

А. Н. ШЕРСТНЕВ

## О БУЛЕВСКИХ ЛОГИКАХ

### ВВЕДЕНИЕ

Известно, что к необходимости обобщения классической теории вероятностей приводит задача построения математической модели квантовой механики. Еще Нейманом и Биркгофом [1] было отмечено, что высказывания о квантово-механической системе не образуют булевскую алгебру. Не касаясь физической степени достоверности, отметим, что математически удачной представляется схема, основанная на понятии булевой логики (см. [4], [7]).

В настоящей работе рассмотрены некоторые задачи, связанные с понятием булевой логики. В частности, показано, что изучение взаимоотношений случайного метрического пространства [9] с естественными теоретико-вероятностными их реализациями приводит к понятию логики множеств — теоретико-множественному варианту булевой логики. Оказывается, среди логик множеств нет изоморфных квантово-механической специализации булевой логики (см. ниже Предложение 2.9).

Далее получена классификация полных булевских логик с размерностью. Соответствующие результаты являются обобщением результатов Люмиса [3].

### § 1. Предварительные сведения

Пусть  $E$  — упорядоченное множество. Говорят, что  $E$  — множество с ортодополнением, если в  $E$  определена инволютивная перестановка  $'$ , причем  $b' \leq a'$  всякий раз, когда  $a \leq b$  ( $a, b \in E$ ). Элементы  $a$  и  $b$  будем называть *несовместными* (и писать  $a \perp b$ ), если  $a \leq b'$ ; семейство  $\{a_i\}$ , образованное из попарно несовместных элементов, будем называть  $\perp$ -семейством; символ  $a \underline{\vee} b$  означает отрицание утверждения  $a \perp b$ . Всюду в дальнейшем равенство  $b = a_1 + a_2$  (или более общее  $b = \Sigma a_i$ ) означает, что, во-первых,  $a_1 \perp a_2$  (соответственно,  $\{a_i\}$  —  $\perp$ -семейство), во-вторых,  $b = \sup \{a_1, a_2\}$  (соответственно,  $b = \sup a_i$ ). Вместо  $\sup$ ,  $\inf$  мы будем употреблять символы  $\vee$ ,  $\wedge$ ; иногда вместо  $a \wedge b$  будет написано просто  $ab$ .

1.1. Определение. Множество  $E$  с ортодополнением  $'$  назовем *булевой логикой*, если

(Л<sub>I</sub>)  $E$  обладает наибольшим элементом 1,

(Л<sub>II</sub>)  $a + a' = 1$  для всех  $a \in E$ ,

(Л<sub>III</sub>)  $a \leq b$  влечет  $b = a + c$  при некотором  $c$ ,

(Л) если  $a \perp b$ , то существует  $a + b$ .

В приложениях булевская логика призвана служить множеством высказываний о физической системе. С этой точки зрения естественно рассматривать модель замкнутую относительно счетного множества операций над высказываниями: мы будем говорить, что  $E$  — булевская  $\sigma$ -логика, если помимо перечисленных требований для всякой

$\perp$ -последовательности  $a_1, a_2, \dots$  существует  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Можно пойти еще

далее и рассматривать логики, в которых  $\Sigma a_i$  существует для произвольного  $\perp$ -семейства  $\{a_i\}$ ; тогда булевскую логику мы будем называть *полной*. Отметим, что в работах [4], [7] логикой называется то, что здесь названо  $\sigma$ -логикой. Следуя [7], назовем элементы  $a, b$  булевской логики  $E$  *одновременно проверяемыми* ( $a \longleftrightarrow b$ ), если найдутся попарно несовместные элементы  $a_1, b_1, c$  такие, что  $a = a_1 + c$ ,  $b = b_1 + c$ .

1.2. Следствие. Во всякой булевской логике  $E$  (а) существует наименьший элемент  $0$ , причем  $0' = 1, 1' = 0$ ; (б) если  $\{a_i\}$  — произвольное семейство элементов из  $E$ , то  $(\bigvee a_i)' = \bigwedge a_i'$  в том смысле, что если определена одна из частей равенства, то определена и другая, и они равны; (в) элемент  $c$  в требовании  $(\mathbb{L}_{III})$  определен однозначно:  $c = a'b$ ; (г) пусть  $\{a_i\}$  — произвольное  $\perp$ -семейство,  $a \in E$ , причем  $a \longleftrightarrow a_i$  при каждом  $i$  и существуют  $\Sigma a_i, \Sigma a a_i$ ; тогда  $a \longleftrightarrow \Sigma a_i$  и  $a (\Sigma a_i) = \Sigma a a_i$ .

Доказательство. Проверим лишь последнее утверждение. Положим  $c = \Sigma a a_i, b = \Sigma a_i$ , тогда  $c \leq a, c \leq b$ . Так как  $a \longleftrightarrow a_i$  при каждом  $i$ , имеем  $ac' \leq a (a a_i)' \leq a_i'$ , то есть  $ac' \perp b$ . Из представления  $a = c + ac', b = c + bc'$  теперь следует, что  $a \longleftrightarrow b$  и  $c = ab$ .

1.3. Определение. Непустое подмножество  $A$  булевской логики  $E$  назовем *булевской подалгеброй в  $E$* , если

- (а)  $a \in A$  влечет  $a' \in A$ ;
- (б) если  $a, b \in A$ , то  $a \longleftrightarrow b$ ;
- (в)  $a + b \in A$  всякий раз, когда  $a, b \in A, a \perp b$ .

Ясно, как следует видоизменить требование (в), чтобы определить булевскую  $\sigma$ -подалгебру или полную булевскую подалгебру в  $E$ .

1.4. Следствие. Пусть  $A$  — булевская подалгебра в  $E$  и  $a, b \in A$ ; если  $a \leq b$ , то существует элемент  $c \in A$  такой, что  $b = a + c$ . В частности, если  $E$  является своей булевской подалгеброй ( $\sigma$ -подалгеброй, полной булевской подалгеброй), то  $E$  есть булевская алгебра (соответственно,  $\sigma$ -алгебра, полная булевская алгебра).

Доказательство. Действительно, если  $a \leq b$  и  $a, b \in A$ , то  $b' \in A$  и, в силу 1.3 (в),  $a + b' \in A$ . Следовательно,  $a'b = (a + b')' \in A$  и остается воспользоваться 1.2 (в). Пусть  $E$  является своей булевской подалгеброй; тогда из 1.3 (б) следует, что  $E$  — решетка. Для заданных  $a, b, c$  обозначим  $a_1 = abc', a_2 = acb', a_3 = abc$ . Тогда  $a \wedge (b \vee c) = a_1 + a_2 + a_3 = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ , то есть справедливо дистрибутивное тождество.

1.5. Предложение. Всякая булевская подалгебра в булевской логике  $E$  содержится в некоторой максимальной подалгебре, причем последняя является  $\sigma$ -подалгеброй (полной булевской подалгеброй), коль скоро  $E$  — булевская  $\sigma$ -логика (соответственно, полная булевская логика).

По сравнению с предложением 3.13 [7] здесь имеется лишь дополнительное утверждение для случая полной булевской подалгебры, которое почти не нуждается в каких-либо дополнительных комментариях.

1.6. Предложение. Центр  $C_E$  булевской логики  $E$  (то есть семейство всех тех элементов из  $E$ , которые одновременно прове-

ряемы со всеми элементами  $E$ ) является булевой подалгеброй в  $E$ , причем последняя полна, коль скоро полна  $E$ .

Доказательство. Первое утверждение является содержанием предложения 4.1 [7]. Пусть далее  $E$  — полна и  $\{a_i\}$  — произвольное  $\perp$ -семейство из  $C_E$ , а  $b$  — произволен. Поскольку  $b \leftarrow \rightarrow a_i$  при каждом  $i$ , то, в силу 1.2 (г),  $b \leftarrow \rightarrow \Sigma a_i$ , то есть  $\Sigma a_i \in C_E$ .

При аксиоматическом построении квантовой механики рассматривается булевская  $\sigma$ -логика  $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$  замкнутых подпространств бесконечномерного сепарабельного комплексного гильбертова пространства  $\mathfrak{H}$ , причем порядок в  $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$  определен включением, а инволютивная перестановка суть операция ортогонального дополнения ( $\perp$ ). Всякая максимальная булевская подалгебра в  $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$  определяется некоторым ортогональным базисом  $\{a_1, a_2, \dots\}$  в  $\mathfrak{H}$  и получается как семейство подпространств  $\mathfrak{H}$ , представимых ортогональными суммами вида  $a_{i_1} + a_{i_2} + \dots$  (если элементы базиса  $a_i$  отождествить с соответствующими одномерными подпространствами).

