$  принадлежат  $\text{Ker } \Lambda$ . Следовательно,  $\Lambda = \Lambda' \oplus \Lambda''$  является подсистемой некоторой полной л. с. к. ф.  $\bar{\Lambda}$ , строение которой описывается соотношениями

$$\bar{\Lambda}(x' \cdot y'') = 0.$$

Действительно, обозначим через  $\bar{V}$  линейную оболочку тензоров вида  $x' \cdot y''$ . Тогда  $\bar{V} \subseteq \text{Ker } \Lambda$  и  $\text{Im } \Lambda^* \subseteq \bar{V}^\perp$ . Дело сводится к построению расширения гомоморфизма  $\Lambda^*$  на некоторое пространство, содержащее  $M_\sigma^*$  так, чтобы его область значений совпадала с  $\bar{V}^\perp$ .

Из этих соображений, в частности, следует, что оценка

$$d \leq n(n+1)/2 - n'n''$$

для размерности  $\Lambda' \oplus \Lambda''$  не является завышенной.

Рассмотрим подсистему  $\Lambda_1$  л. с. к. ф.  $\Lambda = \Lambda' \oplus \Lambda''$ . В  $\Lambda'$  и  $\Lambda''$  существуют подсистемы  $\Lambda_1'$  и  $\Lambda_1''$  такие, что  $\Lambda_1 = \Lambda_1' \oplus \Lambda_1''$ . Действительно, пусть  $M_{\sigma_1}^*$  порождает  $\Lambda_1$ . Положим в равенстве (3)  $\rho = \rho_1 \in M_{\sigma_1}^*$  и получим

$$\Lambda^*(\rho_1)(x \cdot y) = \Lambda'^*(\rho_1)(x' \cdot y') + \Lambda''^*(\rho_1)(x'' \cdot y'').$$

Это равенство показывает, что искомые подсистемы определяются как сопряженные гомоморфизмы для

$$\Lambda_1'^* = \Lambda'^*/M_{\sigma_1}^*, \quad \Lambda_1''^* = \Lambda''^*/M_{\sigma_1}^*.$$

Определение. Пусть л. с. к. ф.  $\Lambda$  является прямой суммой  $\Lambda' \oplus \Lambda''$  и одновременно суммой своих подсистем  $\Lambda_1 + \Lambda_2$ , причем выполнены условия

$$\Lambda_2' = 0, \quad \Lambda_1'' = 0.$$

Тогда мы будем называть л. с. к. ф.  $\Lambda$  дважды прямой суммой л. с. к. ф.  $\Lambda_1'$  и  $\Lambda_2''$ .

Пусть прямые слагаемые  $\Lambda'$  и  $\Lambda''$  определяются разбиением  $L_n = L_{n'} \oplus L_{n''}$ , а подсистемы  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  разбиением  $M_\sigma^* =$

$= M_{\sigma_1}^* \oplus M_{\sigma_2}^*$ . Условие  $\Lambda_1'' = 0$  равносильно  $\Lambda_1''^*(\rho_1)(x'' \cdot y'') = 0$ ,  $\forall \rho_1 \in M_{\sigma_1}^*$ ,  $x'', y'' \in L_n''$ . Аналогично  $\Lambda_2' = 0$  равносильно  $\Lambda_2'^*(\rho_2)(x' \cdot y') = 0$ . Поэтому для дважды прямой суммы мы имеем

$$M_{\sigma_2}^* \subseteq \text{Ker } \Lambda'^*, \quad M_{\sigma_1}^* \subseteq \text{Ker } \Lambda''^* \quad (9)$$

и, следовательно,

$$\text{Ker } \Lambda'^* + \text{Ker } \Lambda''^* = M_{\sigma}^*. \quad (10)$$

Обратно, пусть  $\Lambda = \Lambda' \oplus \Lambda''$  и выполнено условие (10). В этом случае найдутся подпространства  $M_{\sigma_1}^*$  и  $M_{\sigma_2}^*$  такие, что  $M_{\sigma}^* = M_{\sigma_1}^* \oplus M_{\sigma_2}^*$  и выполнены включения (9). Из этих включений следует  $\Lambda_2'^*(\rho_2)(x' \cdot y') = 0$ ,  $\Lambda_1''^*(\rho_1)(x'' \cdot y'') = 0$ . Мы имеем, таким образом, следующую теорему.

**Теорема 5.** Пусть  $\Lambda = \Lambda' \oplus \Lambda''$ . Для того чтобы при некотором разложении  $M_{\sigma}^* = M_{\sigma_1}^* \oplus M_{\sigma_2}^*$  л. с. к. ф.  $\Lambda$  являлась дважды прямой суммой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (10).

