Доклады Академии наук СССР
1963. Том 149, № 6

МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В. В. ЛОХИН

ОБЩИЕ ФОРМЫ СВЯЗИ МЕЖДУ ТЕНЗОРНЫМИ ПОЛЯМИ В АНИЗОТРОПНОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЕ, СВОЙСТВА КОТОРОЙ ОПИСЫВАЮТСЯ ВЕКТОРАМИ, ТЕНЗОРАМИ ВТОРОГО РАНГА И АНТИСИММЕТРИЧНЫМИ ТЕНЗОРАМИ ТРЕТЬЕГО РАНГА

(Представлено академиком Л. И. Седовым 18 XII 1962)

Мы рассмотрим, в частности, задачу о структуре нелинейных соотношений для тензоров, характеризующих физические свойства текстур и кристаллов низших сингоний.

Примем ([1]), что модель бесконечно малой частицы сплошной среды описывается конечным набором характеристик — системой определяющих параметров $\mathfrak{S}_{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$, $\mathfrak{M}_{(l)}$ $(l = 1, 2, \ldots, s)$, $\mathfrak{P}_{(m)}$ $(m = 1, 2, \ldots, t)$. Первые из этих (переменных или постоянных) величин $\mathfrak{S}_{(k)}$ представляют собой геометрические характеристики (описывающие анизотропию среды), вторые $\mathfrak{M}_{(l)}$ — механические (скорость, плотность, деформация и вращение частицы и т. п.), остальные $\mathfrak{P}_{(m)}$ являются физическими или химическими характеристиками среды (например, температура, химический состав вещества, поляризация и намагниченность, коэффициенты вязкости, теплопроводности, электропроводности и т. д.).

Как известно, обычно система уравнений движения и состояния сплошной среды задается как совокупность инвариантных тензорных соотношений между искомыми функциями и элементами определяющего базиса. Чтобы выявить структуру этих тензорных соотношений, рассмотрим одну из тензорных функций, описывающих состояние или движение сплошной среды:

$$T^{i_1 i_2 \ldots i_n} = T^{i_1 i_2 \ldots i_n} (\mathfrak{S}_{(k)}, \mathfrak{M}_{(l)}, \mathfrak{P}_{(m)}).$$

Пусть $\overset{(1)}{\xi}_{i_1}, \overset{(2)}{\xi}_{i_2}, \ldots, \overset{(n)}{\xi}_{i_n}$ — компоненты произвольных n векторов $\overset{(1)}{\xi}, \overset{(2)}{\xi}, \ldots, \overset{(n)}{\xi}$ *. Полилинейная по компонентам векторов $\overset{(1)}{\xi}, \overset{(2)}{\xi}, \ldots, \overset{(n)}{\xi}$ функция $T^{i_1 i_2 \ldots i_n} \overset{(1)}{\xi}_{i_1} \overset{(2)}{\xi}_{i_2} \ldots \overset{(n)}{\xi}_{i_n}$ есть скалярная функция от инвариантов и совместных инвариантов элементов определяющего базиса и векторов $\overset{(1)}{\xi}, \overset{(2)}{\xi}, \ldots, \overset{(n)}{\xi}$. Функция φ, очевидно, имеет вид

$$\varphi = \sum_s k_s (\mathfrak{S}_{(k)}, \mathfrak{M}_{(l)}, \mathfrak{P}_{(m)}) J_s (\mathfrak{S}_{(k)}, \mathfrak{M}_{(l)}, \mathfrak{P}_{(m)}, \overset{(1)}{\xi}, \overset{(2)}{\xi}, \ldots, \overset{(n)}{\xi}),$$

где k_s — функции от системы инвариантов определяющих параметров $\{\mathfrak{S}_{(k)}, \mathfrak{M}_{(l)}, \mathfrak{P}_{(m)}\}$, а J_s — произведения совместных инвариантов элементов определяющего базиса и векторов $\overset{(1)}{\xi}, \overset{(2)}{\xi}, \ldots, \overset{(n)}{\xi}$ и инвариантов векторов $\overset{(1)}{\xi}, \overset{(2)}{\xi}, \ldots, \overset{(n)}{\xi}$, линейные по компонентам всех векторов $\overset{(1)}{\xi}_{i_1}, \overset{(2)}{\xi}_{i_2}, \ldots, \overset{(n)}{\xi}_{i_n}$.

