УДК 9.656

ТЕОРИЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Б. А. Севастьянов

ВВЕДЕНИЕ

Три трудности возникают при написании обзора по теории восстановления. Во-первых, в современной математической литературе нет четкой границы содержания теории восстановления. Различные обобщения первоначальной классической схемы процесса восстановления приводят нас к процессам блуждания, к изучению различных свойств траекторий процессов с независимыми приращениями, к точечным процессам и т. д. Во-вторых, большое количество теоретических статей по теории восстановления тонет в море статей прикладного характера, использующих теорию восстановления. И, наконец, в-третьих, сейчас уже имеется ряд книг и обзорных статей, в которых в той или иной мере освещается теория восстановления. В двухтомной книге Феллера [50] теории восстановления посвящены гл. 13 первого тома и главы 6, 11 и 14 второго тома. В переведенную на русский язык в 1967 г. книгу Кокса и Смита [31] вошла изданная в 1962 г. книга Кокса [66], обзорная статья Смита [117] и дополнение — обзор редактора перевода Ю. К. Беляева «Случайные потоки и теория восстановления».

В книге Кокса и Льюиса [30] рассматриваются некоторые статистические аспекты теории восстановления. В обзорной статье И. Н. Коваленко [29] по теории массового обслуживания имеется параграф, посвященный теории восстановления. В статье В. С. Королюка, С. М. Броди, А. Ф. Турбина «Полумарковские процессы и их применение» [33], которая помещена в этом сборнике, дается обзор работ по марковским процессам восстановления.

Первую трудность я обхожу в некотором смысле формально, включая в обзор лишь те работы, в которых автор явно называет предмет своего исследования процессом или теорией восстановления. Вторая трудность преодолевается с помощью естественного отсечения всех работ прикладного назначения. И, наконец, наличие упомянутых выше монографий и обзоров с обширной библиографией, доведенной до 1966 года, дает возможность мне ограничиться по возможности полным обзором статей, прореферированных в реферативном журнале «Математика» за последние шесть лет. Я почти не буду касаться работ по марковским процессам восстановления, обзор которых дан в упомянутой выше статье В. С. Королюка, С. М. Броди и А. Ф. Турбина. Для полноты и некоторой замкнутости изложения я, конечно, должен буду упомянуть целый ряд более старых работ, а также некоторые работы прикладного направления.

Глава I

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Основные факты этого параграфа и ссылки на литературу можно найти в книгах Феллера [50] и Кокса и Смита [31].

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ есть последовательность неотрицательных независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $P\{\xi_i \leqslant t\} = F(t)$, $F(0) < 1$. Обозначим: $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Термин «восстановление» возник из понимания ξ_i как длительности исправной работы i-го из последовательно работающих каких-либо элементов. В начальный момент времени $t = 0$ начинает работать первый элемент. В момент ξ_1 он заменяется вторым элементом, который в свою очередь заменяется следующим элементом в момент S_2 и т. д. Моменты $S_1, S_2, \ldots$ называются моментами восстановления. Число восстановлений ν_t в интервале $[0, t]$ будет равно максимальному n, для которого $S_n \leqslant t$. Разные авторы процессом восстановления называют разные объекты. Смит [31] под процессом восстановления понимает последовательность $\{\xi_i\}$, Феллер [50] — последовательность $\{S_n\}$, хотя, по-видимому, наиболее естественно было бы назвать процессом восстановления ν_t. Часто рассматриваются процессы восстановления, у которых $\xi_2, \xi_3, \ldots$ имеют одно и то же распределение $F(t)$, а ξ_1 имеет другое распределение $F_0(t)$. Если

$$F_0'(t) = \frac{1 - F(t)}{m_1},$$

где $m_1 = M\xi_2$, то соответствующий процесс восстановления называется стационарным. Основное внимание в теории восстановления уделяется функции восстановления

$$H(t) = M\nu_t = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t),$$

где

$$F_n(t) = \int_0^t F_{n-1}(t-u)\,dF(u), \quad F_1(t) = F(t).$$

Функция восстановления $H(t)$ является основной характеристикой процесса восстановления, через которую определяются его остальные характеристики. В работе Эренфелда [73] выясняются условия, при которых $H(t)$ возможно определить по ее значениям в точках $t_n = nh$ некоторой арифметической прогрессии. Асимптотике $H(t)$ при $t \to \infty$ посвящено подавляющее число работ. Обозначим $M\xi_i = m_1 > 0$. В классическом случае предполагается, что $m_1 < \infty$. Элементарная теорема восстановления утверждает, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{m_1}. \tag{1}$$

Далее возникает естественная классификация процессов восстановления на дискретные, когда распределение $F(t)$ — арифметическое с некоторым шагом l и неарифметическое в противном случае. Если $F(t)$ абсолютно непрерывно, то процесс восстановления можно назвать также абсолютно непрерывным. Важную роль играет процесс восстановления абсолютно непрерывного типа, в основе которого лежит функция распределения $F(t)$ абсолютно непрерывного типа, т. е. такая $F(t)$, n-я свертка которой самой с собой при некотором n содержит абсолютно непрерывную компоненту.

Для неарифметических $F(t)$ Блекуэлл (см. [50]) доказал теорему, в которой утверждается, что при любом $\alpha > 0$ и $t \to \infty$

$$H(t+\alpha) - H(t) \to \frac{\alpha}{m_1}. \tag{2}$$

Пусть $Q(t) \downarrow 0$ при $t \to \infty$ и $\int_0^{\infty} Q(u)\,du < \infty$. Доказывается (см. дискуссию к обзору Смита [31]), что теорема Блекуэлла равносильна так называемой узловой теореме восстановления

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t Q(t-u)\,dH(u) = \frac{1}{m_1} \int_0^{\infty} Q(u)\,du. \tag{3}$$

Утверждения (2) и (3) для l-арифметических распределений имеют вид

$$h_n = H(nl) - H((n-1)l) \to \frac{l}{m_1} \tag{4}$$

и

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} Q((n-k)l)\, h_k = \frac{l}{m_1} \sum_{k=0}^{\infty} Q(kl) \tag{5}$$

(см. Феллер [50]). Для выполнения (5) условие $Q(nl) \downarrow 0$ не необходимо, надо лишь потребовать, чтобы $\sum_n |Q(nl)| < \infty$. Равенство (3) справедливо для $Q(t) \in L_1(0, \infty)$, если $F(t)$ есть функция абсолютно непрерывного типа.

Если $F(t)$ абсолютно непрерывна и $f(t) = F'(t)$, то

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t), \tag{6}$$

где $f_1(t) = f(t)$, $f_n(t) = \int\limits_0^t f_{n-1}(t-u)\, f(u)\, du$, называется плотностью восстановления. Теорема о плотностях восстановления утверждает, что

$$\lim_{t \to \infty} h(t) = \frac{1}{m_1}, \tag{7}$$

если выполнены некоторые дополнительные условия, например, $f(t) \in L_p(0, \infty)$ для некоторого $p > 1$. Смит [120] нашел необходимые и достаточные условия выполнения (7).

§ 2. УРАВНЕНИЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Функция восстановления $H(t)$ удовлетворяет следующему уравнению восстановления:

$$H(t) = F(t) + \int\limits_0^t H(t-u)\, dF(u). \tag{8}$$

Уравнение

$$X(t) = K(t) + \int\limits_0^t X(t-u)\, dF(u), \tag{9}$$

где $K(t)$ — некоторая известная функция, называется иногда уравнением типа восстановления. Решение $X(t)$ уравнения (9) следующим образом записывается через функцию восстановления:

$$X(t)=K(t)+\int_0^t K(t-u)\,dF(u). \tag{10}$$

Эта формула позволяет получать асимптотику $X(t)$ для $t\to\infty$ при помощи узловой теоремы восстановления и асимптотики $H(t)$ и $K(t)$.

Плотность восстановления удовлетворяет уравнению

$$h(t)=f(t)+\int_0^t h(t-u)\,f(u)\,du. \tag{11}$$

В дискретном случае, когда $F(t)=\sum_{k=0}^{[t]} f_k$ (далее мы всегда полагаем шаг распределения $l=1$), уравнение восстановления для $h_k=H(k)-H(k-1)$, аналогичное (8), запишется в виде

$$h_n=f_n+\sum_{k=0}^{n-1} h_{n-k}f_k, \tag{12}$$

а более общее уравнение (9) перейдет в

$$x_n=b_n+\sum_{k=0}^{n} x_{n-k}f_k. \tag{13}$$

Переходя к производящим функциям $h(s)=\sum_n h_n s^n$; $f(s)=\sum_n f_n s^n$, $b(s)=\sum_n b_n s^n$; $x(s)=\sum_n x_n s^n$, получаем из (12) и (13)

$$h(s)=f(s)+h(s)f(s), \qquad x(s)=b(s)+x(s)f(s). \tag{14}$$

В преобразованиях Лапласа

$$\hat H(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda u}\,dH(u), \qquad \hat F(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda u}\,dF(u),$$

$$\hat K(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda u}\,dK(u), \qquad \hat X(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda u}\,dX(u)$$

уравнения (8) и (9) записываются так:

$$\left.\begin{aligned}\hat H(\lambda)&=\hat F(\lambda)+\hat H(\lambda)\hat F(\lambda),\\ \hat X(\lambda)&=\hat K(\lambda)+\hat X(\lambda)\hat F(\lambda).\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Из (14) и (15) легко находятся $h(s)$, $x(s)$; $\hat{H}(\lambda)$, $\hat{X}(\lambda)$. Применяя к ним тауберовы теоремы, мы можем находить асимптотику неизвестных функций.