Условие (10) можно записать также и в двойственном виде

$$\text{Im } \Lambda' \cap \text{Im } \Lambda'' = 0.$$

Условия, при которых второй фундаментальный объект поверхности распадается в дважды прямую сумму, можно найти в работе М. А. Акивиса [1].

### § 3. D-МНОЖЕСТВА И J-МНОЖЕСТВА

**Определение.** *D*-множествами называются множества векторов из  $M_{\sigma}^*$ , определяемые следующим образом

$$D^0 = M^{\perp}, \quad D^r = \{\rho \mid \text{Rg } \Lambda^*(\rho) \leq r\}, \quad r = 1, \dots, n-1.$$

В частности, множество  $D^{n-1}$ , которое мы будем обозначать также через *D*, можно определить равенством

$$D = \{\rho \mid \exists x \neq 0 : \Lambda^*(\rho)(x \cdot y) = 0, \quad \forall y \in L_n\}.$$

Если л. с. к. ф.  $\Lambda$  не сингулярна, то *D* не совпадает с  $M_{\sigma}^*$  и является алгебраической гиперповерхностью порядка *n*. Остальные *D*-множества также являются алгебраическими поверхностями, причем  $D^{r-1}$  принадлежит множеству особых точек  $D^r$ . Эти утверждения легко проверяются при помощи координатной записи (см. § 4).

Лемма 1. Если  $\Lambda = \Lambda' \oplus \Lambda''$ , то для всех  $\rho \in M_0^*$

$$\text{Rg}^* \Lambda^*(\rho) = \text{Rg} \Lambda'^*(\rho) + \text{Rg} \Lambda''^*(\rho).$$

Действительно,  $\text{Rg} \varphi$  — это максимальная из размерностей подпространств, на которых  $\varphi$  невырождена, т. е. из  $\varphi(x \cdot y) = 0$  для всех  $y$  следует  $x = 0$ . Но в силу равенства (3) невырожденность  $\Lambda^*(\rho)$  на подпространстве  $L = L' \oplus L''$  равносильна одновременной невырожденности  $\Lambda'^*(\rho)$  на подпространстве  $L'$  и  $\Lambda''^*(\rho)$  на подпространстве  $L''$ . Отсюда прямо следует наше утверждение.

Теорема 6. Если  $\Lambda = \Lambda' \oplus \Lambda''$ , то  $D_{\Lambda}^{n-1} = D_{\Lambda'}^{n-1} \cup D_{\Lambda''}^{n-1}$  и  $D_{\Lambda'}^{n-1} \cap D_{\Lambda''}^{n-1} \subseteq D_{\Lambda}^{n-2}$ .

Действительно,

$$\begin{aligned} \rho \in D_{\Lambda'} &\Rightarrow \text{Rg} \Lambda^*(\rho) \leq n' - 1 + n'' = n - 1, \\ \rho \in D_{\Lambda''} &\Rightarrow \text{Rg} \Lambda^*(\rho) \leq n' + n'' - 1 = n - 1, \\ \rho \in D_{\Lambda'} \cap D_{\Lambda''} &\Rightarrow \text{Rg} \Lambda^*(\rho) \leq n' - 1 + n'' - 1 = n - 2, \\ \rho \in \overline{D_{\Lambda'} \cup D_{\Lambda''}} &\Rightarrow \text{Rg} \Lambda^*(\rho) = n. \end{aligned}$$

Аналогично можно доказать, что

$$D_{\Lambda}^r = (D_{\Lambda'}^0 \cap D_{\Lambda''}^r) \cup (D_{\Lambda'}^1 \cap D_{\Lambda''}^{r-1}) \cup \dots \cup (D_{\Lambda'}^r \cap D_{\Lambda''}^0).$$

Само собой разумеется, что здесь и множества, и их пересечения могут быть пустыми.

Если  $\sigma = d$  и  $\Lambda^*$  обратимо на  $Q$ , мы можем рассматривать  $D$ -множества как образы при  $(\Lambda^*)^{-1}$  пересечений подпространства  $Q$  с конусами пространства  $L_{(n)}^* \otimes L_n^*$ , составленными из квадратичных форм, имеющих ранг не выше заданного. В 1897 г. Кантор [4] высказал утверждение, равносильное тому, что л. с. к. ф. с точностью до эквивалентности определяется проективными классами пересечений и порядками касания в каждом из них. К сожалению, это утверждение нельзя считать доказанным, так что мы до сих пор не имеем критерия эквивалентности л. с. к. ф., пригодного для достаточно широкого класса систем. Классификация, полученная автором в работе [2], противоречила теореме Кантора. Однако при внимательном рассмотрении оказалось, что нет оснований считать не эквивалентными три канонических вида (1) из этой работы, и вопрос об их эквивалентности остается открытым.