В силу произвольности векторов $\overset{(1)}{\xi}, \overset{(2)}{\xi}, \ldots, \overset{(n)}{\xi}$ имеем ([7])

$$T^{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sum_s k_s \frac{\partial^n J_s}{\partial \overset{(1)}{\xi}_{i_1} \partial \overset{(2)}{\xi}_{i_2} \ldots \partial \overset{(n)}{\xi}_{i_n}}. \qquad (1)$$

Назовем базисными инвариантами совокупность функционально независимых инвариантов, составленных из компонент тензоров, образующих систему определяющих параметров такую, что значения независимых ком-

* Некоторые из них совпадают, если тензор T обладает внутренней симметрией ([3]).

понент всех тензоров, входящих в определяющий базис, однозначно выражаются через значения инвариантов из этой совокупности. Выбор базисных инвариантов не является, очевидно, однозначным.

Мы можем полагать теперь, что скалярные коэффициенты k_s, фигурирующие в формуле (1), зависят произвольным образом от базисных инвариантов. Ясно, что максимальное число линейно независимых слагаемых в правой части формулы (1) соответствует числу линейно независимых компонент тензора *.

Формула (1) раскрывает строение произвольной нелинейной тензорной функции, описывающей состояние или движение сплошной среды.

Пусть в систему определяющих параметров, состоящую из конечного числа величин, описывающих состояние и движение сплошной среды, входят только: 1) векторы $\overset{(n)}{b} = \overset{(n)}{b^i} Э_i$ $(n = 1, 2, \ldots)$; 2) симметричные тензоры второго ранга $\mathscr{G} = g^{ij}Э_iЭ_j$, $\overset{(m)}{\mathscr{E}} = \overset{(m)}{\varepsilon_{ij}} Э_iЭ_j$, $\overset{(m)}{\varepsilon^{ij}} = \overset{(m)}{\varepsilon^{ji}}$ $(m = 1, 2, \ldots)$; 3) антисимметричные тензоры второго ранга $\overset{(r)}{\Omega} = \overset{(r)}{\Omega^{ij}} Э_iЭ_j$, $\overset{(r)}{\Omega^{ij}} = -\overset{(r)}{\Omega^{ji}}$ $(r = 1, 2, \ldots)$; 4) антисимметричные тензоры третьего ранга $e = \Delta\, \epsilon^{ijk}Э_iЭ_jЭ_k = \Delta[Э_1(Э_2Э_3 - Э_3Э_2) + Э_2(Э_3Э_1 - Э_3Э_1) + Э_3(Э_2Э_1 - Э_1Э_2)]$, причем $\overset{(s)}{\Pi} = \overset{(s)}{\pi^{ijk}} Э_iЭ_jЭ_k$, $\overset{(s)}{\pi^{ijk}} = -\overset{(s)}{\pi^{ikj}}$ $(s = 1, 2, \ldots)$, где $Э_i$—орты системы координат; $\Delta = \pm 1/\sqrt{g}$, $\sqrt{g} = \mathrm{mod}\,|(Э_iЭ_j)|$, причем знак плюс соответствует правой, а знак минус — левой системе координат.

Тензор 3-го ранга $e = \Delta\, \epsilon^{ijk}Э_iЭ_jЭ_k$ инвариантен относительно собственно ортогональной группы преобразований координат, т. е. относительно всех вращений пространства вокруг неподвижной точки (без отражения). Компоненты тензора e определяются равенствами:

$$e^{ijk} = \Delta\, \epsilon^{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j \text{ или } i = k, \\ \Delta, & \text{если подстановка } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} \text{ четная}, \\ -\Delta, & \text{если подстановка } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} \text{ нечетная}. \end{cases}$$

Определяющие параметры именно такого типа характеризуют геометрические свойства (анизотропию) различных текстур и кристаллов низших сингоний.