Определим случайные величины $\alpha_t = S_{\nu_t+1} - t$ — перескок и $\beta_t = t - S_{\nu_t}$ — недоскок. Функция распределения $A(t;\ x) = P\{\alpha_t \leqslant x\}$ перескока удовлетворяет уравнению восстановления

$$A(t;\ x) = F(t+x) - F(t) + \int_0^t A(t-u,\ x)\,dF(u). \tag{16}$$

Функция распределения недоскока β_t также удовлетворяет некоторому уравнению восстановления. Моменты числа восстановлений ν_t тоже удовлетворяют уравнениям типа восстановления. Если обозначить

$$H_r(t) = M\nu_t^r \quad \text{и} \quad \Psi_r(t) = -\sum_{s=1}^{r} \binom{r}{s} (-1)^s H_{r-s}(t),$$

то (см. Тага [137])

$$H_r(t) = \Psi_r(t) + \int_0^t H_r(t-u)\,dF(u).$$

Моменты числа частиц в ветвящихся процессах удовлетворяют уравнению

$$Y(t) = K(t) + \theta \int_0^t Y(t-u)\,dF(u), \tag{17}$$

совпадающему при $\theta = 1$ с (9). Уравнение (17) можно свести иногда к уравнению типа (9) с помощью следующего приема. Если существует такое α, что

$$1 = \theta \int_0^\infty e^{-\alpha u}\,dF(u), \tag{18}$$

то уравнение (17) сводится к уравнению

$$Y_\alpha(t) = K_\alpha(t) + \int_0^t Y_\alpha(t-u)\,dF_\alpha(u),$$

где

$$Y_\alpha(t) = Y(t)\,e^{-\alpha t}; \quad K_\alpha(t) = K(t)\,e^{-\alpha t}, \quad F_\alpha(t) = \theta \int_0^t e^{-\alpha u}\,dF(u). \tag{19}$$

Изучение асимптотических свойств решений уравнений типа восстановления является одной из значительных по важности задач теории восстановления.

§ 3. ПУАССОНОВСКИЙ ПРОЦЕСС ВОССТАНОВЛЕНИЯ

В случае, когда распределение $F(t)$ экспоненциально, число восстановлений ν_t представляет собой пуассоновский процесс. В этом случае $H(t) = t/m_1$, перескок α_1 имеет то же распределение, что и ξ_n. Пуассоновским процессам восстановления посвящено большое количество работ. Здесь мы коснемся лишь двух вопросов: характеризационных свойств пуассоновских процессов и сходимости сумм бесконечно малых процессов восстановления к пуассоновскому процессу. Обе эти темы, особенно вторая, освещаются в обзоре Ю. К. Беляева к книге Кокса и Смита (см. [31]), поэтому мы коснемся лишь более поздних работ.

В работах Тедена [142], Рао и Веделя [112, 113] изучается следующее характеризационное свойство пуассоновских процессов. Рассматривается стационарный процесс восстановления. Каждый момент восстановления независимо друг от друга смещается на случайное расстояние с одной и той же функцией распределения. Получающийся точечный процесс будет процессом восстановления с теми же характеристиками тогда и только тогда, когда первоначальный процесс был пуассоновским. Утверждение о пуассоновости первоначального процесса доказывается также в том случае, когда для любых интервалов I и J $MN(I)=M\tilde{N}(I)$, $MN(I)N(J)= =M\tilde{N}(I)\tilde{N}(J)$, где $N(I)$, $\tilde{N}(I)$ — число точек восстановления в интервале I в первом и втором процессах соответственно. Последнее утверждение справедливо также в случае, когда сдвиги точек восстановления допускают некоторую зависимость.

В работе Р. В. Амбарцумяна [54] рассматриваются процессы Π, которые являются суперпозициями, или суммами, независимых стационарных процессов восстановления Π_i, $i=1, \ldots, n$. Исследованы аналитические свойства функции $\varphi(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\rho_k z^k$, где ρ_k — коэффициент корреляции между X_0 и X_k, а $X_0, X_1, \ldots, X_k$ — последовательность длин интервалов восстановления в Π. Показано, что если $n=2$, Π_1 — пуассоновский процесс, $\varphi(z)$ — полином, то Π_2 — также пуассоновский процесс. В работе Штёрмера [136] доказывается, что суперпозиция Π является пуассоновским процессом тогда и только тогда, когда первоначальные процессы также пуассоновские. Там же показывается, что в широких условиях при $n\to\infty$ в пределе процесс Π будет пуассоновским. В работе Блюменталя, Гринвуда, Хербаха [60] сформулированы условия, при которых суперпозиция процессов восстановления в пределе дает неоднородный процесс Пуассона. Наиболее законченные результаты о сходимости суперпозиций независимых процессов восстановления к пуассоновскому процессу получены Б. И. Григелионисом [16, 17]. И. Сапаговас [45, 46] нашел необходимые и достаточные условия сходимости суперпозиций независимых марковских процессов восстановления к пуассоновскому процессу и его многомерному обобщению.

В работе Лесли [102] изучались промежутки времени между скоплениями в пуассоновском процессе (скопление — это группа из k скачков процесса, каждый из которых отстоит от предыдущего на расстоянии, не больше заданного). Найдены преобразование Лапласа, математическое ожидание и дисперсия для этих промежутков.

§ 4. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Если потребовать конечность моментов $m_k = \int\limits_0^\infty t^k \, dF(t)$ более высокого порядка, то основные теоремы восстановления допускают уточнения. Например, если $m_2 < \infty$ и $F(t)$ неарифметическая, то, как показал Смит (см. обзор [31]), при $t \to \infty$

$$H(t) = \frac{t}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} - 1 + o(1).$$

Для l-арифметических распределений $F(t)$ при конечных m_1 и m_2 имеют место следующие асимптотические свойства (см. Феллер [78]):

$$H(nl) = \frac{nl}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + \frac{l}{2m_1} - 1 + o(1), \tag{20}$$

$$h_n = \frac{l}{m_1} + o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{21}$$

$$\sum_n \left| h_n - \frac{l}{m_1} \right| < \infty, \tag{22}$$

если же $m_3 < \infty$, то

$$\sum_n n \left| h_n - \frac{l}{m_1} \right| < \infty. \tag{23}$$

В работе А. О. Гельфонда [13] дается следующее уточнение результата (21) (далее полагаем $l = 1$). Обозначим $s_n = \sum\limits_{k \geqslant n+1} f_k$. Пусть конечен момент $\sum\limits_k k^\nu f_k$, $\nu > 1$. Тогда при $n \to \infty$

$$h_n = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_1^2} \sum_{k \geqslant n+1} s_k + O\left(\frac{\log n}{n^{\nu+1}}\right). \tag{24}$$

Результаты (21)—(23) распространяются на случай, когда $F(t)$ есть функция абсолютно непрерывного типа. В этом случае (см. Стоун [132], Б. А. Севастьянов [47])

$$H(x+h)-H(x)=\frac{h}{m_1}+o\left(\frac{1}{x^{r-2}}\right), \quad x\to\infty, \tag{25}$$

$$\int_0^\infty x^{r-2}\left|dH(x)-\frac{dx}{m_1}\right|<\infty, \tag{26}$$

если $m_r<\infty$, $r\geqslant 2$.

В ряде работ (см. Тейгельс [140], Лидбеттер [101], Б. А. Каминскене [26]) показано, что из экспоненциальной скорости убывания хвоста распределения $1-F(t)$ следует сходимость с экспоненциальной скоростью в элементарной теореме восстановления, в теореме восстановления Блекуэлла и узловой теореме восстановления. Этот факт имеет место как в дискретных процессах восстановления, так и в процессах с $F(t)$ абсолютно непрерывного типа.

В работе Блумфилда [59] указана нижняя граница h_n для дискретного процесса восстановления. Если ξ_i имеют такое же распределение, как и θ_i^n, где θ_i — равномерно распределенные независимые случайные величины, то при $n\to\infty$

$$H(t)\sim nA(t),$$

где $A(t)$ — функция, преобразование Лапласа которой равно $\left\{\int_0^1\frac{1-e^{-\lambda u}}{u}\,du\right\}^{-1}$ (Кламкин и Линт [95]). Схема серий процессов восстановления рассматривается также в работе Б. Н. Димитрова [20]. Пусть в n-й серии $H_n(t)$ — функция восстановления, $F_n(t)$ — функция распределения ξ_i. Доказывается, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{H_n(t)}{k_n}=t$ равномерно в любом конечном $0\leqslant t\leqslant T$ тогда и только тогда, когда

$$k_n\int_\varepsilon^\infty dF_n(x)\to 0, \qquad k_n\int_0^\varepsilon x\,dF_n(x)\to 1$$

для любого $\varepsilon>0$. В работе Б. Н. Димитрова [19] в схеме серий предполагается, что

$$P\{S_{k_n}\leqslant t\}\to G(t), \qquad g(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dG(t).$$

Доказано, что

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\nu_n(t)}{k_n}\leqslant x\right\}=A(t;x),$$

где $A(t; x) = 1 - G(t; x)$, а $G(t; x)$ определяется по преобразованию Лапласа $\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} d_t G(t; x) = [g(\lambda)]^{x_i}$. В работе А. Обретенева [42] узловая теорема восстановления трактуется как некоторое усреднение теоремы Блекуэлла.

Изучаются асимптотические выражения моментов и семиинвариантов числа восстановлений ν_t при $t \to \infty$. Смит (см. обзор [31]) установил, что для $F(t)$ абсолютно непрерывного типа и $m_{n+p+1} < \infty$ семиинвариант n-го порядка ν_t представим в виде

$$k_n(t) = a_n t + b_n + \frac{\lambda(t)}{(1+t)^p},$$

где $\lambda(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и $\lambda(t) - \lambda(t - \alpha) = o(t^{-1})$ для любого $\alpha > 0$; при $p \geqslant 1$ $\frac{\lambda(t)}{1+t} \in L_1(0, \infty)$. Постоянная a_n зависит от $m_1, m_2, \ldots, m_n$, а b_n зависит от $m_1, m_2, \ldots, m_{n+1}$. В работах А. Алешкявичене [6, 8], В. Лютикаса [34, 35] эти результаты получили дальнейшее развитие. Для дискретных процессов восстановления при $m_{n+p+1} < \infty$ установлено представление

$$M\nu_t^n = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k t^{n-k} + \frac{\lambda(t)}{(t+1)^p},$$

где $\lambda(t)$ удовлетворяет тем же условиям, что и у Смита, а γ_k — константы.