Аналогично может быть определена логика, образованная из подпространств пространства  $\mathfrak{H}$ , присоединенных к некоторой фиксированной слабо замкнутой алгебре  $M$  ограниченных линейных операторов в  $\mathfrak{H}$ , причем подпространство  $\mathfrak{M}$  присоединено к  $M$  тогда и только тогда, когда оператор  $P_{\mathfrak{M}}$  проектирования на  $\mathfrak{M}$  принадлежит  $M$  (см. [5], стр. 141).

Отметим, наконец, что можно рассматривать логику  $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$  и в случае, когда  $\mathfrak{H}$  имеет произвольную размерность.

Аналогом измеримой функции, связанной с множеством высказываний, в случае булевской логики является понятие наблюдаемой. Перейдем к соответствующим определениям.

1.7. Определение. Отображение  $h$  булевской логики  $E$  в булевскую логику  $E_1$  назовем *гомоморфизмом*, если

- (а)  $h(1) = 1$ ,
- (б)  $a \perp b$  влечет  $h(a + b) = h(a) + h(b)$ .

Если, кроме того,  $h^{-1}$  отображение, причем  $h^{-1}$  является гомоморфизмом  $E_1$  в  $E$ , будем говорить, что  $h$  — *изоморфизм*. В случае, когда вместо (б) выполняется более сильное соотношение:  $h(a_1 + a_2 + \dots) = h(a_1) + h(a_2) + \dots$ , — гомоморфизм  $h$  называется  *$\sigma$ -гомоморфизмом*.

1.8. Следствие. *Всякий гомоморфизм  $h$  обладает свойствами:*

- (а)  $a \leq b$  влечет  $h(a) \leq h(b)$ ,
- (б)  $h(a') = h(a)'$ ,
- (в)  $h(0) = 0$ .

Всякий  $\sigma$ -гомоморфизм борелевской алгебры  $\mathfrak{B}(R)$  подмножеств числовой прямой в булевскую  $\sigma$ -логику  $E$  называется *наблюдаемой* (см. [4], [7]). Если  $\alpha$  — наблюдаемая, то соответствующий гомоморфный образ борелевской алгебры (будем обозначать его  $\alpha(\mathfrak{B})$ ) является подалгеброй в  $E$ . Семейство  $\{\alpha_i\}$   $\sigma$ -гомоморфизмов  $\mathfrak{B}(R)$  в булевскую  $\sigma$ -логику  $E$  назовем *одновременно наблюдаемым*<sup>1</sup>, если существует булевская подалгебра  $A$  в  $E$ , содержащая все подалгебры  $\alpha_i(\mathfrak{B})$ .

## § 2. Случайные метрики и логики множеств

Здесь мы введем теоретико-множественную специализацию понятия булевской логики и покажем, каким образом эта конструкция связана с понятием случайной метрики.

<sup>1</sup> Хотя это определение формально не совпадает с соответствующим определением в [7], оно эквивалентно последнему в силу теоремы 3.1 [7].

2.1. Определение. Непустое семейство  $\mathcal{E}$  подмножеств некоторого множества  $\Omega$ , упорядоченное по включению, назовем *логикой множеств* в  $\Omega$ , если инволютивная перестановка ' в  $\mathcal{E}$  суть операция теоретико-множественного дополнения  $C$  и удовлетворяются требования  $(\mathcal{L}_I) - (\mathcal{L}_{III}), (\mathcal{L})$ .

2.2. Следствие. Пусть  $\mathcal{E}$  — логика множеств в  $\Omega$ ;

(а) наибольшим элементом в  $\mathcal{E}$  является  $\Omega$ , а наименьшим — пустое множество  $\emptyset$ ;

(б)  $X \perp Y$  тогда и только тогда, когда  $X \cap Y = \emptyset$ ,  $X, Y \in \mathcal{E}$ ;

(в)  $X \perp Y$  влечет  $\sup\{X, Y\} = X \cup Y$ .

2.3. Предложение. Непустое семейство  $\mathcal{E}$  подмножеств множества  $\Omega$  является логикой множеств в  $\Omega$  тогда и только тогда, когда

$(\mathcal{L}M_I)$  объединение конечного семейства попарно непересекающихся множеств из  $\mathcal{E}$  принадлежит  $\mathcal{E}$ ,

$(\mathcal{L}M_{II}) CX \in \mathcal{E}$ , если  $X \in \mathcal{E}$ .

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно. Пусть теперь непустое семейство  $\mathcal{E}$  подмножеств множества  $\Omega$  таково, что удовлетворяются условия  $(\mathcal{L}M_I), (\mathcal{L}M_{II})$ . Так как  $\mathcal{E}$  не пусто, существует  $X \in \mathcal{E}$ . В силу  $(\mathcal{L}M_{II}), CX \in \mathcal{E}$  и, согласно  $(\mathcal{L}M_I)$ ,  $X \cup CX = \Omega \in \mathcal{E}$ , то есть  $(\mathcal{L}_I)$  удовлетворяется. Если  $X, Y \in \mathcal{E}$  и  $X \cap Y = \emptyset$ , то, в силу  $(\mathcal{L}M_I)$ ,  $X \cup Y \in \mathcal{E}$ ; поскольку порядок в  $\mathcal{E}$  определяется включением,  $X \cup Y = \sup\{X, Y\}$ , то есть  $(\mathcal{L})$  удовлетворяется. Если  $X \subset Y$ , то  $Z = C(X \cup CY) \in \mathcal{E}$  в силу  $(\mathcal{L}M_I), (\mathcal{L}M_{II})$  и, кроме того,  $\sup\{X, Z\} = X \cup Z = Y$ , то есть  $(\mathcal{L}_{III})$  удовлетворяется. Утверждение доказано.

2.4. Следствие. Всякая булевская подалгебра ( $\sigma$ -подалгебра) логики множеств является некоторой алгеброй (соответственно,  $\sigma$ -алгеброй) множеств.

2.5. Теорема. Если  $\alpha$  — наблюдаемая со значениями в булевской  $\sigma$ -логике множеств  $\mathcal{E}$  в  $\Omega$ , то существует действительная функция  $f$ , однозначно определенная (на  $\Omega$ ) и измеримая относительно некоторой  $\sigma$ -алгебры множеств  $\mathfrak{A} \subset \mathcal{E}$ , причем

$$\alpha U = f^{-1}(U), \quad U \in \mathfrak{B}(R). \quad (*)$$

Более того, всякое семейство  $\{\alpha_i\}$ , наблюдаемых со значениями в  $\mathcal{E}$ , одновременно наблюдаемо тогда и только тогда, когда существует  $\sigma$ -алгебра множеств  $\mathfrak{A} \subset \mathcal{E}$  и семейство  $\{f_i\}$  действительных  $\mathfrak{A}$ -измеримых функций таких, что для всякого  $i$ :  $\alpha_i U = f_i^{-1}(U)$ ,  $U \in \mathfrak{B}(R)$ .

Доказательство. Семейство  $\alpha(\mathfrak{B})$  является булевской  $\sigma$ -подалгеброй булевской логики множеств  $\mathcal{E}$ ; таким образом, в силу 2.4, наблюдаемая  $\alpha$  является  $\sigma$ -гомоморфизмом борелевской алгебры  $\mathfrak{B}(R)$  в  $\sigma$ -алгебру множеств  $\alpha(\mathfrak{B})$ . В силу предложения 3.3 [7], существует действительная функция  $f$ , однозначно определенная и удовлетворяющая соотношению (\*). Второе утверждение следует таким же образом из определения одновременной наблюдаемости семейства  $\{\alpha_i\}$ .

Квантово-механические системы являются примером систем, в которых некоторые физические величины принципиально одновременно не наблюдаемы. Если мы имеем распределения, отвечающие физическим величинам в такой системе, то функции, соответствующие этим распределениям, заведомо не могут быть измеримыми относительно одной и той же алгебры множеств.