Действительно, в качестве определяющих параметров, характеризующих анизотропию среды, можно ввести следующие величины ([5]):

Для текстур

1. Класс K_h $(\infty/\infty \cdot m)$: $I = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$.
2. Класс K (∞/∞): $I, E = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$.
3. Класс $C_{\infty v}$ $(\infty \cdot m)$: I, $\mathbf{e}_1$.
4. Класс $D_{\infty h}$ $(m \cdot \infty : m)$: I, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1$.
5. Класс C_∞ (∞): I, $\mathbf{e}_1$, $\Omega = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$.
6. Класс $C_{\infty h}$ $(\infty : m)$: I, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1$, Ω.
7. Класс D_∞ $(\infty : 2)$: I, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1$, E.

Для кристаллов

а) Триклинная сингония

8. Класс C_1 (1): $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.
9. Класс C_i $(\bar{2})$: $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$.

---

* Исследуя правую часть формулы (1), можно найти группу G внутренней и внешней симметрии ([3]) тензора T. Теорема из теории представлений групп (теорема о характерах) позволяет вычислить число линейно независимых тензоров данного ранга, инвариантных относительно группы G, т. е. число линейно независимых компонент тензора T. Число линейно независимых компонент p тензора T для разных случаев симметрии можно определить по таблицам размерностей групповых тензорных пространств ([3,4]).

б) Моноклинная сингония

10. Класс C_s (m): $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$.
11. Класс C_2 (2): $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$.
12. Класс C_{2h} ($2:m$): $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$.

в) Ромбическая сингония

13. Класс C_{2v} ($2 \cdot m$): $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2$.
14. Класс D_2 ($2:2$): $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$, E.
15. Класс D_{2h} ($m \cdot 2 : m$): $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$.

Векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ суть орты кристаллофизической системы координат ([6]). Произведения векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ представляют собой полиадные произведения.

Приведенный выше перечень определяющих величин вытекает из данных работ ([2], [7]). Мы оставили только независимые и существенные параметры ([5]).

Используя результаты работ ([8], [9]), можно выписать базисные инварианты и найти структуру любых инвариантных тензорных функций от произвольного числа векторов, симметричных и антисимметричных тензоров второго ранга и антисимметричных тензоров третьего ранга.

Заметим, что, в силу соотношений дуальности между антисимметричными тензорами (абсолютными или относительными) и относительными (иного веса) тензорами на единицу меньшего ранга, поставленная задача сводится к отысканию тензорных функций, инвариантных относительно собственно ортогональной группы преобразований координат от векторов и симметричных тензоров второго ранга. Отметим также, что группы симметрии наиболее общих тензорных функций в данном случае легко определяются как пересечение групп симметрии совокупности аргументов (принцип Неймана и Кюри ([10], [11])).

Зная группу симметрии тензорной функции, по таблицам размерностей групповых тензорных пространств ([3], [4]) можно найти максимальное число p линейно независимых слагаемых, которые следует сохранить в правой части найденного разложения (см. формулу (1)). Отбрасывая лишние члены, получаем формулы, которые являются по существу обобщением формулы Гамильтона — Кэли (см. ([1])).

Проиллюстрируем сказанное на примере текстур.

Пример 1. Наиболее общие скалярные, векторные и тензорные функции (второго, третьего и четвертого рангов) от скаляров $\beta_{(n)}$ ($n = 1, 2, \ldots, N$) и фундаментального тензора $\mathcal{G} = g^{ij}\text{Э}_i\text{Э}_j$ имеют вид: $\alpha = k\,(\beta^{(n)})$, $a^i = 0$, $A^{ij} = kg^{ij}$, $A^{ij\alpha} = 0$, $A^{ij\alpha\beta} = k_1 g^{ij}g^{\alpha\beta} + k_2 g^{i\alpha}g^{j\beta} + k_3 g^{i\beta}g^{j\alpha}$. Коэффициенты k и k_i — произвольные функции от скаляров $\beta_{(n)}$.