Определение.  $J$ -множествами называются множества векторов из  $L_n$ , определяемые следующим образом:

$$J = J^0 = \text{Ker} \Gamma^*, \quad J^t = \{x \mid \text{Rg} \Gamma^*(x) \leq t\} \quad (t > 0).$$

Так как  $\text{Im} \Gamma^* \subseteq M_\sigma \otimes L_n^*$ , мы имеем  $\text{Rg} \Gamma^*(x) \leq \min(n, \sigma)$ ; однако удобно считать, что, например,  $J^{\sigma-1}$  определено и при  $n < \sigma$  и совпадает с  $L_n$ . То же относится и к  $J^{n-1}$  в случае  $\sigma < n$ .

Таким образом, мы будем рассматривать

$$J^{\sigma-1} = \{x \mid \exists \rho \neq 0 : \Gamma^*(x)(\rho \otimes y) = 0, \forall y \in L_n\}$$

и

$$J^{n-1} = \{x \mid \exists y \neq 0 : \Gamma^*(x)(\rho \otimes y) = 0, \forall \rho \in M_{\sigma}^*\}.$$

Легко видеть, используя определение, что

$$J^{n-1} = \{x \mid \exists y : \Delta(x \cdot y) = 0\}.$$

Для небольших значений  $n$  и  $\sigma$  еще Сальмон в 1895 г. рассматривал алгебраическое отображение  $J^{n-1}$  на себя, задаваемое равенством

$$\Delta(x \cdot y) = 0.$$

Будем говорить, что  $x \in O(y)$  (или  $y \in O(x)$ ), если  $x \cdot y \in V$ . Тогда условие, необходимое и достаточное для распада л. с. к. ф.  $\Delta$  в прямую сумму ее ограничений на  $L_{(n' \otimes L_{n'})}$  и  $L_{(n'' \otimes L_{n''})}$ , можно записать следующим включением

$$x' \in O(y''), \forall x' \in L_{n'}, y'' \in L_{n''}.$$

Для этого отображения область определения и область значений совпадают, так как мы рассматриваем линейные системы квадратичных, или, что то же самое, симметричных билинейных форм.

Естественно определить еще одно алгебраическое соответствие  $N$  между множествами  $D^{n-1}$  и  $J^{\sigma-1}$ . Именно, мы будем говорить, что  $x \in N(\rho)$ , если

$$\rho \otimes x \in \text{Ker } \Gamma.$$

Если  $\rho \in D^r$ , то как легко видеть,  $\dim N(\rho) \geq n - r$ .

Введенные здесь отображения подробно изучались в работах С. Е. Карапетяна [5], в данной же работе их использование вносит лишь улучшения редакционного характера.

Теорема 7. Если несингулярная л. с. к. ф.  $\Delta$  распадается в прямую сумму своих ограничений на  $L_{(n' \otimes L_{n'})}$  и  $L_{(n'' \otimes L_{n''})}$ , то

$$N(D_{\Lambda'}^{n-1} \setminus D_{\Lambda'}^{n-r-1}) \subseteq L_{n'}, N(D_{\Lambda''}^{n-1} \setminus D_{\Lambda''}^{n-r-1}) \subseteq L_{n''},$$

где, например, через  $D_{\Lambda'}^{n-1}$  обозначено  $D$ -множество л. с. к. ф.  $\Delta' = \Delta / L_{(n' \otimes L_{n'})}$ .

Доказательство. Пусть разбиению  $L_n = L_{n'} \oplus L_{n''}$  соответствует разложение векторов  $x = x' + x''$  и  $y = y' + y''$ ,  $x', y' \in L_{n'}$ ,  $x'', y'' \in L_{n''}$ . Если  $x \in N(\rho)$ , мы имеем, согласно (3).

$$\Delta'^*(\rho)(x' \cdot y') + \Delta''^*(\rho)(x'' \cdot y'') = 0, \forall y \in L_n.$$

Выбрав  $y \in L_{n''}$ , мы замечаем, что

$$\Lambda^{n''}(\rho)(x'' \cdot y'') = 0.$$

Это равенство должно иметь место для всех  $y'' \in L_{n''}$ , а при  $\rho \in D_{\Lambda'}^{n'-1} \setminus D_{\Lambda'}^{n'-1}$  мы имеем  $\text{Rg } \Lambda^{n''}(\rho) = n''$ , и значит  $x'' = 0$ . Отсюда вытекает первое из требуемых включений. Второе доказывается аналогично.