В работе Уэйсса [144] предполагается, что в уравнении типа восстановления

$$x(t) = k(t) \pm \int\limits_0^t x(u) f(t-u)\, du$$

функции $k(t)$ и $f(t)$ разложимы в ряд по обобщенным функциям Лагерра. Показано, что решение $x(t)$ также представимо в виде ряда по обобщенным функциям Лагерра, причем вычисление коэффициентов можно механизировать.

В работе А. Обретенева [43] предполагается, что плотность восстановления $h(t)$ удовлетворяет уравнению (11), где $f(t)$ — ограниченная плотность. Пусть $H_0(t) = h(t)$, $H_{k+1}(t) = \int\limits_0^t H_k(x)\, dx$, $a_0 = \frac{1}{m_1}$, $a_1 = \frac{m_2}{2m_1^2} - 1$, a_2 и a_3 выражаются через $m_1, \ldots, m_4$; $A_0(t) = 0$, $A_{k+1}(t) = \int\limits_0^t (A_k(x) + a_k)\, dx$. Доказывается, что при $m_{k+1} \leqslant \infty$, $k \leqslant 3$

$$\lim_{t \to \infty} [H_k(t) - A_k(t)] = a_k.$$

Если m_1 и m_2 конечны, то (см. Феллер [50])

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{\nu_t - \frac{t}{m_1}}{\bar{\sigma}\sqrt{t}} \leqslant x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \tag{27}$$

где $\bar{\sigma}^2 = \frac{m_2 - m_1^2}{m_1^3}$.

В работах А. Алешкявичене [1] и А. В. Нагаева [37] доказаны локальные предельные теоремы, соответствующие (27), для дискретных и непрерывных процессов восстановления. А. Алешкявичене [2, 3, 7, 8] изучила предельную теорему (27) с различными уточнениями (асимптотическое разложение в интегральной и локальных теоремах, интегральная и локальная предельные теоремы с учетом больших уклонений).

Много работ посвящено доказательству центральной предельной теоремы для сумм

$$\nu(t) = \sum_{l=1}^{n} \nu_l(t) \tag{28}$$

независимых процессов восстановления (Б. И. Григелионис [15], А. Алешкявичене [4, 5], В. Лютикас [36], Б. А. Каминскене [24, 25]). Пусть процесс восстановления $\nu_l(t)$ определяется случайными величинами $\xi_n^{(l)}$, $M(\xi_n^{(l)})^r = m_{l,r}$; $F_l(t) = P\{\xi_n^{(l)} \leqslant t\}$, $\overline{F}_l(t)$ — абсолютно непрерывная компонента $F_l(t)$,

$$\Lambda_l(t) = M\nu_l(t), \quad \bar{\sigma}_n^2 = \sum_{l=1}^{n} \frac{m_{l,2} - m_{l,1}^2}{m_{l,1}^3}.$$

Доказывается, что

$$F_{n,t}(x) = P\left\{\frac{1}{\bar{\sigma}_n\sqrt{t}} \sum_{l=1}^{n} [\nu_l(t) - \Lambda_l(t)] \leqslant x\right\} \tag{29}$$

сходится при $n\to\infty$, $t\to\infty$ к нормальному распределению, если

$$\inf_l m_{l,1} > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\bar{\sigma}_n^2 > 0, \quad \sup_l m_{l,3} < \infty$$

и $\sup_l \overline{F}_l(\infty) > 0$. Остаточный член в этой предельной теореме имеет вид $O\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\sqrt{nt}}\right)$. В работе И. Н. Коваленко [27] описан класс предельных теорем для (29) в схеме серий и найдены достаточные условия сходимости к каждому из предельных законов. В работах Р. Т. Баниса [10], Д. Сааса [44] рассмотрен более общий вопрос о сходимости сумм независимых целозначных процессов к обобщенным пуассоновским процессам.

§ 6. ДРУГИЕ ЗАДАЧИ

Рассматриваются различные схемы разрежения случайных потоков. Так, например, в работах Мадьороди [107, 108] рассмотрена следующая схема. Пусть $t_0=0$, t_1, t_2, ... — моменты восстановления, $\nu_i^{(n)}$ — независимые одинаково распределенные целочисленные случайные величины, не зависимые от $\{t_i\}$. Обозначим

$$t_i^{(0)}=t_i,\ t_0^{(n)}=0,\ t_1^{(n)}=t_{\nu_1^{(n)}}^{(n-1)},\ t_r^{(n)}=t_{\nu_1^{(n)}+\ldots+\nu_r^{(n)}}^{(n-1)},$$

$$n=1,2,\ldots,\ r=1,2,\ldots.$$

Доказывается, что при $D\nu_i^{(n)}<\infty$ и $P\{\nu_i^{(n)}=k\}<1$ для каждого $k=1,2,\ldots$

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n-1)}}{m_1M^n}\leqslant x\right\}=G(x),$$

где $M\nu_i^{(n)}=M$ и $G(x)$ — непрерывная функция распределения. Найдены также необходимые и достаточные условия существования предельного распределения величин $\delta_n(t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)})$, когда $\delta_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Другая схема разрежения рассматривается в работах Лоуренса [97—100], в которых из первоначального пуассоновского процесса $\{X_n\}$ отбираются лишь такие точки восстановления X_n, для которых интервал (X_{n-1}, X_n) не содержит точек восстановления некоторого другого независимого процесса восстановления. Изучаются свойства полученного «разреженного» процесса восстановления Z_n, в частности совместное распределение и корреляция $Z_{n+1}-Z_n$ и $Z_{k+1}-Z_k$.

Далее упомянем ряд работ, в которых изучаются задачи, связанные с суперпозицией или взаимодействием нескольких независимых процессов восстановления. В работе Энса [74] изучается распределение длин интервалов между двумя восстановлениями и совместное распределение двух таких соседних интервалов в суперпозиции нескольких одинаково распределенных независимых процессов восстановления. Некоторые приложения к биологии схемы двух взаимодействующих процессов восстановления см. в работах Тен Хопена и Рёвера [138, 139].

В работе А. А. Боровкова [12] рассматривается r независимых дискретных процессов восстановления. Пусть i-й процесс восстановления порождается случайной величиной $\xi^{(i)}$. Обозначим ξ наименьший момент времени, который является точкой одновременно для всех r процессов восстановления. Доказывается, что момент $M\xi^{\gamma}, \gamma \geqslant 2$, конечен тогда и только тогда, когда конечны все $M(\xi^{(i)})^{\gamma}$, $i=1, 2, \ldots, r$. Рассмотрен аналогичный вопрос в двух независимых процессах восстановления произвольной природы, причем ξ определяется, как момент восстановления одного из процессов, «близкий» к моменту восстановления другого.

В работах Льюиса [103, 104] (см. также книгу Кокса и Льюиса [30]) и Филипсона [110] рассмотрен процесс, в котором каждая точка восстановления первоначального пуассоновского процесса (однородного или неоднородного) порождает случайное число вторичных точек восстановления некоторого другого процесса восстановления. Этот процесс, а также некоторые его модификации, описывает моменты появления неполадок в электронной вычислительной машине.

В работе Джеймса [89] рассмотрены две функции, зависящие от двух независимых процессов восстановления. Выводятся формулы для условного математического ожидания одной из этих функций при заданном значении другой. Хейт [81] нашел условия, которым должно удовлетворять распределение вероятностей, чтобы оно могло быть распределением числа восстановлений на фиксированном интервале времени.

В работе Бартфаи [56] показано, что при некоторых условиях по наблюдениям с ошибками моментов восстановления некоторого процесса восстановления возможно определение функции распределения промежутков между восстановлениями.

Дейли [69] дал достаточные условия того, чтобы $h_1(x)\, h_2(x)$ была плотностью восстановления, если $h_i(x)$, $i=1, 2$, — плотности восстановления. Строится пример, когда $h(x)$ — плотность восстановления, а $\alpha h(x)$, $\alpha > 1$, — нет. Стейтель [130] изучал условия, при которых время до первого восстановления в стационарном процессе восстановления безгранично делимо. Он нашел, что $\frac{1-F(x)}{m_1}$ будет плотностью безгранично делимого распределения в том и только том случае, если $\log x - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{F_k(x)}{k}$ не убывает.

В работе Хорна [88] функции f_n и h_n в уравнении восстановления

$$h_n = f_n + \sum_{k=1}^{n-1} f_k u_{n-k}, \quad u_0 = 1, \quad f_0 = 0, \tag{30}$$

представляются в виде последовательностей моментов

$$h_n = \int\limits_{R_1} t^n d\mu_1(t), \quad f_n = \int\limits_{R_2} t^n d\mu_2(t)$$

и изучается связь между носителями R_1 и R_2 мер μ_1 и μ_2.

Дейвидсон [71] и Кендалл [93] изучали множества решений $\{h_n\}$ уравнения (30), удовлетворяющие условиям: а) $h_n \geqslant h_{n+1}$; б) $h_{n+1}h_{n-1} \geqslant h_n^2$. В работе Рута [115] показано, что если A — борелевское множество на прямой, то из условия $H(A) = \infty$, где $H(A) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{*k}(A)$ — обычная мера восстановления, не следует, что с достоверностью $S_n \in A$ хотя бы для одного n. В работе Далль Альо [70] вводится стоимость восстановления, равная $e^{-\rho t}$, если восстановление происходит в момент t. Указывается связь между асимптотической нормальностью $C(\rho) = \sum_{i=1}^{\infty} \exp\left\{-\rho \sum_{j=1}^{i} \xi_j\right\}$ при $\rho \downarrow 0$ и существованием всех моментов ξ_i. В работе Йонга [90] дается применение уравнения восстановления к страховому делу.