Пример 2. Произвольные функции от скаляров $\beta_{(n)}$, метрического тензора $\mathcal{G} = g^{ij}\text{Э}_i\text{Э}_j$ и вектора $b = b^i\text{Э}_i$ имеют вид: $\alpha = k\,(\beta_{(n)}, b^i b_i)$, $a^i = kb^i$, $A^{ij} = k_1 g^{ij} + k_2 b^i b^j$, $A^{ij\alpha} = k_1 g^{ij}b^\alpha + k_2 g^{i\alpha}b^j + k_3 g^{j\alpha}b^i + k_4 b^i b^j b^\alpha$, $A^{ij\alpha\beta} = k_1 g^{ij}g^{\alpha\beta} + k_2 g^{i\alpha}g^{j\beta} + k_3 g^{i\beta}g^{j\alpha} + k_4 g^{ij}b^\alpha b^\beta + k_5 g^{i\alpha}b^j b^\beta + k_6 g^{i\beta}b^j b^\alpha + k_7 g^{\alpha\beta}b^i b^j + k_8 g^{i\beta}b^i b^\alpha + k_9 g^{j\alpha}b^i b^\beta + k_{10} b^i b^j b^\alpha b^\beta$, где k и k_i — любые функции от скаляров $\beta_{(n)}$ и $|b|^2 = b^i b_i$.

Пример 3. Тензорные функции от вырожденного тензора второго ранга $B = B^{ij}\text{Э}_i\text{Э}_j = b^i b^j \text{Э}_i\text{Э}_j$ скаляров $\beta_{(n)}$ и метрического тензора $\mathcal{G} = g^{ij}\text{Э}_i\text{Э}_j$ получаются как частный случай из функций примера 2: $\alpha = k\,(\beta_{(n)}, B^i{}_i)$, $a^i = 0$, $A^{ij} = k_1 g^{ij} + k_2 B^{ij}$, $A^{ij\alpha} = 0$, $A^{ij\alpha\beta} = k_1 g^{ij}g^{\alpha\beta} + k_2 g^{i\alpha}g^{j\beta} + k_3 g^{i\beta}g^{j\alpha} + k_4 g^{ij}B^{\alpha\beta} + k_5 g^{i\alpha}B^{j\beta} + k_6 g^{i\beta}B^{j\alpha} + k_7 g^{\alpha\beta}B^{ij} + k_8 g^{j\beta}B^{i\alpha} + k_9 g^{j\alpha}B^{i\beta} + k_{10} B^{ij}B^{\alpha\beta}$, где k и k_i — произвольные функции от скаляров $\beta_{(n)}$ и единственного инварианта $B^i{}_i$ тензора $B = B^{ij}\text{Э}_i\text{Э}_j$.

В примерах 1—3 число слагаемых в правой части каждой из формул совпадает с размерностью соответствующего тензорного пространства. Все слагаемые в указанных формулах линейно независимы.

Пример 4. Общие формулы функций, зависящих от изотропного тензора третьего ранга $E = E^{ijk}\mathfrak{Э}_i\mathfrak{Э}_j\mathfrak{Э}_k = \omega\Delta e^{ijk}\mathfrak{Э}_i\mathfrak{Э}_j\mathfrak{Э}_k$, скаляров $\beta_{(n)}$ и фундаментального тензора $\mathcal{G} = g^{ij}\mathfrak{Э}_i\mathfrak{Э}_j$ имеет вид: $\alpha = k(\beta_{(n)}, \omega^2)$, $a^i = 0$, $A^{ij} = kg^{ij}$, $A^{ij\alpha} = ke^{ij\alpha}$, $A^{ij\alpha\beta} = k_1g^{ij}g^{\alpha\beta} + k_2g^{i\alpha}g^{j\beta} + k_3g^{i\beta}g^{j\alpha}$, где k и k_i зависят от $\beta_{(n)}$ и ω^2.