**Замечание.** Пусть  $\rho \in D_{\Lambda'}^{r'} \cap D_{\Lambda''}^{r''}$  (причем  $r'$  и  $r''$  выбраны минимальными). Тогда нетрудно доказать, что  $\rho \in D_{\Lambda'}^{r'+r''}$  и  $n - (r' + r'')$ -мерное подпространство  $N(\rho)$  пересекает  $L_{n'}$  по  $(n' - r')$ -мерному подпространству, а  $L_{n''}$  — по  $(n'' - r'')$ -мерному.

Ниже мы получим теорему, позволяющую выделить класс л.с.к.ф., для которых при помощи отображения  $N$  можно найти подпространства  $L_{n'}$  и  $L_{n''}$ , но для этого удобнее воспользоваться координатной записью.

#### § 4. КООРДИНАТНАЯ ЗАПИСЬ

Пусть  $e_i, i = 1, \dots, n$ , — базис в  $L_n$ , а  $u_\alpha, \alpha = 1, \dots, \sigma$ , — базис в  $M_\sigma$ . Тензоры  $e_i \cdot e_j$  образуют базис в  $L_{(n)} \otimes L_n$ . Мы можем написать

$$\Lambda(a) = \Lambda(a^{ij} e_i \cdot e_j) = a^{ij} \Lambda_{ij}.$$

Здесь векторы  $\Lambda_{ij} = \Lambda_{ji} = \Lambda(e_i \cdot e_j)$  лежат в  $M_\sigma$  и потому

$$\Lambda(a) = a^{ij} \Lambda_{ij}^\alpha u_\alpha, \quad \Lambda_{ij}^\alpha = \Lambda_{ji}^\alpha.$$

Система чисел  $\Lambda_{ij}^\alpha$  называется матрицей л.с.к.ф.  $\Lambda$  в базисах  $e_i, u_\alpha$ . Нетрудно проверить, что соответствие, относящее каждой паре базисов из  $L_n$  и  $M_\sigma$  матрицу л.с.к.ф.  $\Lambda$ , является связующим тензором с законом преобразования

$$\Lambda'_{k\ell}{}^\beta = s_k^i s_\ell^j t_\alpha^\beta \Lambda_{ij}^\alpha,$$

где  $\Lambda'_{k\ell}{}^\beta$  — матрица  $\Lambda$  в базисах  $e'_k, u'_\beta$ , связанных с исходными базисами формулами  $e'_k = s_k^i e_i, u'_\alpha = t_\alpha^\beta u'_\beta$ .

Гомоморфизмы  $\Lambda^*, \Gamma$  и  $\Gamma^*$  задаются тем же тензором, но компоненты употребляются в каждом случае по-своему. Именно,  $\Lambda^*(\rho)$  имеет компоненты  $\rho_\alpha \Lambda_{ij}^\alpha$  в базисе, взаимном  $e_i \cdot e_j$ , если  $\rho$  имеет компоненты  $\rho_\alpha$  в базисе  $\varepsilon^\alpha$ , взаимном  $u^\alpha$ .  $\Gamma(p)$  имеет компоненты  $\Lambda_{ij}^\alpha p_\alpha^i$  в базисе  $f^i$ , взаимном  $e_i$ , если  $p$  имеет компоненты  $p_\alpha^i$  в базисе  $\varepsilon^\alpha \otimes e_i$ .  $\Gamma^*(x)$  имеет компоненты,  $\Lambda_{ij}^\alpha x^j$  в базисе  $u_\alpha \otimes f^i$ .

В то время как двумерная матрица имеет два положения, отличающиеся на транспонирование, трехмерная матрица имеет таких положений 6. В нашем случае только 4 из них различны в силу симметрии по нижним индексам. Этим определяются четыре гомоморфизма  $\Lambda$ ,  $\Lambda^*$ ,  $\Gamma$  и  $\Gamma^*$ .

Линейную систему квадратичных форм удобно задавать в одном из следующих видов:

а) Матрицей размеров  $C_{n+1}^2 \times \sigma$

$$\left\| \begin{array}{cccc} \Lambda_{11}^1 & \Lambda_{12}^1 & \dots & \Lambda_{nn}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Lambda_{11}^\sigma & \Lambda_{12}^\sigma & \dots & \Lambda_{nn}^\sigma \end{array} \right\|, \quad (11)$$

в строках которой расположены (в лексикографическом порядке) различные коэффициенты квадратичных форм  $\Lambda^*$  ( $\epsilon^\alpha$ ) «образующих» л. с. к. ф. Подпространство  $Q$  натянуто на эти формы.

Размерность л. с. к. ф. равна рангу матрицы (11).