Глава II

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

§ 1. ПРОЦЕССЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ С БЕСКОНЕЧНЫМ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОЖИДАНИЕМ

В работах по теории восстановления с $M\xi_i = \infty$ обычно предполагается, что при $t \to \infty$ хвост распределения $F(t)$ представим в виде

$$1 - F(t) = t^{-\alpha} L(t), \tag{31}$$

где $0 < \alpha \leqslant 1$, $L(t)$ — медленно меняющаяся функция. Основные, ставшие уже классическими, результаты об асимптотике

$$H(t) \sim \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} \cdot \frac{t^\alpha}{L(t)}, \tag{32}$$

предельном распределении (при $0 < \alpha < 1$)

$$\lim_{t\to\infty} P\{\nu_t \cdot (1 - F(t)) \leqslant x\} = 1 - G_\alpha(x^{-1/\alpha}),$$

где $G_\alpha(x)$ — функция распределения неотрицательного одностороннего устойчивого закона с параметром α, можно найти в книге Феллера [50] и в работах: Феллер [78], Смит [119], А. Обретенев [40]. Предельные теоремы для перескока $\alpha_t = S_{\nu_t+1} - t$ и недоскока $\beta_t = t - S_{\nu_t}$ в условиях (31) имеются в работе Е. Б. Дынкина [22]. Ламперти [96] изучал случайные величины $M_t = \sup_{r \leqslant t} \beta_r$, где β_r — недоскок, и $T_x = \min\{r, \beta_r \geqslant x\}$. Им доказано, что T_x/x при $x \to \infty$ сходится к невырожденному распределению тогда и только тогда, когда имеет место (31) с $0<\alpha<1$.

В работе С. В. Нагаева [38] дано уточнение асимптотической формулы (32) в дискретном случае, а именно, доказано, что

$$h_n^* = \frac{\sin \alpha\pi}{A\pi n^{1-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right),$$

если $1-F(x) = Ax^{-\alpha} + \Phi(x)$, $\int_0^\infty \Phi(x)\,dx < \infty$, $0<\alpha<1$ (см. также Гарсиа и Ламперти [80]). Тейгельс [141] изучал асимптотику $H(t)$ и $D\nu_t$ в случае, когда в (31) $0<\alpha<2$.

Эриксон [75] рассматривал неарифметические $F(t)$, удовлетворяющие условию (31). Пусть $c_\alpha = [\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha)]^{-1}$, $h>0$, $m(t) = t(1-F(t)) + \int_0^t x\,dF(x)$. Доказывается, что при $t\to\infty$ и $1/2<\alpha\leqslant 1$

$$H(t+h) - H(t) \sim c_\alpha h/m(t) \tag{33}$$

и при $0<\alpha\leqslant 1/2$

$$\liminf_{t\to\infty} m(t)\left(H(t+h) - H(t)\right) = c_\alpha h.$$

Доказан также аналог узловой теоремы восстановления. Если $\alpha=1$ и $M\xi_i = \infty$, то для перескока и недоскока доказывается предельная теорема

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{m(\beta_t)}{m(t)} \leqslant x,\ \frac{m(\alpha_t)}{m(t)} \leqslant y\right\} = \min(x, y),$$

$$0\leqslant x\leqslant 1,\ y\geqslant 0.$$

В работах И. Н. Коваленко [28], Б. В. Гнеденко и Б. Фрайера [14] рассматривается разрежение первоначального процесса восстановления, при котором каждый момент восстановления с вероятностью $1-p$ вычеркивается и с вероятностью $p\to 0$ остается. Тогда предельное распределение интервала времени между рекуррентными событиями, если оно существует при соответствующей нормировке, имеет преобразование Лапласа вида

$$\psi(\lambda) = (1 + c\lambda^\alpha)^{-1},\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1. \tag{34}$$

Если $0\leqslant\alpha<1$, то условием притяжения к закону (34) является соотношение (31), а если $\alpha=1$, то соответствующим условием будет

$$(1-F(x))\Big/\int_0^x (1-F(z))\,dz \to 0,\ x\to\infty.$$

§ 2. ПРОЦЕССЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ С НЕОБЯЗАТЕЛЬНО ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ξ_i

Результаты первой главы в значительной степени переносятся на случай, когда случайные величины ξ_i распределены на всей прямой и $M\xi_i > 0$ (см. Феллер [50]). В работах Стоуна [131—133, 135] и Ван дер Генюгтена [143] изучаются различные асимптотические свойства меры

$$\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{(n)}, \tag{35}$$

где μ — вероятностная мера на прямой. В частности, результаты (25) и (26) справедливы в этом более общем случае, когда $M\xi_i > 0$. При $x \to -\infty$ $H(x)$ стремится к нулю как $O(|x|^{-m})$ или $O(e^{-\varepsilon x})$ в зависимости от наличия моментов $F(x)$ и скорости убывания $F(x)$ при $x \to -\infty$. Феллер и Орей [79] показали, что для нерешетчатых μ имеет место альтернатива: для любого конечного $I = (-h, h)$ либо $H(I) = \infty$, либо $H(x + I) \to \alpha |I|$, $x \to \infty$, $0 \leqslant \alpha < \infty$.

В работе Порта [111] дано элементарное вероятностное доказательство (4) и $\lim\limits_{n \to -\infty} h_n = 0$ в дискретном процессе восстановления с $M\xi_i > 0$. А. А. Боровков [11] дал уточнение остаточного члена в теореме Блекуэлла (2) в случае $-\infty < \xi_i < \infty$.

В работе Эриксона [76] результат (33) распространяется на общий случай $-\infty < \xi_i < \infty$. Лорден [106] исследовал распределение перескока α_t. В частности, им доказано, что

$$\sup_{t \geqslant 0} M\alpha_t \leqslant \frac{M(\xi_i^+)^2}{m_1},$$

где $\xi^+ = \frac{\xi + |\xi|}{2}$, и при любом $p > 0$

$$\sup_{t \geqslant 0} M(\alpha_t)^p \leqslant \frac{p+2}{p+1} M(\xi_i^+)^{p+1}/m_1.$$

Смит [123] изучал асимптотическое поведение сумм

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-(l-1)}{n} P\{\xi_1 + \ldots + \xi_n \leqslant x\},$$

где l — фиксированное (не обязательно целое) число. Кавата [91] в случае, когда ξ_k имеет плотность, третий момент ξ_k конечен и

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = a + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

показал, что

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_nP\{t<S_n\leqslant t+h\}=\frac{ha}{m_1}.$$

§ 3. ПРОЦЕССЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ С НЕОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ξ_i

В работах Смита [118, 121, 122] изучается процесс восстановления, в котором $\xi_i\geqslant 0$, независимы,

$$F_i(x)=P\{\xi_i\leqslant x\},\ m_{n1}=M\xi_n,\ 0<\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_{ni}=m<\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\int_{n\varepsilon}^{\infty}(1-F_r(x))\,dx=0$$

для любого $\varepsilon>0$. Пусть $a_n\geqslant 0$ таковы, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\sim\frac{\alpha}{(1-x)^{\gamma}}L\left(\frac{1}{1-x}\right),\quad x\uparrow 1,$$

или

$$\sum_{1}^{N}a_n\sim\frac{\alpha N^{\gamma}L(N)}{\Gamma(1+\gamma)},\quad N\to\infty,$$

где $\alpha>0$, $\gamma>0$, L — медленно меняющаяся функция. Доказывается обобщенная элементарная теорема восстановления

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nP\{S_n\leqslant x\}\sim\frac{\alpha L(x)}{\Gamma(1+\gamma)}\left(\frac{x}{m}\right)^{\gamma},\ x\to\infty.\tag{36}$$

В работе Смита [124] предполагается, что $P\{S_n/\lambda(n)\leqslant x\}$ слабо сходится к $K(x)$, где $\lambda(n)$ — правильно меняющаяся функция с показателем $1/\beta$. Пусть $\Lambda(x)$ — функция, обратная $\lambda(x)$, и $R(x)\sim x^{\alpha}L(x)$ (L — медленно меняющаяся функция). Тогда $MR(\nu_t)\sim I(\alpha\beta)\,R(\Lambda(t))$, $t\to\infty$, где

$$I(\alpha\beta)=\int_0^{\infty}u^{-\alpha\beta}dK(u).$$

Смит [125] рассматривал также случай, когда $\xi_i=\lambda^i\cdot\eta_i$, где η_i неотрицательны, независимы и одинаково распределены, а $\lambda>1$. Эта модель трактуется им как восстановление с улучшающимся качеством.

Вильямсон [145, 146] рассматривал случай независимых неотрицательных ξ_k с бесконечно малыми ξ_k/n, $1 \leqslant k \leqslant n$, для которых

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \leqslant x\right\} = G(x).$$

В этом случае имеет место равенство

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\sum_{j=1}^{\infty}P\left\{x\leqslant\sum_{k=1}^{j}(\xi_k+\varepsilon)\leqslant x+h\right\}dx = h\int_0^{\infty}\frac{dG(x)}{x}.$$

С. С. Ходжабагян [51] доказал ряд локальных предельных теорем для $P\{\nu_t = n\}$, когда

$$\inf_i M\xi_i > 0,\quad \inf_i D\xi_i > 0,\quad \sup_i M|\xi_i - M\xi_i|^3 < \infty$$

и выполнены некоторые другие дополнительные условия. В работах В. В. Конюховского [32] и А. А. Дайона и В. В. Конюховского [18] в предположении $M\xi_i = a^{-1}$ и $M\xi_i f(\xi_i) \leqslant C$, где $f(x)\uparrow\infty$ при $x\uparrow\infty$, доказано, что

$$\lim_{t\to\infty} M\left(\frac{\nu_t}{t}\right)^k = a^k,\quad k = 1, 2, \ldots .$$

А. Обретенев [41] показал, что утверждение (32) с $L(t)\equiv 1$ и $0<\alpha<1$ справедливо для разнораспределенных ξ_i, если соотношение (31) выполняется равномерно для всех ξ_i и имеют место некоторые другие условия. В работах Хейнса и Дэвиса [83] и Линхарта [105] решаются некоторые задачи в альтернирующих процессах восстановления (т. е. в процессах, в которых распределения ξ_i зависят лишь от четности и нечетности i).