Подобная ситуация может возникнуть и в рамках чисто математической задачи. Пусть задано некоторое множество функций распределения  $\{F_i\}$  и некоторое  $n$ -арное отношение  $\Gamma$  в этом множестве. Требуется доказать существование вероятностного пространства  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  и семейства случайных величин  $\{f_i\}$  таких, что для каждого  $i$  функция распределения величины  $f_i$  есть  $F_i$ , причем

$$\tilde{\Gamma}(f_{i_1}, \dots, f_{i_n}) \text{ всякий раз, когда } \Gamma(F_{i_1}, \dots, F_{i_n}),$$

где  $\tilde{\Gamma}$  — некоторое  $n$ -арное отношение в множестве случайных величин (может быть, некоторым образом связанное с  $\Gamma$ ).

Рассмотрим, например, задачу представления случайного метрического пространства некоторым семейством случайных величин. Отсылая читателя за более подробными формулировками к работам [8], [9], напомним, что множество  $S = \{p, q, r, \dots\}$  называется случайным метрическим пространством, если задано отображение  $(p, q) \rightarrow pq$  множества  $S \times S$  в множество  $B$  хвостов распределений неотрицательных случайных величин (упорядоченное естественным образом), причем (наряду с аналогами двух других аксиом метрического пространства) выполняется неравенство треугольника в следующей форме:

$$\Gamma: pq \leq \mu(pr, rq) \text{ для всех } p, q, r \text{ из } S,$$

где  $\mu$  — некоторая функция треугольника (закон композиции, определяющий на  $B$  структуру коммутативной упорядоченной полугруппы). В соответствии с описанным выше общим подходом мы имеем здесь семейство  $\{pq\}_{p, q \in S}$  хвостов распределений с тернарным отношением  $\Gamma$ .

Под задачей представления случайного метрического пространства  $S$  семейством случайных величин мы будем понимать задачу отыскания вероятностного пространства  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  и семейства  $\mathfrak{A}$ -измеримых действительных функций  $\{d_{pq}\}_{p, q \in S}$  таких, что для любых  $p, q, r$  из  $S$ :

$$P\{d_{pq} \geq x\} = pq(x), P\{d_{pr} \geq x\} = pr(x), P\{d_{rq} \geq x\} = rq(x) \quad (\dagger)$$

и

$$\tilde{\Gamma}: P\{d_{pq} \leq d_{pr} + d_{rq}, d_{pr} \leq d_{pq} + d_{rq}, d_{rq} \leq d_{pq} + d_{pr}\} = 1.$$

Эта задача является фактически задачей согласования структуры случайного метрического пространства со структурой пространства Шпачека [6], [9]. В этом направлении можно сформулировать следующий результат<sup>1</sup>:

2.6. Теорема, [9]. Если  $S$  — случайное метрическое пространство с функцией треугольника  $\mu_0$ , то задача согласования структуры случайного метрического пространства со структурой пространства Шпачека разрешима.

Соотношение  $\tilde{\Gamma}$ , указанное выше, — не единственно возможное; можно требовать, например, выполнения менее жестких требований: чтобы левая часть в соотношении  $\tilde{\Gamma}$  была не меньше некоторого  $\gamma$  ( $0 < \gamma \leq 1$ ) или даже чтобы

$$\tilde{\Gamma}_0: P\{d_{pq} \leq d_{pr} + d_{rq}, d_{pr} \leq d_{pq} + d_{rq}, d_{rq} \leq d_{pq} + d_{pr}\} > 0.$$

<sup>1</sup> Ниже будут использованы следующие специальные функции треугольника:

$$\mu_0: \mu_0(\xi, \eta)(x) = \inf_{0 \leq t \leq 1} \max\{\xi(tx), \eta((1-t)x)\},$$

$$\mu_1: \mu_1(\xi, \eta)(x) = \inf_{0 \leq t \leq 1} \min\{\xi(tx) + \eta((1-t)x), 1\},$$

$$\mu_w: \mu_w(\xi, \eta)(x) = \eta(x) - \int_0^x \xi(x-s) d\eta(s).$$

Можно отметить следующие относящиеся сюда утверждения:

- (1) существуют случайные метрические пространства с функцией треугольника  $\psi_1$ , для которых при любом выборе распределения  $P$ , подчиненного условию  $(\dot{\gamma})$ , заведомо неразрешима задача  $\tilde{\Gamma}_0$ ,  
 (2) сколь бы ни было мало  $\varepsilon > 0$ , найдется случайное метрическое пространство с функцией треугольника  $\psi_w$  такое, что при любом выборе  $P$ , подчиненного условию  $(\dot{\gamma})$ , заведомо неразрешима задача

$$\tilde{\Gamma}_\varepsilon : P\{d_{pq} \leq d_{pr} + d_{rq}, d_{pr} \leq d_{pq} + d_{rq}, d_{rq} \leq d_{pq} + d_{pr}\} \geq \varepsilon \text{ для всех } p, q, r.$$

М. С. Матвейчук предложил автору следующие простые примеры трехточечных случайных метрических пространств  $(S = \{p, q, r\})$ , из которых следует справедливость сформулированных утверждений:

- (1) Рассмотрим последовательности чисел

$$x_{pq}^1, x_{pq}^2, \dots, x_{pr}^1, x_{pr}^2, \dots, x_{rq}^1, x_{rq}^2, \dots,$$

определяемые рекуррентными соотношениями:

$$x_{pq}^1 = x_{pr}^1 = 0, x_{rq}^1 = 1, x_{pq}^j = x_{pr}^{j-1} + x_{rq}^{j-1} + 1, x_{pr}^j = x_{rq}^{j-1} + x_{pq}^j + 1, \\ x_{rq}^j = x_{pq}^j + x_{pr}^j + 1, j > 1,$$

и положим

$$kl(x) = \frac{1}{2^j}, \text{ если } x_{kl}^j < x \leq x_{kl}^{j+1}, k, l \in \{p, q, r\}, k \neq l, j = 1, 2, \dots, \\ rq(1) = 1.$$

Непосредственно проверяется, что  $S = \{p, q, r\}$  — случайное метрическое пространство с функцией треугольника  $\psi_1$ . Чтобы удовлетворить условию  $(\dot{\gamma})$ , мы можем помещать неотрицательную массу лишь в точки с координатами  $(x_{pq}^{i_1}, x_{pr}^{i_2}, x_{rq}^{i_3})$ ,  $i_1, i_2, i_3 = 1, 2, 3, \dots$ , но при любом таком выборе  $P$ :

$$P\{d_{pq} \leq d_{pr} + d_{rq}, d_{pr} \leq d_{pq} + d_{rq}, d_{rq} \leq d_{pq} + d_{pr}\} = 0.$$

- (2) Рассмотрим рекуррентные соотношения:

$$x_{pq}^1 = x_{pr}^1 = 1, x_{rq}^1 = 2, x_{pq}^j = x_{pr}^{j-1} + x_{rq}^{j-1} + 1, x_{pr}^j = x_{pq}^{j-1} + x_{pr}^j + 1, \\ x_{pq}^j = x_{pr}^j + x_{rq}^j + 1, j > 1.$$

Пусть  $\varepsilon > 0$ ; выберем  $N$  столь большим, чтобы  $\frac{1}{2N} < \varepsilon$ , и положим

$$kl(x) = \begin{cases} 1 - \frac{j}{2N}, & \text{если } x_{kl}^j < x \leq x_{kl}^{j+1}, 1 \leq j \leq N, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{j-N}, & \text{если } x_{kl}^j < x \leq x_{kl}^{j+1}, j > N, \end{cases} \quad \begin{matrix} k, l \in \{p, q, r\}, \\ k \neq l \end{matrix} \\ rq(1) = 1.$$

Непосредственно проверяется, что  $S = \{p, q, r\}$  — случайное метрическое пространство с функцией треугольника  $\psi_w$ . Чтобы удовлетворить условию  $(\dot{\gamma})$ , мы можем помещать неотрицательную массу лишь в точки с координатами  $(x_{pq}^{i_1}, x_{pr}^{i_2}, x_{rq}^{i_3})$ ,  $i_1, i_2, i_3 = 1, 2, \dots$ , но при любом таком выборе  $P$  в область

$$\{d_{pq} \leq d_{pr} + d_{rq}, d_{pr} \leq d_{pq} + d_{rq}, d_{rq} \leq d_{pq} + d_{pr}\}$$

попадает лишь одна точка  $(1, 1, 2)$  и, следовательно, при любом выборе  $P$

$$P\{d_{pq} \leq d_{pr} + d_{rq}, d_{pr} \leq d_{pq} + d_{rq}, d_{rq} \leq d_{pq} + d_{pr}\} \leq \frac{1}{2N} < \varepsilon.$$

Таким образом, сформулированные выше утверждения доказаны полностью.