Подсистема л. с. к. ф.  $\Lambda$  имеет матрицу вида (11), строки которой являются линейными комбинациями строк данной матрицы.

б) Матрицей из векторов

$$\left\| \begin{array}{c} \Lambda_{11} \dots \Lambda_{1n} \\ \dots \\ \Lambda_{1n} \dots \Lambda_{nn} \end{array} \right\|. \quad (12)$$

Полная л. с. к. ф. некоторого строения  $P$  отличается тем, что при подходящем выборе базиса  $e_i$  векторы, стоящие на местах, соответствующих  $P$ , равны нулю, а остальные линейно независимы.

Если л. с. к. ф.  $\Lambda$  распадается в прямую сумму своих ограничений на подпространствах  $L_{(n' \otimes L_{n''})}$  и  $L_{(n'' \otimes L_{n'})}$ , то, расположив базисные векторы  $e_{i'}$ ,  $i' = 1, \dots, n'$  и  $e_{i''}$ ,  $i'' = n' + 1, \dots, n$  в подпространствах  $L_{n'}$  и  $L_{n''}$ , мы получим матрицу клеточно диагонального вида.

в)  $\Lambda^*(\rho)$  задается квадратной матрицей порядка  $n$ , элементы которой — линейные формы относительно  $\rho_\alpha$ :

$$\left\| \begin{array}{cccc} \rho_\alpha \Lambda_{11}^\alpha & \dots & \rho_\alpha \Lambda_{1n}^\alpha \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_\alpha \Lambda_{1n}^\alpha & \dots & \rho_\alpha \Lambda_{nn}^\alpha \end{array} \right\|. \quad (13)$$

Для прямой суммы эта матрица также является клеточно диагональной. В случае дважды прямой суммы существует такой базис  $\epsilon^\alpha$ , что элементы верхней клетки имеют вид

$\sum_{\alpha=1}^{\sigma_1} \rho_{\alpha} \Lambda_{i'j'}^{\alpha}$ , а элементы нижней клетки имеют вид  $\sum_{\alpha=\sigma_1+1}^{\delta} \rho_{\alpha} \Lambda_{i'n}^{\alpha}$ .

Л. с. к. ф. не сингулярна, если  $\det \|\rho_{\alpha} \Lambda_{ij}^{\alpha}\| \neq 0$  — не тождественный нуль. Уравнение  $D^{n-1}$  мы получим, приравнявая этот детерминант нулю, и вообще уравнения  $D^r$  получаем, приравнявая нулю миноры порядка  $r+1$  матрицы  $\|\rho_{\alpha} \Lambda_{ij}^{\alpha}\|$ . Заметим, что в случае  $d=2$  множество  $D^{n-1}$  находится при помощи характеристического уравнения.

г)  $\Gamma^*(x)$  задается матрицей размеров  $n \times \sigma$ , элементы которой линейные формы относительно  $x^i$

$$\left\| \begin{array}{ccc} \Lambda_{1j}^1 x^j & \dots & \Lambda_{nj}^1 x^j \\ \dots & \dots & \dots \\ \Lambda_{1j}^{\sigma} x^j & \dots & \Lambda_{nj}^{\sigma} x^j \end{array} \right\|. \quad (14)$$

Уравнения множеств  $J^t$  получаются приравниванием нулю миноров порядка  $t+1$  этой матрицы. В частности,  $\text{Ker } \Gamma^*$  задается системой линейных уравнений

$$\Lambda_{ij}^{\alpha} x^j = 0.$$

Система имеет нетривиальное решение, если ранг матрицы

$$\left\| \begin{array}{cc} \Lambda_{11}^1 & \dots & \Lambda_{1n}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \Lambda_{1n}^1 & \dots & \Lambda_{nn}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \Lambda_{11}^{\sigma} & \dots & \Lambda_{1n}^{\sigma} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Lambda_{1n}^{\sigma} & \dots & \Lambda_{nn}^{\sigma} \end{array} \right\| \quad (15)$$

меньше, чем  $n$ . Этот ранг равен  $n - \dim \text{Ker } \Gamma^* = \dim \text{Im } \Gamma$ , т. е. тому числу, которое мы обозначили через  $r$ . Выясним смысл этого инварианта.