§ 4. ПРОЦЕССЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ С ЗАВИСИМЫМИ ξ_i

Имеется несколько работ, в которых допускается зависимость между ξ_n. Чжоу и Роббинс [64] рассматривали последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$, которая образует мартингал. Предполагается, что

$$0 < \lim_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i = m < \infty,\quad m_i = M\xi_i,$$

и $M\{|\xi_n - m_n|^\alpha \mid \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\} \leqslant K < \infty$ при некотором $\alpha > 1$. Доказывается, что в этом случае $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{H(t)}{t} = \frac{1}{m}$.

Брейман [61] изучал процесс восстановления, порожденный стационарным процессом $\xi_1, \xi_2, \ldots$, где ξ_i — положительные случайные величины. Он показал, что справедливость теоремы восстановления Блекуэлла связана со свойством сильного перемешивания порождающего процесса $\{\xi_n\}$.

Санкаранараянан и Суямбулингом [116] исследовали асимптотическое поведение ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n P\{S_n \leqslant x\} \tag{37}$$

в двух случаях: 1) $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \rho$, $i \neq j$, $0 < \rho < 1$, $M\xi_i = m_i$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m_1 + \cdots + m_n}{n^\alpha} = m$, $\alpha > 1$, $0 < m < \infty$; 2) $\{\xi_i\}$ — последовательность одинаково распределенных случайных величин с $M\xi_i = m$, $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \rho^{|i-j|}$, $0 < \rho < 1$. В работе Балакришнана [55] также исследовано асимптотическое поведение ряда (37), когда $a_n \sim n^\lambda L(n)$, L — медленно меняющаяся функция,

$$DS_n \sim nA^2,\ A^2 > 0,\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i \to m,\ 0 < m < \infty.$$

§ 5. ДРУГИЕ ЗАДАЧИ

В работах Хейда [85—87] вместо числа восстановлений ν_t и функции восстановления изучается случайная величина

$$\overline{\nu}_t = \max\{n : \overline{S}_n \leqslant x\},$$

где

$$\overline{S}_n = \max\{0, S_1, S_2, \ldots, S_n\},$$

и $\overline{H}(t) = M\overline{\nu}_t$. Доказывается, что большинство результатов классической теории восстановления переносится на $\overline{\nu}_t$ и $\overline{H}(t)$. В этих же работах Хейда, а также в [55, 116] изучается асимптотика ряда, аналогичного (37), в котором вместо $P\{S_n \leqslant x\}$ берется $P\{\overline{S}_n \leqslant x\}$. В работе А. Алешкявичене [9] найдены асимптотические разложения для вероятностей $P\{\overline{\nu}_t = n\}$ и

$$P\left\{\frac{\overline{S}_n - nm_1}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right\}$$

при $n \to \infty$, $t \to \infty$, $m_1 > 0$ и $\sigma^2 = D\xi_1 < \infty$.

В работе В. П. Чистякова [52] изучается асимптотика функции

$$H(t, A) = \sum_{k=}^{\infty} A^k P\{S_k \leqslant t\} \tag{38}$$

при $A<1$, $t\to\infty$. С. В. Нагаев [39] изучал асимптотику (38) $A\to 1$, $t\to\infty$. Эти результаты находят применение в ветвящихся процессах.

В работах Човера и Нея [63] и Генри [84] изучается нелинейное уравнение восстановления

$$x(t)=a+\mathfrak{M}x(t), \tag{39}$$

в котором оператор $\mathfrak{M}$ определяется как

$$(\mathfrak{M}f)(t)=\psi^{-1}\left\{\int_0^\infty \psi(f(t-y))\,dG(y)\right\},$$

где $G(y)$ — функция распределения на $[0,\infty)$, ψ — непрерывная монотонная функция (например, $\psi(y)=y^p$ или $\psi(y)=\log y$), ψ^{-1} — обратная к ней функция. Находятся условия, при которых $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{X(t)}{t}=\dfrac{a}{m}$, где $m=\int\limits_0^\infty t\,dG(t)$. В работе Абежона [53] рассмотрен один весьма частный случай (39), допускающий явное решение.

Б. Н. Димитров и М. Узунов [21] рассматривали процесс восстановления, который может с некоторой вероятностью оборваться.

Глава III

МНОГОМЕРНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРИИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

§ 1. МНОГОМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Уравнение многомерного восстановления, которое рассматривается в работе Б. А. Севастьянова и В. П. Чистякова [48, 49], может быть записано в матричной форме следующим образом:

$$X(t)=K(t)=\int_0^t dF(u)\cdot X(t-u), \tag{40}$$

где $X(t)=\|X_\beta^\alpha(t)\|$, $K(t)=\|K_\beta^\alpha(t)\|$ есть $n\times N$-матрицы, $F(t)=\|F_\beta^\alpha(t)\|$; $n\times n$-матрица с элементами $F_\beta^\alpha(t)$, которые представляют собой неубывающие непрерывные справа неотрицательные функции, $F_\beta^\alpha(0)=0$. Частный случай (40), когда $K(t)=F(t)$,

$$H(t)=F(t)+\int_0^t dF(u)\cdot H(t-u), \tag{41}$$

определяет матрицу восстановления $H(t)$. Обозначим $F^\alpha_\beta = F^\alpha_\beta(\infty)$ и $F = \|F^\alpha_\beta\|$. Свойства решений уравнений (40) и (41) определяются в значительной степени тем, разложима или нет матрица F, и ее перроновым корнем λ. Уравнение восстановления назовем критическим, если $\lambda = 1$, докритическим, если $\lambda < 1$, и надкритическим, если $\lambda > 1$. В [48, 49] получены асимптотические формулы для $X(t)$ и $H(t)$ с остаточными членами для неразложимых F. Аналогичные асимптотические формулы, в том числе и для разложимых F, получены Крампом [67, 68]. С помощью этих теорем изучена асимптотика первых (см. [48, 49, 67, 68]) и вторых моментов (см. [48, 49]) числа частиц ветвящихся процессов с несколькими типами частиц. Критические уравнения (40) и (41), в которых $\sum_{\beta=1}^{n} F^\alpha_\beta = 1$, возникают при изучении полумарковских процессов (см. обзор В. С. Королюка, С. М. Броди, А. Ф. Турбина [33], обзорную статью Цинлара [65] и статью Кейлсона [92]).

§ 2. ВОССТАНОВЛЕНИЕ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Имеется несколько разных попыток перенести теорию восстановления на случай, когда $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные векторы в d-мерном пространстве R^d с d-мерной функцией распределения $F(x)$. Аналогично одномерному случаю, можно ввести

$$H(A) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(A), \tag{42}$$

где A — борелевские множества в R^d, F_n — n-кратная свертка F самой с собой. Биккел и Яхав [58] доказали, что при $d=2$ и конечных вторых моментах

$$\lim_{a\to\infty} \{H(S(0, a+\Delta)) - H(S(0, a))\} = \frac{\Delta}{\|M\xi_1\|},$$

где $S(0, a)$ — сфера радиуса a с центром в 0, $\|\cdot\|$ — какая-либо норма. Те же авторы [57] рассматривали в произвольном пространстве R^d суммы $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ и частоту ее попадания $\nu(z)$ в множество $A(z) = \{\max_{1\leq i\leq d} |y_i| < z\}$. Доказано, что если существует $m = M\xi_1$, то

$$\lim_{z\to\infty} \Phi\left(\frac{t}{z}, z\right) = \exp t \cdot \|m\|^{-1},$$

где $\Phi(t, z)$ — производящая функция моментов $\nu(z)$.

Дони [72] рассматривал случайное блуждание на целочисленной решетке d-мерного пространства R^d. Пусть переходные вероятности через n шагов равны $P_n(x, y) = P_n(0, y-x)$. Определим функцию Грина

$$H(x, y) = H(0, y-x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, y), \quad x, y \in R_d.$$

Пусть $m = \sum_x xP(0, x) \neq 0$ и пусть $P(0, x)$ имеет конечные третьи моменты. Доказывается, что в непериодическом блуждании предел

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{d-1}{2}} H(0, [t\alpha]) \tag{43}$$

равен 0, если $\frac{\alpha}{|\alpha|} \neq \frac{m}{|m|}$, и положителен, если $\frac{\alpha}{|\alpha|} = \frac{m}{|m|}$.

В работах Стама [127—129] для $H(A)$, определенного (42), доказывается утверждение, аналогичное (43), а именно, для любого ограниченного борелевского множества $A \in R^d$

$$\lim_{t\to\infty} t^{\rho} H(A + tm) = \beta |A|, \tag{44}$$

где $|A|$ — лебегова мера A, $\rho = \frac{d-1}{2}$, и

$$\lim_{t\to\infty} t^{\rho} H(A + tc) = 0,$$

если вектор c не коллинеарен m или $c = -km$, $k > 0$. Им же получен ряд результатов о времени первого достижения полупространства и о точке вхождения в полупространство. В работах Фаррелла [77] и Кеннеди [94] изучается случайная величина

$$\nu(t) = \max\{n: h(S_n) \leqslant t\},$$

где $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых векторов или стационарная последовательность векторов в R^d, $h(x)$ — некоторая скалярная функция от векторного аргумента $x \in R^d$. Исследуются асимптотические свойства распределения $\nu(t)$ и $X(t) = t - h(S_{\nu(t)})$. Изучено также асимптотическое поведение при $t \to \infty$ случайных функционалов от $\nu(t)$.

В работе Бретаньоля и Дакуна-Кастеля [62] показано, что при $d \geqslant 2$ $H(A + x) \to 0$, $x \to \infty$, если A — любая полоса конечной ширины. Хатори [82] рассматривает случай $d = 2$. Обозначим $W_n = \varphi(S_n)$, где φ — однородная функция, удовлетворяющая некоторым условиям. Пусть

$$\nu(t) = \max_n \{n: W_n \leqslant t\}, \quad X(t) = t - W_{\nu(t)}.$$

Доказывается, что при конечности вторых моментов ξ_i существует предел $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T X(t)\,dt$ и находится его выражение через производные функции φ и вторые моменты ξ_i.