Интересно было бы детальнее исследовать указанные задачи в зависимости от функций треугольника и в зависимости от области значений случайной метрики.

Таким образом, если мы желаем работать в рамках схемы, где не нужно каждый раз специально заниматься вопросами существования, — нам следует несколько видоизменить классический случай пространства с мерой. Из теоретико-множественных структур подпадающими представляются логики множеств. В этом случае наша задача формулируется следующим образом: для заданного случайного метрического пространства  $S$  требуется отыскать множество  $\Omega$ , логику множеств  $\mathcal{E}$  в  $\Omega$ , вероятностную меру  $m$  на  $\mathcal{E}^1$  и семейство наблюдаемых  $\{d_{pq}\}_{p, q \in S}$  таких, что для всех  $p, q, r$  из  $S$

$$(a) \quad m \{d_{pq}[x, +\infty)\} = pq(x), \quad x \in R;$$

(б)  $m \{d_{pr} + d_{rq} - d_{pq}[0, \infty)\} = 1$  всякий раз, когда  $d_{pq}, d_{pr}, d_{rq}$  одновременно наблюдаемы.

Эта задача уже тривиально разрешима. При этом в силу теоремы 2.5 на множестве  $\Omega$  можно определить семейство  $\{f_{pq}\}_{p, q \in S}$  действительных функций таких, что для всех  $p, q, r$  из  $S$

$$(a') \quad m \{\omega \in \Omega : f_{pq}(\omega) \geq x\} = pq(x), \quad x \in R;$$

(б')  $m \{\omega \in \Omega : f_{pq}(\omega) \leq f_{pr}(\omega) + f_{rq}(\omega)\} = 1$  всякий раз, когда  $d_{pq}, d_{pr}, d_{rq}$  одновременно наблюдаемы.

Теоретико-множественный вариант логики более удобен для исследований. Важно поэтому выяснить, когда абстрактные булевские логики могут быть реализованы логиками множеств. Однако следующие ниже результаты оказываются эффективными для установления невозможности подобной реализации.

**2.7. Теорема.** Пусть  $E$  — некоторая булевская логика, изоморфная логике множеств  $\mathcal{E}$  в  $\Omega$ . Тогда множество  $H(E)$  всех гомоморфизмов логики  $E$  в двухэлементную булевскую алгебру  $I = \{0, 1\}$  не пусто, причем  $E$  изоморфна некоторой логике множеств  $\mathcal{E}_1$  в  $H(E)$ .

**Доказательство.** Отметим прежде всего, что  $H(\mathcal{E}) \neq \emptyset$ , например, в  $H(\mathcal{E})$  содержится гомоморфизм  $\psi_0$ , определенный соотношением

$$\psi_0 X = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega_0 \in X, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad X \in \mathcal{E},$$

где  $\omega_0$  — некоторая фиксированная точка из  $\Omega$ . Отсюда следует, что  $H(E) \neq \emptyset$ . Действительно, если  $\varphi: E \rightarrow \mathcal{E}$  — изоморфизм  $E$  на  $\mathcal{E}$ , то в  $H(E)$  содержится, например, гомоморфизм  $\psi_0 \circ \varphi$ .

Пусть  $\mathcal{E}_1$  — семейство всех подмножеств множества  $H(E)$  вида

$$X(a) = \{h \in H(E) : h(a) = 1\}, \quad a \in E.$$

$\mathcal{E}_1$  — логика множеств. Действительно,  $CX(a) = X(a')$ , то есть требование (ЛМ<sub>II</sub>) удовлетворяется. Пусть, далее,  $X(a) \cap X(b) = \emptyset$ . Тогда  $\varphi(a) \cap \varphi(b) = \emptyset$  и, в силу 2.2 (б),  $\varphi(a) \perp \varphi(b)$  в  $\mathcal{E}$ , то есть  $a \perp b$  в  $E$ . В силу (Л), в  $E$  существует  $c = a + b$  и для этого  $c : X(c) = X(a) \cup X(b)$ , то есть (ЛМ<sub>I</sub>) удовлетворяется.

Осталось установить, что отображение  $j: a \rightarrow X(a)$  является изоморфизмом  $E$  на  $\mathcal{E}_1$ . Ясно, что  $j$  — гомоморфизм  $E$  на  $\mathcal{E}_1$ . Пусть  $a \neq b$ ;

<sup>1</sup> Вероятностной мерой на логике  $E$  называется неотрицательная функция  $m$  заданная на  $E$ , причем удовлетворяются соотношения:  $m_1 = 1$ ,  $m(a_1 + a_2 + \dots) = ma_1 + ma_2 + \dots$

тогда  $\varphi(a) \neq \varphi(b)$  и, следовательно, существует  $\omega_0 \in [\varphi(a) \cup \varphi(b)] \setminus [\varphi(a) \cap \varphi(b)]$ . Тогда гомоморфизм  $h = \psi_0 \circ \varphi$ , где  $\psi_0$  определено выше, обладает свойством:  $h(a) \neq h(b)$ , то есть  $X(a) \neq X(b)$  и  $j$  является 1-1 отображением  $E$  на  $\mathcal{E}_1$ . Утверждение доказано.

Таким образом, если  $H(E) = \emptyset$ , то для булевой логики  $E$  нет аналога теоремы Стоуна.

2.8. Следствие. Если булевская логика  $E$  такова, что  $H(E) = \emptyset$ , то  $E$  не изоморфна никакой логике множеств.

Это следствие позволяет, в частности, установить, что логика  $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$  замкнутых подпространств гильбертова пространства  $\mathfrak{H}$  размерности  $\geq 3$  не изоморфна никакой логике множеств.

2.9. Предложение. Если  $\dim \mathfrak{H} \geq 3$ , то  $H(\mathfrak{L}(\mathfrak{H})) = \emptyset$ .

Доказательство. Линейное подпространство  $\mathfrak{A}$  пространства  $\mathfrak{H}$  назовем вещественным, если скалярное произведение  $(\bar{x}, \bar{y})$  вещественно для всех  $\bar{x}, \bar{y} \in \mathfrak{A}$ . Если, кроме того,  $\mathfrak{A}$  замкнуто, то оно гильбертово (в индуцированной метрике). В частности, всякий ортонормированный базис  $\{\bar{w}_j\}$  в  $\mathfrak{H}$  порождает некоторое вещественное подпространство  $\mathfrak{M}$ , причем, если  $\{\bar{v}_i\}$  — произвольный ортонормированный базис в  $\mathfrak{M}$ , то  $\{\bar{v}_i\}$  является ортонормированным базисом в  $\mathfrak{H}$ . Отсюда следует немедленно, что достаточно доказать предложение для случая вещественного гильбертова пространства.

Итак, пусть  $\mathfrak{H}$  — вещественно и бесконечномерно. Если  $\|\bar{u}\| = 1$ ,  $\bar{u} \in \mathfrak{H}$ , то через  $\bar{u}$  будем обозначать одномерное подпространство, натянутое на  $\bar{u}: u \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ . Допустим, что существует некоторое  $h \in H(\mathfrak{L}(\mathfrak{H}))$ . Так как  $\mathfrak{H}$  — бесконечномерно, всякий ортонормированный базис  $\{\bar{w}_j\}$  в  $\mathfrak{H}$  можно разбить на три равномогущие части:  $\{\bar{w}_j\} = \{\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i\}_{i \in K}$ . Рассмотрим евклидово пространство  $R^3$  и обозначим через  $R_i^3$  подпространство, натянутое на  $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$ , то есть  $R_i^3 = [\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i] \in L(\mathfrak{H})$ ,  $i \in K$ . Фиксируем в  $R^3$  некоторую систему координат и определим отображение  $\varphi$  единичной сферы  $S \subset R^3$  в  $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$  соотношением:

$$\varphi(\bar{u}) = [\bar{u}_i: i \in K], \bar{u}_i \in R_i^3$$

причем  $\bar{u}_i = (\lambda, \mu, \nu)$  в системе координат  $\{\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i\}$ , если  $\bar{u} = (\lambda, \mu, \nu)$  в  $R^3$ . Нетрудно видеть, что отображение  $\varphi$  обладает свойствами: (а) если  $\bar{u}^{(j)}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) попарно ортогональны в  $R^3$ , то  $\varphi(\bar{u}^{(j)})$  — попарно ортогональные подпространства  $\mathfrak{H}$ ; (б) при этом  $\varphi(\bar{u}^{(1)}) + \varphi(\bar{u}^{(2)}) + \varphi(\bar{u}^{(3)}) = \mathfrak{H}$ . Полагая  $\gamma = h \circ \varphi$ , получаем для всяких попарно ортогональных  $\bar{u}^{(j)} \in S$  ( $j = 1, 2, 3$ ):

$$\gamma(\bar{u}^{(1)}) + \gamma(\bar{u}^{(2)}) + \gamma(\bar{u}^{(3)}) = 1.$$

Определим действительную функцию  $\rho$  на  $S$  соотношением:

$$\rho(\bar{u}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \gamma(\bar{u}) = 1, \\ 0, & \text{если } \gamma(\bar{u}) = 0, \end{cases} \bar{u} \in S.$$

