Ю. Л. РАБИНОВИЧ

ОЦЕНКА ТИПА И ПОРЯДКА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РОСТА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Уравнения с ограниченными коэффициентами. Теорема А. М. Ляпунова [1]

Пусть в области $|z| \geqslant R$ коэффициенты уравнения $w^{(n)} = p_1(z) w^{(n-1)} + \ldots + p_n(z) w$ голоморфны и удовлетворяют условиям $|p_k(z)| \leqslant \mu$. Проведем линию L, лежащую в этой области, выходящую из начальной точки $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ и удаляющуюся в бесконечность. Пусть $s_{z_0 z}$ — длина дуги $z_0 L z$. Из неравенств $\Delta |w^{(k)}| \leqslant |\Delta w^{(k)}|$, где Δ — приращение, следует:

$$\left| \frac{d |w^{(k)}|}{ds} \right| \leqslant |w^{(k+1)}| \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

так что, если w — решение уравнения, то

$$\left| \frac{d |w^{(n-1)}|}{ds} \right| \leqslant |w^{(n)}| \leqslant \mu (|w^{(n-1)}| + \ldots + |w|).$$

Полагая $V = |w| + |w'| + \ldots + |w^{(n-1)}|$, мы получаем:

$$\left| \frac{dV}{ds} \right| \leqslant (\mu + 1) V; \quad V(z_1) \leqslant V(z_0) e^{(\mu+1) s_{z_0 z_1}}.$$

Выберем в качестве пути L, соединяющего z_0 с $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, путь, состоящий из дуги $\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1$ окружности $|z| = r_0$ и из отрезка $r_0 \leqslant |z| \leqslant r_1$ луча $\arg z = \varphi_1$. Пусть $0 < \varphi_1 - \varphi_0 < \alpha$. Тогда

$$s_{z_0 z_1} < (\alpha - 1) r_0 + |z_1|.$$

Таким образом:

$$|w^{(k)}(z)| < C e^{(\mu+1)|z|} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

где

$$C = V(z_0) e^{(\mu+1)(\alpha-1) r_0}.$$

Порядок экспоненциального роста решений уравнения не превышает единицы, а тип роста не превышает $\mu + 1$.

§ 2. Обобщение теоремы А. М. Ляпунова

Рассмотрим уравнение

$$L[w] = \sum_{k=0}^{n} P_k(z)\, w^{(k)}(z) = 0.$$

Введем переменную $\zeta = z^{\alpha}$, так что $\frac{d}{dz} = \alpha \zeta^{1-\frac{1}{\alpha}} \frac{d}{d\zeta}$,

$$\frac{d^k}{dz^k} = \alpha^k \zeta^{-\frac{k}{\alpha}} \sum_{h=1}^{k} a_{kh}(\alpha)\, \zeta^h \frac{d^h}{d\zeta^h},$$

причем

$$a_{kh}(\alpha) = a_{k-1,\, h-1}(\alpha) + \left(h - \frac{k-1}{\alpha}\right) a_{k-1,\, h}(\alpha).$$

Преобразованное уравнение имеет вид:

$$a_{nn}\alpha^n \zeta^{n-\frac{n}{\alpha}} P_n(\zeta^{\frac{1}{\alpha}}) \frac{d^n w}{d\zeta^n} +$$

$$+ \sum_{h=1}^{n-1} \left[\sum_{k=h}^{n} a_{kh} \alpha^k \zeta^{h-\frac{k}{\alpha}} P_k(\zeta^{\frac{1}{\alpha}}) \right] \frac{d^h w}{d\zeta^h} + P_0(\zeta^{\frac{1}{\alpha}})\, w = 0.$$

Пусть $P_k(z) = O(z^{p_k})$ при $z \to \infty$ и пусть $\alpha > 0$. Представив предыдущее уравнение в виде

$$L_{\alpha}[w] = \frac{d^n w}{d\zeta^n} - \sum_{h=1}^{n} q_h(\zeta,\ \alpha) \frac{d^{n-h} w}{d\zeta^{n-h}} = 0,$$