Если  $n - r$  базисных векторов  $e_{r+1}, \dots, e_n$  лежат в  $\text{Ker } \Gamma^*$ , то имеем  $\Gamma^*(e_j)(p) = 0$  для всех  $p$  и  $j > r$ . В частности, отсюда следует  $\Gamma^*(e_j)(\rho \otimes e_i) = \Lambda^*(\rho)(e_i \cdot e_j) = 0$  для всех  $i, \rho$  и  $j > r$ . Таким образом, если  $n - r$  последних базисных векторов помещены в  $\text{Ker } \Gamma^*$ , то в матрице (12) возможно отличаться от нуля только клетка порядка  $r$  в левом верхнем углу. Наоборот, как легко проверить, если за счет выбора базиса  $e_i$  мы добились равенства

$$\Lambda_{ij} = 0 \text{ при } \max\{i, j\} > k,$$

то  $e_{k+1}, \dots, e_n$  лежат в  $\text{Кег } \Gamma^*$ . Эти предложения и позволяют назвать  $\nu$  числом существенных переменных.

Глядя на матрицы (11) и (15), рангами которых являются  $d$  и  $\nu$ , мы замечаем, что эти числа — двумерные ранги пространственной матрицы  $\Delta_{ij}^\alpha$ . В работе [2] отмечалось, что ранг л. с. к. ф.  $r$  — наибольшее число, для которого существует тензор

$$\Delta_{i_1 j_1}^{(\alpha_1)} \dots \Delta_{i_r j_r}^{(\alpha_r)},$$

отличный от нуля. В самом деле, из того, что тензор отличен от нуля, вытекает, что  $r$ -линейная форма,  $\rho_{\alpha_1} \dots \rho_{\alpha_r} \Delta_{i_1 j_1}^{(\alpha_1)} \dots \Delta_{i_r j_r}^{(\alpha_r)}$ , составленная для некоторого набора индексов  $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_r$ , принимает ненулевое значение при некотором  $\rho$ . А это в свою очередь означает, что минор матрицы  $\|\rho_{\alpha} \Delta_{ij}^\alpha\|$ , определяемый указанным набором индексов, отличен от нуля.

Из такой интерпретации ранга  $r$  следует, что он совпадает с трехмерным рангом матрицы  $\Delta_{ij}^\alpha$  с сигнатурой  $(\overset{+}{\alpha})$  (см. [6]). Аналогично,  $\Gamma$ -ранг  $r'$  есть наибольшее число, для которого существует тензор

$$\Delta_{i_1 j_1}^{(\alpha_1)} \dots \Delta_{i_{r'} j_{r'}}^{(\alpha_{r'})},$$

отличный от нуля, и  $r'$  совпадает с трехмерным рангом матрицы  $\Delta_{ij}^\alpha$  с сигнатурой  $(\overset{+}{j})$ .

Такие рассуждения легко проходят и для произвольных трехмерных матриц. Мы получаем, таким образом, новую интерпретацию трехмерного ранга.

Трехмерный ранг с некоторой сигнатурой равен  $r$ , если среди линейных комбинаций слоев соответствующей ориентации есть матрица ранга  $r$ , и нет матрицы большего ранга.

## § 5. КРИТЕРИЙ РАЗЛОЖИМОСТИ В ПРЯМУЮ СУММУ

В этом параграфе нам будет удобнее перейти к проективным пространствам  $\tilde{L}_n$  и  $\tilde{M}_\sigma^*$ , образованным одномерными подпространствами пространств  $L_n$  и  $M_\sigma^*$ . Мы будем считать, что  $x^i$  и  $\rho_\alpha$  — однородные координаты точек  $\tilde{x} \in \tilde{L}_n$  и  $\tilde{\rho} \in \tilde{M}_\sigma^*$ . Волна над буквой, обозначающей множество или отображение, будет означать соответствующее множество или отображение в  $\tilde{L}_n$  и  $\tilde{M}_\sigma^*$ .

Из приведенной выше координатной записи гомоморфизма  $\Gamma$  следует, что  $\rho \otimes \tilde{x} \in \text{Ker } \tilde{\Gamma}$  тогда и только тогда, когда  $\rho_\alpha$  и  $x^i$  удовлетворяют условию

$$\rho_\alpha \Lambda_{ij}^\alpha x^i = 0. \quad (16)$$

Будем рассматривать (16) как систему уравнений относительно  $x^i$ . Если  $\tilde{\rho} \in \tilde{D}^{n-1} \setminus \tilde{D}^{n-2}$ , ранг системы в точности равен  $n-1$ , и она имеет единственное решение  $\tilde{x}$ , которое и является точкой  $\tilde{N}(\tilde{\rho})$  в  $\tilde{L}_n$ .

**Теорема 8.** Пусть л. с. к. ф.  $\Lambda' : L_{(n')} \otimes L_{n'} \rightarrow M_\alpha$  не сингулярна, многообразие  $\tilde{D}_{\Lambda'}^{n'-1}$  неприводимо, и его общая точка  $\tilde{s}$  не удовлетворяет никакому уравнению степени ниже  $n'$ . Тогда  $\tilde{L}_{n'}$  натянута на многообразии с общей точкой  $\tilde{\xi}$ , определяемой системой уравнений

$$s_\alpha \Lambda_{ij}^\alpha x^i = 0 \quad (17)$$

с коэффициентами из  $\mathbf{C}(s_\alpha)$ .