(В этом соотношении значения функции  $\rho$  суть числа 0,1, а в равенствах  $\gamma(\bar{u}) = 1$ ,  $\gamma(\bar{u}) = 0$  символы 0,1 суть элементы булевой алгебры  $I$ ). Функция  $\rho$  обладает свойствами:

$$\rho(\bar{u}) \geq 0, \rho(\bar{u}^{(1)}) + \rho(\bar{u}^{(2)}) + \rho(\bar{u}^{(3)}) = 1,$$

если  $\bar{u}^{(j)}$  попарно ортогональны. Как показал Глизон (см. доказательство теоремы 2.8 [2]), функция  $\rho$  с перечисленными свойствами обязана быть непрерывной на  $S$ ; однако, поскольку  $\rho$  здесь принимает лишь два значения, она разрывна. Ясно, что одновременно мы дока-

зали утверждение для § размерности 3, а отсюда очевидным образом следует справедливость предложения для произвольного конечномерного § ( $\dim \mathfrak{S} \geq 3$ ).

Для булевских логик имеет место следующий аналог теоремы Люмиса.

**2.10. Теорема.** *Всякая булевская логика является  $\sigma$ -гомоморфным образом некоторой  $\sigma$ -логики множеств.*

**Доказательство.** Пусть  $\Omega$  — семейство всевозможных отображений  $\omega$  булевской логики  $E$  в двухэлементную булевскую алгебру  $I = \{0, 1\}$  таких, что

$$\omega(a') = \omega(a)' \text{ для всех } a \in E.$$

Пусть  $Y(a) = \{\omega \in \Omega : \omega(a) = 1\}$ ,  $a \in E$ . Семейство  $\mathfrak{E}$ , образованное из  $\Omega$ ,  $\emptyset$ ,  $\{Y(a)\}_{a \in E}$ , является  $\sigma$ -логикой множеств. Действительно,  $Y(a) \cap Y(b) = \emptyset$  тогда и только тогда, когда  $a = b'$ . Поэтому  $Y(a_j)$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) попарно не пересекаются тогда и только тогда, когда  $j$  пробегает множество  $\{1, 2\}$ , причем  $a_1 = a_2'$ . При этом  $Y(a_1) \cup Y(a_2) = \Omega \in \mathfrak{E}$ , то есть (ЛМ<sub>I</sub>) удовлетворяется. Свойство (ЛМ<sub>II</sub>) очевидно. Искомый  $\sigma$ -гомоморфизм  $\varphi$   $\sigma$ -логики  $\mathfrak{E}$  на  $E$  определяется соотношением:

$$\varphi(\Omega) = 1, \quad \varphi(\emptyset) = 0, \quad \varphi(Y(a)) = a, \quad a \in E.$$

Теорема доказана.

Работоспособность понятия логики множеств определится, видимо, тем, насколько хорошо оно сможет быть увязано с рядом основных понятий анализа. Мы заключаем параграф решением задачи о пополнении меры на  $\sigma$ -логике множеств.

Пусть  $m$  —  $\sigma$ -аддитивная мера на  $\sigma$ -логике множеств  $\mathfrak{E}$  в  $\Omega$  и  $\mathfrak{A} = \{A_i\}_{i \in I}$  — семейство всех максимальных подалгебр  $\mathfrak{E}$ . Для каждой подалгебры  $A_i \in \mathfrak{A}$  обозначим через  $m_i$  ограничение  $m$  на  $A_i$ ; ясно, что  $m_i$  —  $\sigma$ -аддитивная мера на  $\sigma$ -алгебре  $A_i$  и, следовательно, ее можно пополнить до лебеговской меры  $\mu_i$ , заданной на соответствующей  $\sigma$ -алгебре  $L(A_i)$  измеримых по Лебегу множеств. Пусть  $\mathfrak{X}$  — семейство подмножеств множества  $\Omega$ , характеризующихся тем, что они принадлежат всем  $\sigma$ -алгебрам  $L(A_i)$  и, кроме того,  $\mu_i U = 0$ ,  $i \in I$ , если  $U \in \mathfrak{X}$ .  $\mathfrak{X}$  — кольцо множеств, причем  $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \in \mathfrak{X}$ , если  $U_n \in \mathfrak{X}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Подмножества  $U, V$  множества  $\Omega$  назовем  $m$ -одновременно измеримыми ( $U \overset{m}{\longleftrightarrow} V$ ), если при некотором  $i$  найдутся  $X, Y \in A_i$ , причем  $U \Delta X \in \mathfrak{X}$ ,  $V \Delta Y \in \mathfrak{X}$  (где  $\Delta$  — операция симметрической разности множеств). Нетрудно видеть, что  $U \overset{m}{\longleftrightarrow} V$  тогда и только тогда, когда  $\{U, V, CU, CV\}$  — попарно  $m$ -одновременно измеримы.

Пусть  $A$  — произвольная подалгебра  $\sigma$ -логики  $\mathfrak{E}$ . Символ  $U \overset{m}{\longleftrightarrow} A$  будет означать, что существует  $X \in A$  такое, что  $X \Delta U \in \mathfrak{X}$ . Пусть  $A_m = \{U \subset \Omega : U \overset{m}{\longleftrightarrow} A\}$ .

**2.11. Предложение.** *Если  $A$  — подалгебра ( $\sigma$ -подалгебра)  $\sigma$ -логики множеств  $\mathfrak{E}$ , то  $A_m$  — алгебра (соответственно,  $\sigma$ -алгебра) множеств. При этом  $A_m$  — наименьшая алгебра (соответственно,  $\sigma$ -алгебра), содержащая  $A$  и  $\mathfrak{X}$ .*

**Доказательство.** Пусть, например,  $A$  —  $\sigma$ -подалгебра  $\mathfrak{E}$  и пусть  $U_n \overset{m}{\longleftrightarrow} A$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Тогда найдутся  $X_n \in A$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,

такие, что  $U_n \triangle X_n \in \mathfrak{F}$ ; в этом случае  $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \in A$  и  $(\bigcup U_n) \triangle (\bigcup X_n) \subset \bigcup (U_n \triangle X_n)$ , откуда  $(\bigcup U_n) \triangle (\bigcup X_n) \in \mathfrak{F}$ .

Чтобы доказать второе утверждение, допустим, что  $A_0$  — произвольная алгебра, содержащая семейства  $A$  и  $\mathfrak{F}$ . Пусть  $U \xrightarrow{m} A$ , то есть  $U \triangle X \in \mathfrak{F}$  при некотором  $X \in A$ .

Тогда  $U = U \setminus X + X \cap C(X \setminus U)$ ,  $U \setminus X \in \mathfrak{F}$ ,  $X \setminus U \in \mathfrak{F}$  и поэтому  $U \in A_0$ . Таким образом,  $A_m \subset A_0$  и в силу произвольности  $A_0$  утверждение доказано.

2.12. Предложение. Семейство  $\mathcal{E}_m^m$  подмножеств множества  $\Omega$ , являющееся объединением семейств  $(A_i)_m$ , является  $\sigma$ -логикой множеств в  $\Omega$ .