Пример 5. Общий вид зависимости от вырожденного тензора второго ранга $B = B^{ij}\mathfrak{Э}_i\mathfrak{Э}_j = b^ib^j\mathfrak{Э}^i\mathfrak{Э}^j$, изотропного тензора третьего ранга $E = E^{ijk}\mathfrak{Э}_i\mathfrak{Э}_j\mathfrak{Э}_k = \omega\Delta e^{ijk}\mathfrak{Э}_i\mathfrak{Э}_j\mathfrak{Э}_k$ и метрического тензора $\mathcal{G} = g^{ij}\mathfrak{Э}_i\mathfrak{Э}_j$ выглядит так: $\alpha = k(\beta_{(n)}, B_i^i, \omega^2)$, $a^i = 0$, $A^{ij} = k_1g^{ij} + k_2B^{ij}$, $A^{ij\alpha} = k_1e^{ij\alpha} + k_2B_\gamma^ie^{\gamma j\alpha} + k_3e^{ij\gamma}B_\gamma^\alpha$, $A^{ij\alpha\beta} = k_1g^{ij}g^{\alpha\beta} + k_2g^{i\alpha}g^{j\beta} + k_3g^{i\beta}g^{j\alpha} + k_4g^{ij}B^{\alpha\beta} + k_5g^{i\alpha}B^{j\beta} + k_6g^{i\beta}B^{j\alpha} + k_7g^{\alpha\beta}B^{ij} + k_8g^{j\beta}B^{i\alpha} + k_9g^{j\alpha}B^{i\beta} + k_{10}B^{ij}B^{\alpha\beta}$, где k и k_i — функции от $\beta_{(n)}$, B_i^i и ω^2.

Пример 6. Наиболее общие функции от антисимметричного тензора $\Omega = \Omega^{ij}\mathfrak{Э}_i\mathfrak{Э}_j$, вектора $\mathbf{b} = \mathbf{b}^i\mathfrak{Э}_i$ и метрического тензора $\mathcal{G} = g^{ij}\mathfrak{Э}_i\mathfrak{Э}_j$ при условии, что $\mathbf{b} = b\,\mathbf{e}_1$, $\Omega = \varkappa(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)$, где $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ —взаимно перпендикулярные векторы, имеют вид: $\alpha = k(\beta_{(n)}, b^ib_i, \Omega_{ij}\Omega^{ij})$, $a^i = kb^i$, $A^{ij} = k_1g^{ij} + k_2b^ib^j + k_3\Omega^{ij}$, $A^{ij\alpha} = k_1g^{ij}b^\alpha + k_2g^{i\alpha}b^j + k_3g^{j\alpha}b^i + k_4\Omega^{ij}b^\alpha + k_5\Omega^{i\alpha}b^j + k_6\Omega^{j\alpha}b^i + k_7b^ib^jb^\alpha$, $A^{ij\alpha\beta} = k_1g^{ij}g^{\alpha\beta} + k_2g^{i\alpha}g^{j\beta} + k_3g^{i\beta}g^{j\alpha} + k_4g^{ij}b^\alpha b^\beta + k_5g^{i\alpha}b^jb^\beta + k_6g^{i\beta}b^jb^\alpha + k_7g^{\alpha\beta}b^ib^j + k_8g^{j\beta}b^ib^\alpha + k_9g^{j\alpha}b^ib^\beta + k_{10}b^ib^jb^\alpha b^\beta + k_{11}g^{ij}\Omega^{\alpha\beta} + k_{12}g^{i\alpha}\Omega^{j\beta} + k_{13}g^{i\beta}\Omega^{j\alpha} + k_{14}g^{\alpha\beta}\Omega^{ij} + k_{15}g^{j\beta}\Omega^{i\alpha} + k_{16}g^{j\alpha}\Omega^{i\beta} + k_{17}\Omega^{ij}\Omega^{\alpha\beta} + k_{18}\Omega^{i\alpha}\Omega^{j\beta} + k_{19}\Omega^{ij}b^\alpha b^\beta$, где k и k_i — произвольные функции от $\beta_{(n)}$, b^ib_i, $\Omega_{ij}\Omega^{ij}$.