**Доказательство.** Точка  $\tilde{s}$  не принадлежит никакому подмногообразию в  $\tilde{D}_{\Lambda'}^{n'-1}$ . В частности,  $\tilde{s} \in \tilde{D}_{\Lambda'}^{n'-2}$ , и ранг системы в точности равен  $n-1$ . Система (17) имеет единственное решение  $\xi^i$ . Точка  $\tilde{\xi}$  с координатами  $\xi^i$  является общей точкой некоторого многообразия  $\mathfrak{X}$ .

Допустим, что  $\mathfrak{X}$  удовлетворяют линейному однородному уравнению  $a_i x^i = 0$  с комплексными коэффициентами, т. е. многообразие лежит в некоторой гиперплоскости пространства  $\tilde{L}_n$ . Тогда уравнение  $a_i x^i = 0$  является следствием системы (17), и поскольку оно не тривиально, одно из уравнений системы может быть заменено на него. Отсюда следует, что определитель матрицы  $\|s_\alpha \Lambda_{ij}^\alpha\|$  останется равным нулю, если в ней заменить одну из строк на строку  $a_i$ . Равенство нулю полученного после замены определителя будет уравнением степени ниже  $n'$ , связывающим координаты  $s_\alpha$ , что противоречит условию.

Рассмотрим прямую сумму  $\Lambda = \Lambda' \oplus \Lambda''$  и предположим, что  $\Lambda'$  удовлетворяет условию теоремы 8. Тогда согласно теореме 7 точка  $\tilde{\xi}'$  лежит в  $\tilde{L}_{n'}$  и, следовательно, там же лежит многообразие  $\mathfrak{X}'$ . По теореме 8  $\tilde{L}_{n'}$  натянута на  $\mathfrak{X}'$ .

**Определение.** Мы будем говорить, что несингулярная л. с. к. ф. имеет простую структуру, если  $D_{\Lambda'}^{n'-1}$  не имеет кратных неприводимых компонент (т. е. наименьшая степень уравнения, которому удовлетворяет общая точка каждой компоненты, равна ее порядку).

Рассмотрим произвольную л. с. к. ф.  $\Lambda$  простой структуры. Приведенным в теореме 8 способом для каждой из неприводимых компонент  $D_\omega^{n-1}$  ( $\omega = 1, \dots, \Omega$ ) гиперповерхности  $D_\Lambda^{n-1}$  мы можем построить соответствующее многообразие  $\mathfrak{X}_\omega$  и его линейную оболочку  $L_\omega$ .

Теорема 9. Для разложения л. с. к. ф. простой структуры

$$\Lambda = \bigoplus_{\omega=1}^{\Omega} \Lambda_\omega,$$

где  $\Lambda_\omega = \Lambda / L_{(\omega)} \otimes L_\omega$ , необходимо и достаточно, чтобы

$L_n = \bigoplus_{\omega=1}^{\Omega} L_\omega$ , и для любых  $\omega_1$  и  $\omega_2$  выполнялось условие

$$\Lambda(x_1 \cdot x_2) = 0, \quad \forall x_1 \in L_{\omega_1}, \quad x_2 \in L_{\omega_2}.$$

Необходимость этого условия вытекает из теорем 7 и 8. Достаточность его очевидна.

Обозначим  $\dim L_\omega$  через  $n_\omega$  и  $\sum_{\omega=1}^{\omega-1} n_\omega$  через  $m_\omega$ . Ясно, что если при всех  $\omega$  мы поместим базисные векторы

$$e_{m_\omega}, \dots, e_{m_\omega + n_\omega}$$

в  $L_\omega$ , то матрицы (12) и (13) координатной записи  $\Lambda$  будут иметь клеточно диагональный вид.

При практическом применении теоремы 9, помимо нахождения неприводимых компонент алгебраического многообразия, требуется только нахождение рангов матриц и решение систем линейных уравнений.

Можно ли продолжить полученное разложение в прямую сумму до разложения в дважды прямую сумму — легко выяснить при помощи теоремы 5.