мы получим:

$$|q_h(\zeta,\ \alpha)| < A_h |\zeta|^{\beta_h},$$

где

$$\beta_h = -h + \frac{1}{\alpha} \max(0,\ p_{n-1} - p_n + 1,\ \ldots,\ p_{n-h} - p_n + h)$$

$$(h = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Для того чтобы коэффициенты $q_h(\zeta,\ \alpha)$ были ограничены, достаточно выбрать α так, чтобы выполнялись условия

$$\alpha \geqslant \max\left(0,\ \frac{p_{n-1} - p_n + 1}{h},\ \ldots,\ \frac{p_{n-h} - p_n + h}{h}\right)$$

$$(h = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

или

$$\alpha \geqslant \max\left(0,\ \frac{p_{n-1} - p_n + 1}{1},\ \frac{p_{n-2} - p_n + 2}{2},\ \ldots,\ \frac{p_0 - p_n + n}{n}\right).$$

Полагая

$$\alpha = r = \max\left(0,\ \frac{p_{n-1} - p_n + 1}{1},\ \ldots,\ \frac{p_{n-h} - p_n + h}{h},\ \ldots,\ \frac{p_0 - p_n + n}{n}\right),$$

$$\mu = \max(|q_1(\zeta,\ \alpha)|, |q_2(\zeta,\ \alpha)|, \ldots, |q_n(\zeta,\ \alpha)|)$$

мы получим:

$$\left|\frac{d^k w}{d\zeta^k}\right| < C e^{(\mu+1)|\zeta|},$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

откуда следует:

$$\left|\frac{d^k w}{dz^k}\right| < A\,|z|^{(r-1)k}\,e^{(\mu+1)|z|^r}.$$

Порядок экспоненциального роста решений не превосходит r, *а тип роста не превосходит* $\mu+1$.

r — ранг особенности уравнения при $z=\infty$.

§ 3. Предельный случай

Если $r=0$, то $p_{n-k}-p_n \leqslant -k$ при $k=1, 2, \ldots, n$. Уравнение $L[w]=0$ приводится к виду:

$$w^{(n)} - \sum_{k=1}^{n} q_k(z)\, w^{(n-k)} = 0,$$

где

$$|q_k(z)| < \frac{\mu}{|z|^k}.$$

Положим $z=e^{\zeta}$, так что $\frac{d}{dz}=\frac{1}{z}\frac{d}{d\zeta}$,

$$\frac{d^m}{dz^m} = \frac{1}{z^m}\sum_{k=1}^{m} a_{mk}\frac{d^k}{d\zeta^k} \qquad (a_{mk} \text{ — постоянные}).$$

Уравнение принимает вид:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{nk}\frac{d^k w}{d\zeta^k} - \sum_{h=1}^{n} z^h q_h(z) \sum_{k=1}^{n-h} a_{n-h,\,k}\frac{d^k w}{d\zeta^k} = 0.$$

Так как $|z^h q_h(z)| < \mu$, то уравнение приводится к виду:

$$\frac{d^n w}{d\zeta^n} - \sum_{k=1}^{n} \tilde{q}_k(\zeta)\frac{d^k w}{d\zeta^k} = 0,$$

где коэффициенты $\tilde{q}_k(\zeta)$ ограничены.

Следовательно,

$$|w| < Ce^{\nu|\zeta|} = Ce^{\nu\sqrt{\ln^2|z|+(\arg z)^2}} < C|z|^{\nu_1}, \quad \text{где}$$

$$\nu_1 > \nu, \text{ при } |\arg z| < \beta,\ |z| > e^{\sqrt[\nu\beta]{\nu_1^2-\nu^2}}.$$

Итак, равенство ранга нулю означает, что при $z\to\infty$ решения уравнения имеют степенной порядок роста.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения. М. — Л., 1950, стр. 44—47.