В фундаментальной работе [134] Стоун предлагает такие формулировки основных теорем теории восстановления, которые в многомерном случае позволяют ему получить нетривиальные интересные результаты. В частности, вместо $H(x+A)$ он рассматривает ее свертку с некоторой мерой ν, а затем полагает $x\to\infty$, что приводит к пределу, пропорциональному мере Хаара множества A соответствующей группы, связанной с носителем меры F.

§ 3. ДРУГИЕ ЗАДАЧИ

В работе Нея и Вайнгера [109] доказывается теорема восстановления в двумерном времени. Пусть X_{ij}, $i\geqslant 1$, $j\geqslant 1$, независимы, одинаково распределены, принимают целые неотрицательные значения с шагом решетки единица и $MX_{ij}=\mu>0$. Обозначим $S_{mn}=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}X_{ij}$ и N_k=числу пар (m, n), для которых $S_{mn}=k$. Назовем $h_k=MN_k$ последовательностью восстановления. Доказывается, что

$$\sum_{k=1}^{n}h_k\sim\frac{n\log n}{\mu},$$

а при $MX_{ij}^4<\infty$ и $\sigma^2=DX_{ij}>0$

$$h_n\sim\mu^{-1}\log n.$$

Ревю [114] переносит теоремы восстановления на некоторые алгебраические структуры. Спитцер [126] распространяет некоторые теоремы восстановления на цепи Маркова x_1, x_2, ... с целочисленным фазовым пространством. Пусть переходная вероятность $P(x, y)=0$ при $y\leqslant x$. Обозначим $P_n(x, y)$ переходную вероятность за n шагов и

$$G(x, y)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x, y)$$

функцию Грина. Обозначим

$$T_n=\min\{k: x_k>n\}.$$

Доказывается, что при некоторых условиях

$$M\{T_n\mid x_1=0\}=\sum_{x=0}^{\infty}G(0, x)\sim f(n),$$

где $f(x)$ — решение уравнения

$$\sum_y P(x, y) f(y) - f(x) = 1,$$

удовлетворяющее условию

$$\sum_y P(x, y) f(y) < \infty.$$

В работе И. И. Ежова [23] рассматривается марковский (x, y) процесс с состояниями, в котором имеется детерминированное движение $(x+t,\ y+t)$ со случайными скачкообразными срывами на оси координат из точки (x, y) в точку $(0, y)$ или $(x, 0)$. Найдено стационарное распределение.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Алешкявичене А.**, Локальная предельная теорема для рекуррентных событий. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1965, 5, № 3, 373—380 (РЖМат, 1967, 7В27)
2. — , Асимптотическое разложение для распределения числа появлений рекуррентного события. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1966, 6, № 1, 5—14 (РЖМат, 1967, 5В27)
3. — , Большие уклонения для числа появлений рекуррентного события. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1967, 7, № 2, 185—193 (РЖМат, 1968, 7В18)
4. — , Центральная предельная теорема для сумм дискретных процессов восстановления. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1968, 7, № 3, 381—388 (РЖМат, 1968, 11В42)
5. — , Центральная предельная теорема для сумм процессов восстановления. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1968, 8, № 4, 617—631 (РЖМат, 1970, 4В23)
6. — , Вычисление моментов и семиинвариантов дискретного процесса восстановления. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1969, 9, № 3, 441—454 (РЖМат, 1970, 6В103)
7. — , Асимптотические разложения для процессов восстановления. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1969, 9, № 4, 713—729 (РЖМат, 1970, 6В104)
8. — , Некоторые предельные теоремы для процессов восстановления. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1971, 11, № 1, 19—58 (РЖМат, 1971, 12В203)
9. — , Асимптотические разложения для обобщенного процесса восстановления. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1972, 12, № 1, 5—21 (РЖМат, 1972, 10В42)
10. **Банис Р. Т.**, О сходимости сумм случайного числа многомерных ступенчатых случайных процессов к обобщенным пуассоновским. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1971, 11, № 3, 517—527 (РЖМат, 1972, 3В111)
11. **Боровков А. А.**, Замечания к теоремам Винера и Блекуэлла. Теория вероятностей и ее применения, 1964, 9, № 2, 331—343 (РЖМат, 1964, 12В36)
12. — , Некоторые теоремы теории восстановления и их приложения. Сиб. мат. ж., 1968, 9, № 2, 249—254 (РЖМат, 1968, 12В57)
13. **Гельфонд А. О.**, Оценка остаточного члена в предельной теореме для рекуррентных событий. Теория вероятностей и ее применения, 1964, 9, № 2, 327—331 (РЖМат, 1964, 12В21)

14. **Гнеденко Б. В.**, Фрайер Б., Несколько замечаний к одной работе И. Н. Коваленко. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1969, **9**, № 3, 463—470 (РЖМат, 1970, 8В35)

15. **Григелионис Б. И.**, О центральной предельной теореме для сумм процессов восстановления. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1964, 4, № 2, 197—201 (РЖМат, 1965, 2В55)

16. — , Предельные теоремы для сумм процессов восстановления. В сб. «Кибернетику на службу коммунизму». Т. 2. М.-Л., Энергия, 1964, 246—266 (РЖМат, 1966, 9В30)

17. — , К вопросу о сходимости сумм ступенчатых случайных процессов к пуассоновскому. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1966, **6**, № 2, 241—244 (РЖМат, 1967, 5В25)

18. **Дайон А. А.**, Конюховский В. В., Некоторые свойства процессов восстановления. Сб. работ Вычисл. центра Моск. ун-та, 1972, 18, 16—23 (РЖМат, 1973, 2В88)

19. **Димитров Б. Н.**, Последовательности процессов восстановления и случайные суммы. Сб. работ Вычисл. центра Моск. ун-та, 1972, 18, 3—15 (РЖМат, 1973, 1В133)

20. — , О равномерной теории восстановления. Сб. работ Вычисл. центра Моск. ун-та, 1972, 18, 24—30 (РЖМат, 1973, 2В89)

21. — ,Узунов М., Теория на възстановяването. Физ.-мат. описание, 1968, 11, № 4, 259—276 (РЖМат, 1969, 7В64)

22. **Дынкин Е. Б.**, Некоторые предельные теоремы для сумм независимых случайных величин с бесконечными математическими ожиданиями. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1955, **19**, № 4, 247—266 (РЖМат, 1956, 5998)

23. **Ежов И. И.** (**Єжов І. І.**), Про одне узагальнення процесів відновлення. Вісник Київськ. ун-ту. Сер. мат. та мех., 1968, № 10, 55—59 (РЖМат, 1969, 6В60)

24. **Каминскене Б. А.**, Центральная предельная теорема для сумм дискретных процессов восстановления. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1969, **9**, № 3, 497—514 (РЖМат, 1970, 8В34)

25. — , Центральная предельная теорема для сумм процессов восстановления. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1970, **10**, № 2, 259—280 (РЖМат, 1971, 2В27)

26. — ,Некоторые оценки для функций восстановления. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1971, 11, № 3, 563—568 (РЖМат, 1972, 3В109)

27. **Коваленко И. Н.**, О классе предельных распределений для последовательностей серий сумм независимых процессов восстановления. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1965, **5**, № 4, 561—568 (РЖМат, 1966, 7В29)

28. — , О классе предельных распределений для редеющих потоков однородных событий. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1965, **5**, № 4, 569—573 (РЖМат, 1966, 7В44)

29. — , Теория массового обслуживания. В сб. «Теория вероятностей. Мат. статистика. Теор. кибернетика». 1970. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР). М., 1971, 5—109 (РЖМат, 1972, 4В34)

30. **Кокс Д. Р.**, Льюис П., Статистический анализ последовательностей событий. Перев. с англ. М., «Мир», 1969, 312 стр. (РЖМат, 1970, 6В221К)

31. — , Смит В. Л., Теория восстановления. Перев. с англ. М., «Сов. радио», 1967, 299 стр. (РЖМат, 1968, 11В41К)

32. **Конюховский В. В.**, Асимптотика моментов числа восстановлений. В сб. «Мат. вопр. упр. произ-вом. Вып. 2». М., Моск. ун-т, 1970, 184—198 (РЖМат, 1971, 4В84)

33. **Королюк В. С.**, Броди С. М., Турбин А. Ф., Полумарковские процессы и их применение. В сб. «Теория вероятностей. Мат. статистика. Теор. кибернетика». Т. 11. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР). М., 1973, 47—97

34. **Лютикас В.**, О производящей функции моментов числа восстановлений в случае дискретного процесса восстановления. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1965, 5, № 3, 421—425 (РЖМат, 1966, 6В20)

35. — , Вычисление моментов и семиинвариантов числа восстановлений в случае дискретного процесса восстановления. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1966, 6, № 1, 75—83 (РЖМат, 1967, 10В21)

36. — , О центральной предельной теореме для сумм дискретных процессов восстановления. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1966, 6, № 3, 381—392 (РЖМат, 1968, 3В20)

37. **Нагаев А. В.**, Локальная предельная теорема для числа восстановлений. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1970, 10, № 1, 109—119 (РЖМат, 1970, 10В37)

38. **Нагаев С. В.**, Одна теорема теории восстановления. В сб. «Теория вероятностей и мат. стат.». Вып. I. Ташкент, «Наука», 1964, 100—102 (РЖМат, 1965, 2В54)

39. — , Некоторые теоремы типа восстановления. Теория вероятностей и ее применения, 1968, 13, № 4, 585—601; исправление, 1969, 14, № 4, 759 (РЖМат, 1969, 6В59; 1970, 7В92)

40. **Обретенев А.**, Едно асимптотично разпределение при непрекъснат процес на възстановяване. Изв. Мат. ин-т. Бълг. АН, 1966, 9, 157—167 (РЖМат, 1968, 3В23)

41. — , Една теорема за възстановяване при несъществуване на първите моменти. Годишник Софийск. ун-т. Мат. фак., 1965—1966 (1967), 60, 1—8 (РЖМат, 1968, 9В20)