Доказательство. Ясно, что  $\mathcal{E}_m^m$  замкнуто относительно операции теоретико-множественного дополнения. Пусть  $U_n \in \mathcal{E}_m^m$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $U_n \cap U_k = \emptyset$  ( $n \neq k$ ) и  $X_n \in \mathcal{E}$  таковы, что  $X_n \triangle U_n \in \mathfrak{F}$ . В частности,  $X_n \cap [\bigcup_{k \neq n} X_k] \in \mathfrak{F}$ . Пусть  $X_n \in A_n$ , тогда существует последовательность  $X_{j_n} \in A_n$  такая, что

$$X_n \supset X_{1n} \supset X_{2n} \supset \dots \supset \{X_n \cap [\bigcup_{k \neq n} X_k]\}, \quad mX_{j_n} < \frac{1}{j}.$$

Множество  $Z_n = \bigcap_j X_{j_n}$  обладает свойствами:

$$Z_n \in A_n \cap \mathfrak{F}, \quad X_n \supset Z_n \supset \{X_n \cap [\bigcup_{k \neq n} X_k]\}, \quad X_n \setminus Z_n \in \mathcal{E}, \\ [X_n \setminus Z_n] \cap [X_k \setminus Z_k] = \emptyset \quad (k \neq n),$$

то есть найдется  $A \in \mathfrak{S}$ , причем  $X_n \setminus Z_n \in A$  и, следовательно,

$$X_n = (X_n \setminus Z_n) \cup Z_n \in A. \quad \text{В частности, } U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \in A_m.$$

### § 3. Теория размерности для булевских логик

Люмис [3] построил абстрактный вариант теории размерности, созданной Мерреем и Нейманом [5] для слабо замкнутых колец линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Результаты Люмиса касаются структур, близких к булевским логикам; более точно эти структуры можно охарактеризовать как полные булевские логики, которые, кроме того являются решетками. Здесь мы желаем показать, что схема Люмиса пригодна для общих булевских логик (не обязательно решеток). Анализ работы Люмиса показал, что свойство быть решеткой существенно используется при доказательстве основных теорем, но не существенно при детализациях. В соответствии с этим здесь даны подробные доказательства лишь основных теорем. Все остальное подчинено задаче сохранить связность изложения.

3.1. Определение. Логикой с размерностью, или  $d$ -логикой, будем называть полную булевскую логику  $E$ , в которой определено отношение эквивалентности  $\sim$ , удовлетворяющее следующим требованиям:

$$(LP_I) \quad a \sim 0 \text{ влечет } a = 0;$$

(LP<sub>II</sub>) если  $\{a_i\}, \{b_i\}$  — два  $\perp$ -семейства и при любом  $i$ :  $a_i \sim b_i$ , тогда  $\Sigma a_i \sim \Sigma b_i$ ;

(LP<sub>III</sub>) если  $a + b \sim c + d$ , то существуют разложения  $a = a_1 + a_2$ ,  $b = b_1 + b_2$ , причем  $a_1 + b_1 \sim c$ ,  $a_2 + b_2 \sim d$ ;

(ЛР<sub>IV</sub>) если  $a \underline{\vee} b$ , то найдутся  $a_1, b_1 \neq 0$  такие, что  $a \geq a_1 \sim b_1 \leq b$ .  
 Во многих случаях достаточно использовать частный случай требования (ЛР<sub>III</sub>):

(ЛР'<sub>III</sub>) если  $a \sim c + d$ , то  $a = a_1 + a_2, a_1 \sim c, a_2 \sim d$ .

Отметим, что во всякой булевой логике можно определить отношение размерности  $\sim$  тривиальным образом, считая, что (1)  $a \sim 0$  влечет  $a = 0$ , (2)  $a \sim b$ , если  $a, b \neq 0$ . Однако это ничего не дает с точки зрения содержательной теории, и логики такого типа у нас не анализируются.

В дальнейшем мы будем использовать ряд понятий и обозначений [3]. Будем писать  $a \lesssim b$ , если для некоторого  $c: a \sim c \leq b$ . Элементы  $a, b$   $d$ -логики называются *связанными* (обозначается  $arb$ ), если существуют  $a_1, b_1 \neq 0$  такие, что  $a \geq a_1 \sim b_1 \leq b$ ; если  $a$  и  $b$  не связаны, то будем писать  $a\bar{r}b$ . Таким образом, требование (ЛР<sub>IV</sub>) означает, что  $arb$  всякий раз, когда  $a \underline{\vee} b$ . Элемент  $a$  *прост*, если  $b\bar{r}ab'$  всякий раз, когда  $b \leq a$ ; элемент  $e$  *инвариантен*, если  $e\bar{r}e'$ . Элемент  $a$  называется *конечным*, если  $a \sim b \leq a$  влечет  $b = a$ ; в противном случае говорят, что  $a$  *бесконечен*. Класс  $F$  элементов  $d$ -логики  $E$  называется наследственным, если  $a \lesssim b \in F$  влечет  $a \in F$ . Будем обозначать через  $E_n, E_k, \tilde{E}$  классы, соответственно, всех простых, конечных, инвариантных элементов из  $E$ .

Чтобы проверить следующее утверждение, достаточно использовать лишь требования (ЛР<sub>I</sub>), (ЛР<sub>II</sub>), (ЛР'<sub>III</sub>).

3.2. Предложение. Пусть  $E$  —  $d$ -логика. Тогда

(а)  $E_n, E_k$  — наследственные классы, причем  $E_n \subset E_k$ ;

(б) Элемент  $a$  бесконечен тогда и только тогда, когда он

представим в виде:  $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b$ , где  $0 \neq a_1 \sim a_2 \sim \dots$ ;

(в)  $a \lesssim b \lesssim a$  влечет  $a \sim b$ .

Нашей основной задачей является перечисление типов  $d$ -логик, основанное на отношении эквивалентности  $\sim$ . Для одного важного частного случая такое перечисление можно провести много быстрее, чем в общем случае; поэтому после некоторых общих предварительных результатов мы остановимся на этом специальном случае.

3.3 Лемма. Каковы бы ни были элементы  $a, b$  в  $d$ -логике  $E$ , найдутся  $a_0 \leq a, b_0 \leq b$  такие что  $a_0 \sim b_0, a_0 \bar{r} b_0'$ .

Доказательство. Пусть  $\{(a_i, b_i)\}$  — какое-либо максимальное семейство пар таких, что  $\{a_i\}, \{b_i\}$  —  $\perp$ -семейства и  $a \geq a_i \sim b_i \leq b$ . Тогда элементы  $a_0 = \Sigma a_i, b_0 = \Sigma b_i$  являются искомыми.

3.4. Лемма. Чтобы  $e \in \tilde{E}$ , необходимо и достаточно выполнение условия:  $x \leq e$  всякий раз, когда  $x \sim e$ .

Доказательство. Необходимость следует из (ЛР<sub>IV</sub>). Если же условие выполнено, но  $e$  не инвариантен, то найдутся  $u, v \neq 0, u \leq e, v \leq e', u \sim v$ . Тогда  $x = u'e + v \sim u'e + u = e$  и в то же время  $x \leq e$ .

3.5. Теорема. Пусть  $E$  —  $d$ -логика. Тогда  $\tilde{E}$  суть полная булевская подалгебра в  $E$ , причем  $\tilde{E} \subset C_E$ . В частности, если  $\{a_i\}$  — произвольное  $\perp$ -семейство, то

$$e(\Sigma a_i) = \Sigma ea_i, \quad e \in \tilde{E}.$$

Доказательство. Пусть  $e \in \tilde{E}$ , а  $c$  произволен. В силу (ЛР<sub>III</sub>), существуют разложения  $c = a_1 + a_2$ ,  $c' = b_1 + b_2$ , причем  $a_1 + b_1 \sim e$ ,  $a_2 + b_2 \sim e'$ . Согласно 3.4:  $a_1 + b_1 \leq e$ ,  $a_2 + b_2 \leq e'$ . Таким образом,  $c = a_1 + a_2$ ,  $e = a_1 + b_1$ ,  $\{a_1, a_2, b_1\}$  —  $\perp$ -семейство, то есть  $c \longleftrightarrow e$ .

Тем самым включение  $\tilde{E} \subset C_E$  доказано. Пусть, далее,  $e, f \in \tilde{E}$ ,  $e \perp f$ ,  $g = e + f$ , а  $x, y \in E$  — произвольные элементы такие, что  $g \geq x \sim y \leq g'$ . Применяя (ЛР<sub>III</sub>) к равенству  $x + x'g = e + f$ , получаем соотношения:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2, & x_1 + y_1 &\sim e, \\ x'g &= y_1 + y_2, & x_2 + y_2 &\sim f. \end{aligned}$$

Так как  $e, f$  инварианты,  $x_1 = x_2 = 0$ . Таким образом,  $x = y = 0$  и, следовательно,  $g \in \tilde{E}$ . Из определения 1.3 теперь следует, что  $\tilde{E}$  — булевская подалгебра в  $E$ . Осталось проверить лишь полноту  $\tilde{E}$ . Пусть  $e_i \in \tilde{E}$ ,  $e = \inf e_i$ . Тогда  $x \sim e$  влечет  $x \lesssim e_i$ ; в силу 3.2,  $x \leq e_i$  и, следовательно,  $x \leq e$ . Применяя снова 3.2, получаем:  $e \in \tilde{E}$ . Последнее утверждение теоремы следует теперь из 1.6.