Пример 7. Общие формы зависимости от вырожденного тензора $B^{ij}\mathfrak{Э}_i\mathfrak{Э}_j = b^ib^j\mathfrak{Э}_i\mathfrak{Э}_j$, антисимметричного тензора $\Omega = \Omega^{ij}\mathfrak{Э}_i\mathfrak{Э}_j$ (см. пример 6), скаляров $\beta_{(n)}$ и метрического тензора $\mathcal{G} = g^{ij}\mathfrak{Э}_i\mathfrak{Э}_j$ можно представить в виде: $\alpha = k(\beta_{(n)}, B^i{}_i, \Omega^{ij}\Omega_{ij})$, $a^i = 0$, $A^{ij} = k_1g^{ij} + k_2B^{ij} + k_3\Omega^{ij}$, $A^{ij\alpha} = 0$, $A^{ij\alpha\beta} = k_1g^{ij}g^{\alpha\beta} + k_2g^{i\alpha}g^{j\beta} + k_3g^{i\beta}g^{j\alpha} + k_4g^{ij}B^{\alpha\beta} + k_5g^{i\alpha}B^{j\beta} + k_6g^{i\beta}B^{j\alpha} + k_7g^{\alpha\beta}B^{ij} + k_8g^{j\beta}B^{i\alpha} + k_9g^{j\alpha}B^{i\beta} + k_{10}B^{ij}B^{\alpha\beta} + k_{11}g^{ij}\Omega^{\alpha\beta} + k_{12}g^{i\alpha}\Omega^{j\beta} + k_{13}g^{i\beta}\Omega^{j\alpha} + k_{14}g^{\alpha\beta}\Omega^{ij} + k_{15}g^{j\beta}\Omega^{i\alpha} + k_{16}g^{j\alpha}\Omega^{i\beta} + k_{17}\Omega^{ij}\Omega^{\alpha\beta} + k_{18}\Omega^{i\alpha}\Omega^{j\beta} + k_{19}\Omega^{ij}B^{\alpha\beta}$, где k и k_i суть любые функции от $\beta_{(n)}$, B_i^i и $\Omega^{ij}\Omega_{ij}$.

Линейная независимость слагаемых в правых частях формул в примерах 4—7 либо следует непосредственно, либо ее можно проверить с помощью вычисления соответствующего определителя.

Автор приносит глубокую благодарность акад. Л. И. Седову за плодотворное обсуждение и советы.

Поступило
14 XII 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. И. Седов, Введение в механику сплошной среды, М., 1962. [2] Ю. И. Сиротин, ДАН, **133**, № 2, 321 (1960). [3] Ю. И. Сиротин, Кристаллография, **5**, в. 2, 171 (1960). [4] С. Багавантам, Т. Венкатарайуду, Теория групп и ее применение к физическим проблемам, ИЛ, 1959. [5] В. В. Лохин, ДАН, **149**, № 2 (1963). [6] А. В. Шубников, Е. Е. Флинт, Г. Б. Бокий, Основы кристаллографии, М.—Л., 1940. [7] F. G. Smith, R. S. Rivlin, Quart. Appl. Math., **15**, 308 (1957). [8] A. J. M. Spencer, Arch. Rat. Mech. and Anal., **7**, № 1, 64 (1961). [9] A. J. M. Spencer, P. S. Rivlin, Arch. Rat. Mech. and Anal., **9**, № 1, 45 (1962). [10] F. E. Neumann, Vorlesungen über Theorie der Elasticität, Leipzig, 1885. [11] P. Curie, J. de Phys., (3), **3**, 393 (1894); Oeuvres, Paris, 1908.