## § 6. ОДНА ТЕОРЕМА О СИНГУЛЯРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Теорема 10. Пусть л. с. к. ф. имеет ранг  $r$ . Тогда найдется подпространство  $L_{n-r} \subseteq L_n$  такое, что

$$\Lambda / L_{(n-r)} \otimes L_{n-r} = 0.$$

Мы будем доказывать эквивалентное свойство подпространства  $L_{n-r}$ , именно, что для всех  $\rho \in M_\sigma^*$  и  $x, y \in L_{n-r}$

$$\Lambda^*(\rho)(x \cdot y) = 0.$$

Для доказательства рассмотрим такое  $\rho_0 \in M_\sigma^*$ , что  $\text{Rg } \Lambda^*(\rho_0) = r$ , и выберем в  $L_n$  базис  $e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n$ , канонический

для квадратичной формы  $\Lambda^*(\rho_0)$ . Обозначим через  $L_{n-r}$  линейную оболочку векторов  $e_{r+1}, \dots, e_n$ . Доказываемое условие, по построению, выполнено для  $\rho_0$ . Допустим, что при некотором  $\rho_1$  квадратичная форма  $\Lambda^*(\rho_1)$  не обращается в нуль на  $L_{n-r}$ . Тогда найдется такой вектор  $e$ , что

$$\Lambda^*(\rho_1)(e \cdot e) \neq 0.$$

Возьмем ограничение квадратичной формы  $\Lambda^*(\alpha\rho_0 + \rho_1)$  на подпространстве, натянутом на  $e_1, \dots, e_r, e$ . Оно имеет матрицу вида

$$\begin{vmatrix} \alpha + b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & b_{1r+1} \\ b_{12} & \alpha + b_{22} & \dots & b_{2r} & b_{2r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1r} & \dots & \alpha + b_{rr} & b_{rr+1} & b \\ b_{1r+1} & \dots & b_{rr+1} & b & b \end{vmatrix}.$$

Детерминант этой матрицы есть ненулевой многочлен относительно  $\alpha$ , так как  $b = \Lambda^*(\rho_1)(e \cdot e) \neq 0$ . Таким образом, существует  $\alpha$ , при котором  $\Lambda^*(\alpha\rho_0 + \rho_1)$  невырождена на рассматриваемом  $(r+1)$ -мерном подпространстве. Это противоречит нашему предположению относительно л. с. к. ф.  $\Lambda$ .

Теорема 10 позволяет дать оценку

$$d \leq nr - C_r^2$$

для размерности л. с. к. ф. ранга  $r$ . Эта оценка грубая, так как полная л. с. к. ф. соответствующего строения, для которой достигается равенство, имеет ранг, равный  $\min\{n, 2r\}$ , что больше, чем  $r$ .

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Аквивис М. А., О строении двухкомпонентных сопряженных систем. Тр. геометр. семинара. Ин-т научн. информ. АН СССР, 1966, 1, 7—31
2. Беклемишев Д. В., Классификация пучков квадратичных форм от трех переменных. Докл. АН СССР, 1963, 149, № 5. 1007—1010
3. Лаптев Г. Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. Тр. Моск. мат. о-ва, 1953, № 2, 275—382
4. Kantor S., Theorie der Aequivalenz von linearen  $\infty^2$  Schaaren bilinearer Formen. Sitzungsber. Akad. Munchen, 1897, 27, 367—381
5. Карапетян С. Е., Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей. I. II. III. Изв. АН АрмССР, Сер. физ.-мат., 1963, 16, № 3, 3—22; № 5, 3—28; 1964, 17, № 1, 3—21
6. Соколов Н. П., Пространственные матрицы и их приложения. М., Физматгиз, 1960, 300 стр.

## ON LINEAR SYSTEMS OF QUADRATIC FORMS

The paper deals with linear systems of quadratic forms. Let  $L_n$  and  $M_\sigma$  be two complex linear spaces of dimensions  $n$  and  $\sigma$  respectively. By definition a linear system of quadratic forms is a homomorphism of the symmetric part of  $L_n \otimes L_n$  in  $M_\sigma$ . If we choose a basis in the space  $L_n$  and a basis in the space  $M_\sigma$ , this homomorphism defines  $\sigma$  square  $n$ -matrices  $\Lambda_{ij}^\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, \sigma$ ;  $i, j = 1, \dots, n$ ). We consider the polynomial  $\det(\rho_\alpha \Lambda_{ij}^\alpha)$  and we suppose that it is not identically zero, i. e. the system is not singular. The algebraic variety defined by the equation  $\det(\rho_\alpha \Lambda_{ij}^\alpha) = 0$  is supposed to have no multiple irreducible component. If these assumptions are true, we can give some necessary and sufficient condition for the existence of a basis in  $L_n$  so that all the matrices  $\Lambda_{ij}^\alpha$  have the same block-diagonal form. Such a basis is constructed. Some other results are also obtained. In particular it is proved that all the quadratic forms of a singular system of rank  $r$  have a common  $(n-r)$ -dimensional null-space.

---