С помощью инвариантных элементов можно получить теорему сравнения для  $d$ -логик. Будем писать  $a \succ b$ , если, во-первых,  $a \lesssim b$  и, во-вторых,  $ae = 0$  всякий раз, когда  $ae \sim be$ ,  $e \in \tilde{E}$ .

3.6. Теорема. *Каковы бы ни были элементы  $a, b$  в  $d$ -логике  $E$ , существуют однозначно определенные инвариантные элементы  $e_1, e_2, e_3$  такие, что  $1 = e_1 + e_2 + e_3$ ,  $ae_1 \succ be_1$ ,  $ae_2 \sim be_2$ ,  $ae_3 \succ be_3$ .*

Доказательство. Пусть  $e_0 = \sup \{e \in \tilde{E} : be \lesssim ae\}$ . Так как  $\tilde{E}$  — полная булевская алгебра (см. 3.5), элемент  $e_0$  определен. Положим  $e_1 = e'_0$ . Аналогично определяется элемент  $e_3 : e_3 = (\sup \{e \in \tilde{E} : ae \lesssim be\})'$ . Остается положить  $e_2 = (e_1 + e_3)'$ . Чтобы завершить доказательство, нужно доказать существование инвариантного элемента  $e$  такого, что  $ae \lesssim be$ ,  $ae' \gtrsim be'$ . Это будет сделано ниже (см. 3.15).

3.7. Следствие. (а) *Если в  $d$ -логике элементы  $b_1, b_2$  конечны и, кроме того,  $a_1 \leq b_1$ ,  $a_2 \leq b_2$ ,  $a_1 \sim a_2$ ,  $b_1 \sim b_2$ , то  $a'_1 b_1 \sim a'_2 b_2$ .*

(б) *В частности, если  $a$  конечен и  $a = (a_1 + b) \sim (a_1 + c)$ , то  $b \sim c$ .*

3.8. Следствие. *Пусть в  $d$ -логике  $E$  элемент  $a$  конечен и  $b \neq 0$ . Тогда все максимальные  $\perp$ -семейства  $\{b_j\}$  такие, что  $b_j \sim b$ ,  $\Sigma b_j \leq a$ , равномошны и их мощность есть целое число.*

Доказательство. Упомянутые семейства конечны в силу 3.2 (б). Если, далее,  $\{b_1, \dots, b_k\}$ ,  $\{c_1, \dots, c_{k+p}\}$  — два таких семейства

и  $p \geq 1$ , то соотношение  $b \lesssim (a \sum_{i=1}^k c_i)' \sim a (\sum_{i=1}^k b_i)'$  противоречит мак-

симальности семейства  $\{b_1, \dots, b_k\}$ .

3.9. Предложение. *Если элементы  $a, b$  в  $d$ -логике  $E$  несовместны и конечны, то конечен элемент  $a + b$ .*

Доказательство. Пусть  $a + b \sim c \leq a + b$ . В силу (ЛР'<sub>III</sub>),  $c = c_1 + c_2$ ,  $c_1 \sim a$ ,  $c_2 \sim b$ . Применяя (ЛР<sub>III</sub>) к соотношению  $a + b = c + c'(a + b)$ , получаем:

$$a = \bar{a} + d_1, \quad b = \bar{b} + d_2, \quad \bar{a} + \bar{b} \sim c, \quad d_1 + d_2 \sim c'(a + b).$$

Повторяя эту процедуру, получаем:

$$a = a_1 + a_2 + d_1, \quad a_1 + b_1 \sim c_1, \\ b = b_1 + b_2 + d_2, \quad a_2 + b_2 \sim c_2, \quad c'(a + b) \sim d_1 + d_2.$$

Отсюда  $a_1 + b_1 \sim a = a_1 + a_2 + d_1$  и, в силу 3.7 (б),  $b_1 \sim a_2 + d_1$ . Аналогично,  $a_2 \sim b_1 + d_2$ . Из эквивалентности  $a_2 \sim a_2 + d_1 + d_2$ , в силу 3.7 (б), находим  $d_1 + d_2 \sim 0$ , то есть  $c = a + b$ .

Далее мы переходим к изучению важного специального случая  $d$ -логик. *Фактором* назовем всякую  $d$ -логику, любые два элемента которой, отличные от 0, связаны. Будем говорить, что фактор  $E$  — типа I, если в  $E$  существует атом; фактор  $E$  — типа II, если в  $E$  нет атомов, но существует конечный элемент  $a \neq 0$ ; если фактор ни типа I, ни типа II, будем говорить, что он типа III.

Непосредственно из 3.3 получаем

3.10. Следствие. Если  $E$  — фактор, то для всяких  $a, b$  из  $E$ :  $a \leq b$ , либо  $b \leq a$ .

3.11. Теорема. Пусть  $E$  — фактор типа I. Тогда существует действительная функция  $D$  (функция размерности), однозначно определенная на классе  $E_k$  всех конечных элементов из  $E$ , причем для всех  $a, b \in E_k$ :

(а)  $D(0) = 0$ ; если  $1 \in E_k$ , то  $D(1) = 1$ ;

(б) если  $a \perp b$ , то  $D(a + b) = D(a) + D(b)$ ;

(в)  $a \sim b$  тогда и только тогда, когда  $D(a) = D(b)$ ;

(г) если  $1 \notin E_k$ , то область изменения  $D$  есть множество всех неотрицательных целых чисел.

Доказательство. Пусть  $g$  — атом. В силу 3.8, для всякого  $a \in E_k$  существует однозначно определенное целое число  $\delta(a)$  такое,

что  $a = \sum_{i=1}^{\delta(a)} g_i$ , где  $g_i \sim g$ ; при этом, в силу 3.10,  $\delta(a)$  не зависит от

выбора атома и  $a \sim b$  ( $a, b \in E_k$ ) тогда и только тогда, когда  $\delta(a) = \delta(b)$ . Если  $a, b \in E_k$  и  $a \perp b$ , то  $a + b \in E_k$ , в силу 3.9, то есть величина  $\delta(a + b)$  определена и равна  $\delta(a) + \delta(b)$ . В частности, если  $1 \in E_k$ , то  $\delta(1)$  есть некоторое целое положительное число и следует положить  $D(a) = \frac{\delta(a)}{\delta(1)}$ ,  $a \in E_k$ ; если  $1 \notin E_k$ , то положим  $D(a) = \delta(a)$ ,

$a \in E_k$ . Осталось лишь проверить утверждение (г). В силу

3.2 (б),  $1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b$ ,  $0 = a_1 \sim a_2 \sim \dots$ . Так как  $E$  — фактор, а  $g$  — атом, то  $g \sim g_k \leq a_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Если теперь  $m$  — произвольное целое положительное число, то  $D\left(\sum_{k=1}^m g_k\right) = m$ . Теорема доказана.

Пусть  $E$  — фактор типа I. Если  $1 \in E_k$ , то величина  $\delta(1)$  является, как мы видели, некоторым целым положительным числом  $m$ . В этом случае область изменения функции размерности  $D$  суть дроби вида  $0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}, 1$ , то есть фактор  $E$  типа  $I_m$ . Если  $1 \notin E_k$ , то фактор  $E$  имеет тип  $I_{\infty}$ .

3.12. Теорема. Пусть  $E$  — фактор типа II. Тогда существует функция размерности  $D$ , определенная на классе  $E_k$ , причем:

(а)  $D(0) = 0$ ; если  $1 \in E_k$ , то нормировка  $D(1) = 1$  определяет функцию  $D$  на  $E_k$  однозначно и область изменения  $D$  суть замкнутый интервал  $[0, 1]$ ;

(б) если  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in E_k$ , то  $D\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} D(a_n)$ ;

(в)  $a \sim b$  тогда и только тогда, когда  $D(a) = D(b)$ ;

(г) если  $1 \notin E_k$ , то область изменения  $D$  есть множество всех неотрицательных чисел.

Доказательство состоит в аккуратном использовании установленных выше предложений и по существу не отличается от соответствующего доказательства в [3]. Ограничимся поэтому лишь наброском.