42. — , Едно обобщение на възстановителната теорема на Блекуел. Годишник Софийск. ун-т. Мат. фак., 1965—1966 (1967), 60, 275—278 (РЖМат, 1968, 9В21)

43. — , Асимптотические свойства плотности функции восстановления. Докл. Болг. АН, 1967, 20, № 8, 763—766 (РЖМат, 1968, 5В26)

44. **Саас Д.**, О сходимости сумм независимых целозначных процессов. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1971, 11, № 4, 867—874 (РЖМат, 1972, 3В112)

45. **Сапаговас И.**, О сходимости сумм марковских процессов восстановления к процессу Пуассона. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1966, 6, № 2, 271—277 (РЖМат, 1967, 6В25)

46. — , О сходимости сумм марковских процессов восстановления к многомерному процессу Пуассона. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1969, 9, № 4, 817—826 (РЖМат, 1970, 8В90)

47. **Севастьянов Б. А.**, Уравнения типа восстановления и моменты ветвящихся процессов. Мат. заметки, 1968, 3, № 1, 3—14 (РЖМат, 1968, 9В54)

48. — , **Чистяков В. П.**, Уравнения многомерного восстановления и моменты ветвящихся процессов. В сб. «Сов.-Японск. симпозиум по теории вероятностей, 1969. Ч. 1.» Новосибирск, 1969, 253—268 (РЖМат, 1970, 5В91)

49. — , — , Уравнения многомерного восстановления и моменты ветвящихся процессов. Теория вероятностей и ее применения, 1971, 16, № 2, 201—217 (РЖМат, 1971, 12В195)

50. **Феллер В.**, Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Перев. с англ., М., «Мир». Т. I, 1964; Т. II, 1967 (РЖМат, 1965, 3В37К)

51. **Ходжабагян С. С.**, Локальная теорема для числа восстановлений. ЎзССР Фанлар Акад. ахбороти. Физ.-мат. фанлари сер., Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н., 1972, № 1, 42—45 (РЖМат, 1972, 9В17)

52. **Чистяков В. П.**, Теорема о суммах независимых положительных слу-

чайных величин и ее приложения к ветвящимся случайным процессам. Теория вероятностей и ее применения, 1964, 9, № 4, 710—718 (РЖМат, 1966, 2В41)
53. **Abejón Adámez Manuel,** Une problema de renovacion no lineal. Trab. estadist. y invest. oper., 1971, **22,** № 3, 3—9 (РЖМат, 1972, 6В68)
54. **Ambartzumian R. V.,** Correlation properties of the intervals in the superpositions of independent stationary recurrent point processes. Stud. sci. math. hung., 1969, **4,** № 1-4, 161—170 (РЖМат, 1970, 7В91)
55. **Balakrishnan V.,** A renewal theorem for a sequence of dependent random variables. Indian J. Pure and Appl. Math., 1971, **2,** № 2, 301—311
56. **Bártfai P.,** Die Bestimmung der zu einem wiederkehrenden Prozess gehörenden Verteilungsfunktion aus den mit Fehlern behafteten Daten einer einzigen Realisation. Stud. sci. math. hung. (ex. Akad. Math. kutato int. közl.), 1966, **1,** № 1-2, 161—168 (РЖМат, 1967, 7В29)
57. **Bickel P. J.,** Y a h a v J. A., The number of visits of vector walks to bounded regions. Isr. J. Math., 1965, **3,** № 4, 181—186 (РЖМат, 1967, 6В27)
58. — , — , Renewal theory in the plane. Ann. Math. Stat., 1965, **36,** № 3, 946—955 (РЖМат, 1966, 1В38)
59. **Bloomfield P.,** Lower bounds for renewal sequences and p-functions. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1971, **19,** № 4, 271—273 (РЖМат, 1972, 1В182)
60. **Blumenthal S.,** G r e e n w o o d J. A., H e r b a c h L., Superimposed nonstationary renewal processes. J. Appl. Probab., 1971, **8,** № 1, 184—192 (РЖМат, 1971, 11В135)
61. **Breiman L.,** Some probabilistic aspects of the renewal theorem. Trans. 4th Prague Conf. Inform. Theory, Statist. Decis. Funct. Random Process, 1965. Prague, 1967, 255—261 (РЖМат, 1968, **10**В41)
62. **Bretagnolle J.,** D a c u n h a - C a s t e l l e D., Marches aléatoires récurrentes sur R^p. C. r. Acad. sci., 1964, **259,** № 17, 2765—2768 (РЖМат, 1965, 6В28)
63. **Chover J.,** N e y P., The non-linear integral equation. J. Analyse math., 1968, **21,** 381—413
64. **Chow Y. S.,** R o b b i n s H., A renewal theorem for random variables which are dependent or non-identically distributed. Ann. Math. Stat., 1963, **34,** № 2, 390—395 (РЖМат, 1964, 3В38)
65. **Çinlar E.,** Markov renewal theory. Adv. Appl. Probab., 1969, **1,** № 2, 123—187 (РЖМат, 1970, 11В82)
66. **Cox D. R.,** Renewal theory. N. Y., J. Wiley, 1962, IX, 142 pp.
67. **Crump K. S.,** On systems of renewal equations. J. Math. Anal. and Appl., 1970, **30,** № 2, 425—434 (РЖМат, 1971, 2В77)
68. — , On systems of renewal equations: the reducible case. J. Math. Anal. and Appl., 1970, **31,** № 3, 517—528 (РЖМат, 1971, 4В81)
69. **Daley D. J.,** On a class of renewal functions. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1965, **61,** № 2, 519—526 (РЖМат, 1965, 10В29)
70. **Dall'Aglio G.,** Present value of a renewal process. Ann. Math. Stat., 1964, **35,** № 3, 1326—1331 (РЖМат, 1965, 10В28)
71. **Davidson R.,** Sur un problème relatif aux suites récurrentes monotone. C. r. Acad. sci., 1969, **268,** № 10, A549—A551 (РЖМат, 1969, 12В87)
72. **Doney R. A.,** An analogue of the renewal theorem in higher dimensions. Proc. London Math. Soc., 1966, **16,** № 4, 669—684 (РЖМат, 1967, 6В24)
73. **Ehrenfeld S.,** Interpolation of the renewal function. Oper. Res., 1966 **14,** № 1, 79—83 (РЖМат, 1967, 10В22)
74. **Enns E. G.,** A stochastic superposition process and an integral inequality for distributions with monotone hazard rates. Austral. J. Statist., 1970, **12,** № 1, 44—49 (РЖМат, 1971, 1В102)
75. **Erickson K. B.,** Strong renewal theorems with infinite mean. Trans. Amer. Math. Soc., 1970, **151,** № 1, 263—291 (РЖМат, 1971, 8В42)
76. — , A renewal theorem for distributions on R' without expectation.

Bull. Amer. Math. Soc., 1971, **77**, № 3, 406—410 (РЖМат, 1972, 1В180)
77. **Farrell R. H.**, Limit theorems for stopped random walks. I, II, III. Ann. Math. Stat., 1964, **35**, № 3, 1332—1343; 1966, **37**, № 4, 860—865; 1966, **37**, № 6, 1510—1527 (РЖМат, 1965, 11В15; 1971, 10В95; 1971, 10В96)
78. **Feller W.**, Fluctuation theory of recurrent events. Trans. Amer. Math. Soc., 1949, **67**, 98—119
79. — , Orey S., A renewal theorem. J. Math. and Mech., 1961, **10**, № 4, 619—624 (РЖМат, 1962, 7В13)
80. **Garsia Adriano**, Lamperti J., A discrete renewal theorem with infinite mean. Comment. math. helv., 1963, **37**, № 3, 221—234 (РЖМат, 1964, 1В32)
81. **Haight F. A.**, Counting distributions for renewal processes. Biometrika, 1965, **52**, № 3-4, 395—403 (РЖМат, 1966, 10В23)
82. **Hatori Hirohisa**, Some theorems in an extended renewal theory. V. Tru Math., 1966, **2**, 31—34 (РЖМат, 1968, 8В40)
83. **Haynes T.**, Davis E. A., Waiting-time for a large gap in an alternating renewal process. Technometrics, 1970, **12**, № 3, 697—699 (РЖМат, 1971, 4В83)
84. **Henry B.**, L_p averages and the nonlinear renewal equation. Duke Math. J., 1969, **36**, № 3, 547—558 (РЖМат, 1970, 6В106)
85. **Heyde C. C.**, Some renewal theorems with application to a first passage problem. Ann. Math. Stat., 1966, **37**, № 3, 699—710 (РЖМат, 1971, 11В133)
86. — , Asymptotic renewal results for a natural generalization of classical renewal theory. J. Roy. Statist. Soc., 1967, **B29**, № 1, 141—150 (РЖМат, 1968, 6В16)
87. — , Variations on a renewal theorem of Smith. Ann. Math. Stat., 1968, **39**, № 1, 155—158 (РЖМат, 1971, 10В146)
88. **Horn R. A.**, On moment sequences and renewal sequences. J. Math. Anal. and Appl., 1970, **31**, № 1, 130—135 (РЖМат, 1971, 3В71)
89. **James M. F.**, On the conditional expected value of contributions from a renewal process. J. Appl. Probab., 1966, **3**, № 2, 464—480 (РЖМат, 1967, 6В26)
90. **Jongh B. H. de**, Reduction of the probability-of-ruin equation to a renewal equation. Bl. Dtsch. Ges. Versicherungsmath., 1968, **8**, № 4, 603—609 (РЖМат, 1969, 11В83)
91. **Kawata Tatsuo**, A theorem of renewal type. Kōdai Math. Semin. Repts., 1961, **13**, № 3, 185—194 (РЖМат, 1962, 7В141)
92. **Keilson J.**, On the matrix renewal function for Markov renewal processes. Ann. Math. Stat., 1969, **40**, № 6, 1901—1907 (РЖМат, 1971, 6В62)
93. **Kendall D. G.**, Renewal sequences and their arithmetic. Lect. Notes Math., 1967, **31**, 147—175 (РЖМат, 1969, 8В22)
94. **Kennedy D. P.**, A functional central limit theorem for k-dimensional renewal theory. Ann. Math. Stat., 1971, **42**, № 1, 376—380 (РЖМат, 1972, 1В179)
95. **Klamkin M. S.**, Lint J. H. van, An asymptotic problem in renewal theory. Statist. neer., 1972, **26**, № 3, 191—196 (РЖМат, 1972, 12В80)
96. **Lamperti J.**, A contribution to renewal theory. Proc. Amer. Math. Soc., 1961, **12**, № 5, 724—731 (РЖМат, 1962, 12В20)
97. **Lawrance A. J.**, Selective interaction of a Poisson and renewal process: first-order stationary point results. J. Appl. Probab., 1970, **7**, № 2, 359—372 (РЖМат, 1971, 4В347)
98. — , Selective interaction of a stationary point process and a renewal process. J. Appl. Probab., 1970, **7**, № 2, 483—489 (РЖМат, 1971, 4В346)
99. — , Selective interaction of a Poisson and renewal process: the dependency structure of the intervals between responses. J. Appl. Probab., 1971, **8**, № 1, 170—183 (РЖМат, 1971, 11В134)
100. — , Arbitrary event initial conditions for branching Poisson processes. J. Roy. Statist. Soc., 1972, **B34**, № 1, 114—123 (РЖМат, 1972, 11В74)