Для фактора типа II однозначно определена величина

$$\delta_b(a) = \sup \left\{ \frac{m}{n} : \frac{m}{n} b \lesssim a \right\}, \quad a, b \in E_k, \quad b \neq 0,$$

где символ  $\frac{m}{n} b \sim a$  означает, что  $a = \sum_{i=1}^m a_i$ ,  $b = \sum_{j=1}^n b_j$ ,  $a_1 \sim \dots \sim a_m \sim b_1 \sim \dots \sim b_n$ . Величина  $\delta_b(a)$  называется *размерностью элемента  $a$  относительно  $b$* . При этом

$$\delta_c(a) = \delta_c(b) \delta_b(a), \quad a, b, c \in E_k, \quad b, c \neq 0. \quad (\ast)$$

В частности, если  $1 \in E_k$ , то, по определению,  $E$  — фактор типа II<sub>1</sub>, а  $D(a) = \delta_1(a)$  — искомая функция размерности. Если же  $1 \notin E_k$ , то  $E$  — фактор типа II<sub>∞</sub> и функция размерности  $D$  может быть определена как  $\delta_b(\cdot)$  при некотором фиксированном  $b$ . В силу  $(\ast)$ ,  $D$  определена однозначно с точностью до постоянного множителя.

Общая классификация  $d$ -логик опирается на следующую теорему.

3.13. Теорема. *Всякий наследственный класс  $F$   $d$ -логики  $E$  обладает верхней гранью  $f$ . Более того,  $f \in \tilde{E}$ , причем  $a \leq f$  влечет  $a = \Sigma a_i$ ,  $a_i \in F$ .*

Доказательство. Пусть  $\{f_i\}$ ,  $\{g_j\}$  — какие-либо максимальные  $\perp$ -семейства, образованные из элементов  $F$ . Если  $(\Sigma f_i) \vee (\Sigma g_j)'$ , то существуют  $c, d \neq 0$  такие, что  $f_{i_0} \geq c \sim d \leq (\Sigma g_j)'$  при некотором  $i_0$ . Отсюда  $d \in F$ ; это противоречит, однако, максимальнойности семейства  $\{g_j\}$ . Таким образом,  $(\Sigma f_i) \perp (\Sigma g_j)'$ , то есть  $\Sigma f_i \leq \Sigma g_j$ . Аналогично,  $\Sigma f_i \geq \Sigma g_j$  и, следовательно,  $f = \Sigma f_i = \Sigma g_j = \sup F$ . Если допустить, что  $f \notin F$ , то при некотором  $i_0$ :

$$f_{i_0} \geq c \sim d \leq f', \quad c, d \neq 0, \quad f = \Sigma f_i,$$

но тогда  $d \in F$  и мы приходим к противоречию с тем, что  $f = \sup F$ . Таким образом,  $f \in \tilde{E}$ . Пусть, далее,  $a \leq f$  и  $\{a_i\}$  — максимальное  $\perp$ -семейство элементов из  $F$ ,  $a_i \leq f$ . Положим  $a_0 = \Sigma a_i$ ;  $a_0 a$  не мажорирует ни одного ненулевого элемента из  $F$  и (так как  $F$  — наследственный класс)  $a_0 a \bar{r} b$ , каков бы ни был  $b \in F$ . Замечая, что  $f = \Sigma f_i$ ,  $f_i \in F$ , получаем:  $a_0 a \bar{r} f$ . С другой стороны,  $a_0 a \leq f$  и, следовательно,  $a_0 a = 0$ , то есть  $a_0 = a$ . Теорема доказана.

3.14. Следствие. *Во всякой  $d$ -логике  $E$  классы  $E_n$ ,  $E_k$  обладают верхними гранями  $e_n, e_k \in \tilde{E}$ . При этом  $e_n \leq e_k$ .*

3.15. Следствие. *Каковы бы ни были элементы  $a, b$  в  $d$ -логике  $E$ , существует  $e \in \tilde{E}$  такой, что  $ae \leq be$ ,  $be' \leq ae'$ .*

Доказательство. Для всякого  $d \in \tilde{E}$  класс  $F = \{x \in E : x \leq d\}$  является наследственным и потому существует  $\sup F \in \tilde{E}$ ; обозначим эту верхнюю грань через  $|d|$ . При этом  $|d|$  является наименьшим инвариантным элементом, мажорирующим  $d$ , а  $|d|'$  — наибольшим

элементом, не связанным с  $d$ . Пусть теперь  $a, b$  — произвольные элементы из  $E$ . Согласно 3.3, найдутся  $a_0 \leq a, b_0 \leq b, a_0 \sim b_0$ , причем  $a_0 a' b_0 b$ . Положим  $e = |b_0 b|$ , тогда  $b_0 b e' = 0, a_0 a e = 0$  и поэтому  $a e = a_0 e \sim b_0 e \leq b e, b e' = b_0 e' \sim a_0 e' \leq a e'$ , то есть  $a e \leq b e, b e' \leq a e'$ .

Будем говорить, что  $d$ -логика  $E$  — типа I, если  $1 = e_n$ ;  $d$ -логика  $E$  — типа II, если  $1 = e'_n e_k$ ; если  $d$ -логика ни типа I, ни типа II, то она типа III. Другими словами,  $E$  — типа I, если каждый элемент  $a \in E$  представим в виде  $a = \sum a_i$ , где  $a_i \in E_n$ ;  $E$  — типа II, если каждый элемент  $a \in E$  представим в виде  $a = \sum a_i$ , где  $a_i \in E_k$ , причем, если  $a \neq 0$ , то найдется пара несовместных, связанных элементов  $a_1, a_2$  таких, что  $a_1 \leq a, a_2 \leq a$ .

Таким образом, если  $E$  — произвольная  $d$ -логика, то ее можно однозначно представить как прямую сумму  $d$ -логик соответственно I, II и III типов:

$$E = E_I + E_{II} + E_{III}.$$

При этом наибольшими элементами в  $d$ -логиках  $E_I, E_{II}, E_{III}$  являются соответственно  $e_n, e'_n e_k, e'_k$ . В  $d$ -логиках типа I и II можно рассматривать функции размерности. Мы не будем здесь заниматься этим.

3.16. З а м е ч а н и е. Система требований (ЛР)<sub>I</sub> — (ЛР)<sub>IV</sub> несколько отлична от соответствующих требований Люмиса. Именно, в работе [3] требуется, чтобы удовлетворялись (ЛР)<sub>I</sub>, (ЛР)<sub>II</sub>, (ЛР'<sub>III</sub>), (ЛР)<sub>IV</sub> и

(§)  $a \sim b$  всякий раз, когда существует элемент  $c$  такой, что  $a \vee c = b \vee c = 1, a \wedge c = b \wedge c = 0$ .

Это требование менее естественно для общих булевских логик (не решеток), поскольку в последних придается смысл выражению  $a \vee c$ , лишь если  $a \perp c$ . Тем не менее, требование (ЛР)<sub>III</sub> в случае решеток является следствием требований Люмиса. Действительно, лемма 43 [3] утверждает, что, в силу (§), для всякого равенства  $a + b = c + d$  можно найти представления  $a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2$  такие, что  $c \sim a_1 + b_1, d \sim a_2 + b_2$ . Используя этот факт вместе с (ЛР'<sub>III</sub>), получаем немедленно, что справедливо (ЛР)<sub>III</sub>.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Birkhoff G., von Neumann J. The logic of quantum mechanics. Ann. Math., 37, 823—843, 1936.
2. Gleason A. M. Measures on the closed subspaces of a Hilbert space. J. Rat. Mech. Analysis, 6, 885—894, 1957.
3. Loomis L. H. The lattice-theoretic background of the dimension theory of operator algebra. Mem. Amer. Math. Soc., № 18, 1955.
4. Дж. Макки. Лекции по математическим основам квантовой механики. М., 1965.
5. Murray F. J., von Neumann J. On rings of operators. Ann. Math., 37, 116—229, 1936.
6. А. Шпачека. Note on K. Menger's probabilistic geometry. Чехосл. матем. журнал, 6, 72—74, 1956.
7. Varadarajan V. S. Probability in physics and a theorem on simultaneous observability. Comm. pure and appl. math., 15, 189—217, 1962.
8. А. Н. Шерстнев. О вероятностном обобщении метрических пространств. Уч. зап. КГУ, 124, 2, 3—11, 1964.
9. А. Н. Шерстнев. О связи между случайными метрическими пространствами и пространствами Шпачека. Уч. зап. КГУ, 127, 3, 120—123, 1967.