101. **Leadbetter M. R.**, Bounds on the error in the linear approximation to the renewal function. Biometrika, 1964, **51**, № 3-4, 355—364 (РЖМат, 1965, 6В29)
102. **Leslie R. T.**, Recurrence times of clusters of Poisson points. J. Appl. Probab., 1969, **6**, № 2, 372—388 (РЖМат, 1970, 7В94)
103. **Lewis P. A. W.**, A branching Poisson process model for the analysis of computer failure patterns. J. Roy. Statist. Soc., 1964, **B26**, № 3, 398—441. Discuss., 442—456 (РЖМат, 1966, 2В169)
104. — , Non-homogeneous branching Poisson processes. J. Roy. Statist. Soc., 1967, **B29**, № 2, 343—354 (РЖМат, 1968, 6В45)
105. **Linhart P. B.**, Alternating renewal processes with applications to some single-server problems. 5th Internat. Teletraffic Congr., New York, 1967. Preprints techn. papers. S. l., s. a., 442—447 (РЖМат, 1969, 2В56)
106. **Lorden G.**, On excess over the boundary. Ann. Math. Stat., 1970, **41**, № 2, 520—527 (РЖМат, 1971, 10В97)
107. **Mogyoródi J.**, Rekurrens folyamatok ritkításáról. Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1970, **19**, № 1-2, 25—31 (РЖМат, 1970, 9В27)
108. — , Some remarks on the rarefaction of the renewal processes. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1971, **11**, № 2, 303—315 (РЖМат, 1971, 11В138)
109. **Ney P.**, W a i n g e r S., The renewal theorem for a random walk in two-dimensional time. Stud. math. (PRL), 1972, **44**, № 1, 71—85 (РЖМат, 1973, 1В132)
110. **Philipson C.**, Lewis' branching Poisson process model from the point of view of the theory of compound Poisson processes. Skand. aktuarie-tidskr., 1966, № 3-4, 183—198 (РЖМат, 1968, 6В46)
111. **Port S. C.**, A simple probabilistic proof of the discrete generalized renewal theorem. Ann. Math. Stat., 1965, **36**, № 4, 1294—1297 (РЖМат, 1966, 8В26)
112. **Rao M.**, W e d e l H., Poisson processes as renewal processes invariant under translations. Math. Centre Tracts, 1968, № 26, 3—6 (РЖМат, 1972, 10В125)
113. — , — , Poisson processes as renewal processes invariant under translations. Ark. mat., 1969, **7**, № 6, 539—541 (РЖМат, 1969, 7В65)
114. **Revuz D.**, Théorème du renouvellements pour une classe de groupes de Lie et espaces homogènes. C. r. Acad. sci., 1971, **273**, № 4, A243—A247 (РЖМат, 1972, 1В68)
115. **Root D.**, A counterexample in renewal theory. Ann. Math. Stat., 1971, **42**, № 5, 1763—1766 (РЖМат, 1972, 5В81)
116. **Sankaranarayanan G.**, S u y a m b u l i n g o m C., Some renewal theorems concerning a sequence of correlated random variables. Pacif. J. Math., 1969, **30**, № 3, 785—803; correction: 1970, **35**, № 3, 805 (РЖМат, 1970, 7В90; 1971, 12В204)
117. **Smith W. L.**, Renewal theory and its ramifications. J. Roy. Stat. Soc., 1958, **B20**, № 2, 243—284 (РЖМат, 1959, 11288)
118. — , On some general renewal theorems for non-identically distributed variables. Proc. 4th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probabil., 1960, Vol. 2. Berkeley — Los Angeles, Univ. California Press, 1961, 467—514 (РЖМат, 1963, 8В128)
119. — , A note on the renewal function when the mean renewal lifetime is infinite. J. Roy. Statist. Soc., 1961, **B23**, № 1, 230—237 (РЖМат, 1963, 12В161)
120. — , On necessary and sufficient conditions for the convergence of the renewal density. Trans. Amer. Math. Soc., 1962, **104**, № 1, 79—100 (РЖМат, 1963, 4В101)
121. — , On the elementary renewal theorem for non-identically distributed variables. Pacif. J. Math., 1964, **14**, № 2, 673—699 (РЖМат, 1965, 7В18)
122. — , On the weak law of large numbers and the generalized elementary

renewal theorem. Pacif. J. Math., 1967, 22, № 1, 171—188 (РЖМат, 1968, 4B23)
123. —, A theorem on functions of characteristic functions and its application to some renewal theoretic random walk problems. Proc. 5th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probabil., 1965—1966. Vol. 2. Part 2. Berkeley — Los Angeles, 1967, 265—309 (РЖМат, 1970, 3B17)
124. — , On infinitely divisible laws and a renewal theorem for non-negative random variables. Ann. Math. Stat., 1968, **39**, № 1, 139—154 (РЖМат, 1971, 7B129)
125. — , Remarks on renewal theory when the quality of renewals varies. Bull. Inst. Statist. Inst., 1969, **42**, № 2, 1049—1061. Discuss., 1061 (РЖМат, 1971, 1B101)
126. **Spitzer F.**, Renewal theorems for Markov chains. Proc. 5th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probabil., 1965—1966. Vol. 2. Part 2. Berkeley — Los Angeles, 1967, 311—320 (РЖМат, 1970, 2B61)
127. **Stam A. J.**, Renewal theory in r-dimensions I, II. Compos. math., 1969, **21**, № 4, 383—399; 1971, **23**, № 1, 1—13 (РЖМат, 1970, 11B81)
128. — , Local central limit theorem for first entrance of a random walk into a half space. Compos. math., 1971, **23**, № 1, 15—23
129. — , Two theorems in r-dimensional renewal theory. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1968, **10**, № 1, 81—86 (РЖМат, 1969, 6B58)
130. **Steutel F. W.**, Infinitely divisible renewal distributions. Ann. Math. Stat., 1969, **40**, № 3, 1109—1113 (РЖМат, 1971, 7B26)
131. **Stone C. J.**, On moment generating functions and renewal theory. Ann. Math. Stat., 1965, **36**, № 4, 1298—1301 (РЖМат, 1966, 3B48)
132. — , On characteristic functions and renewal theory. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, **120**, № 2, 327—342 (РЖМат, 1966, 10B22)
133. — , On absolutely continuous components and renewal theory. Ann. Math. Stat., 1966, **37**, № 1, 271—275 (РЖМат, 1966, 11B19)
134. — , Infinite particle systems and multi-dimensional renewal theory. J. Math. and Mech., 1968, **18**, № 3, 201—227 (РЖМат, 1970, 4B88)
135. — , On the potential operator for one-dimensional recurrent random walks. Trans. Amer. Math. Soc., 1969, **136**, 413—426 (РЖМат, 1970, 3B92)
136. **Störmer H.**, Zur Überlagerung von Erneuerungsprozessen. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1969, **13**, № 1, 9—24 (РЖМат, 1970, 2B108)
137. **Taga Yasushi**, On high order moments of the number of renewals. Ann. Inst. Statist. Math., 1964, **15**, № 3, 187—196 (РЖМат, 1965, 2B56)
138. **Ten Hoopen M.**, Reuver H. A., Selective interaction of two independent recurrent processes. J. Appl. Probab., 1965, **2**, № 2, 286—292 (РЖМат, 1968, 1B216)
139. — , — , Interaction between two independent recurrent time series. Inform. and Contr., 1967, **10**, № 2, 149—158 (РЖМат, 1968, 5B168)
140. **Teugels J. L.**, Exponential decay in renewal theorems. Bull. Soc. math. Belg., 1967, **19**, № 3, 259—276 (РЖМат, 1968, 11B43)
141. — , Renewal theorems when the first or the second moment is infinite. Ann. Math. Stat., 1968, **39**, № 4, 1210—1219 (РЖМат, 1971, 7B130)
142. **Thedéen T.**, On stochastic stationarity of renewal processes. Ark. mat., 1967, **7**, № 3, 249—263 (РЖМат, 1969, 11B84)
143. **Van der Genugten B. B.**, Asymptotic expansions in renewal theory. Compos. math., 1969, **21**, № 4, 331—342 (РЖМат, 1970, 11B79)
144. **Weiss G. H.**, Laguerre expansions for successive generations of a renewal process. J. Res. Nat. Bur. Standards, 1962, **B66**, № 4, 165—168 (РЖМат, 1965, 1B19)
145. **Williamson J. A.**, Some renewal theorems for non-negative independent random variables., Trans. Amer. Math. Soc., 1965, **114**, № 2, 417—445 (РЖМат, 1966, 7B28)
146. — , A relation between a class of limit laws and a renewal theorem. Ill. J. Math., 1966, **10**, № 2, 210—219 (РЖМат, 1967, 3B28)