

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Кравченко, В. Г. Сологуб, Об одном асимптотическом методе решения задач рассеяния волн одиночными экранами ленточного типа, *Докл. АН СССР*, 1989, том 304, номер 3, 577–582

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.91

28 марта 2025 г., 13:33:17



Одно из условий положительности этой квадратичной формы совпадает с неравенством (1).

Таким образом, неравенство (1) доказано. Для доказательства неравенства (2) достаточно в предыдущих рассуждениях поменять ролями теплопроводность и электропроводность.

Неулучшаемость оценок (1) и (2) означает, что для каждой пары чисел λ , σ , удовлетворяющих этим неравенствам, существует композит из рассматриваемого класса со сколь угодно близкими соответствующими эффективными константами. Неулучшаемость доказывается с помощью предложенных в работах [1, 2] слоистых композитов второго ранга.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
30 X 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье К.А., Черкаев А.В. — ДАН, 1982, т. 264, № 5, с. 1128–1130. 2. Лурье К.А., Черкаев А.В. В сб.: Вопросы нелинейной механики сплошной среды. Таллин: Валгус, 1985, с. 63–72.

УДК 518.371

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В.Ф. КРАВЧЕНКО, В.Г. СОЛОГУБ

ОБ ОДНОМ АСИМПТОТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАСSEЯНИЯ ВОЛН ОДИНОЧНЫМИ ЭКРАНАМИ ЛЕНТОЧНОГО ТИПА

(Представлено академиком Ю.А. Митропольским 26 X 1987)

1. Характеристики рассеяния одиночных ленточных экранов могут быть получены на основании анализа решения соответствующих двумерных электродинамических задач о падении на них плоских электромагнитных волн с различными типами поляризации — горизонтальной и вертикальной. Эти задачи сводятся к решению систем парных интегральных уравнений вида

$$(1) \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda = 0 & \text{при } |t| > 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda) K(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda = f(t) & \text{при } |t| < 1, \end{cases}$$

где функция $f(t)$ задана (она определяется падающим полем), а весовая функция $K(\lambda)$, связанная с характеристиками окружающей экран среды и его размерами, обладает следующими свойствами: а) $K(\lambda)$ — четная функция λ , интегрируемая на каждом конечном интервале; б) при $|\lambda| \rightarrow \infty$ имеет место представление $K(\lambda) = K_0(\lambda) [1 - \epsilon(\lambda)]$; $K_0(\lambda) = |\lambda|^\gamma$, где $\gamma = \pm 1$, а $\epsilon(\lambda) = O(\lambda^{-2})$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$; в) $K(\lambda)$ допускает факторизацию, т.е. представление в виде $K(\lambda) = K_+(\lambda)K_-(\lambda)$, где функция $K_+(\lambda)$ аналитична и не имеет нулей в верхней полуплоскости комплексного переменного λ , а $K_-(\lambda)$ обладает теми же свойствами в нижней полуплоскости; г) для всякой знакопостоянной и непрерывной функции

$\varphi(\lambda)$ из условия $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)K(\lambda)d\lambda = 0$ следует, что $\varphi(\lambda) = 0$. Последнее условие обеспечивает единственность решения уравнений (1) в классе функций, удовлетворяющих условию $\int_{-\infty}^{\infty} |X(\lambda)|^2 |K(\lambda)|d\lambda < \infty$, которое вытекает из требования конечности энергии поля в любой ограниченной области пространства.

2. Разработаны и обоснованы два способа решения систем парных интегральных уравнений (1), основанные на их сведении к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода с помощью метода частичного полуобращения оператора. Первый способ опирается на тот факт, что при $K(\lambda) = K_0(\lambda)$ решение уравнений (1) может быть получено с использованием известного решения задачи Римана–Гильберта для отрезка вещественной оси [1]. Тогда, опираясь на результаты работы [2], приходим к интегральному уравнению

$$(2) \quad X(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda, \mu)X(\mu)d\mu + b(\lambda), \quad -\infty < \lambda < \infty,$$

с гладким, достаточно быстро убывающим на бесконечности ядром простого вида; при $\gamma = 1$ функция $A(\lambda, \mu)$ будет иметь вид

$$A(\lambda, \mu) = \frac{|\mu| \epsilon(\mu)}{2(\mu - \lambda)} [J_0(\lambda)J_1(\mu) - J_1(\lambda)J_0(\mu)],$$

где $J_m(x)$, $m = 0, 1$, — функции Бесселя. Заметим, что скорость убывания ядра $A(\lambda, \mu)$ при $|\mu| \rightarrow \infty$ за счет изменения вида $b(\lambda)$ может быть сколь угодно большой. Эти свойства ядра позволяют для определения решения (2) эффективно использовать стандартные численные методы. В частности, один из способов решения уравнения (2) может быть основан на замене бесконечного промежутка интегрирования в (2) конечным (поскольку подынтегральная функция ведет себя не хуже $O(\mu^{-4})$ при $|\mu| \rightarrow \infty$) с последующим применением одной из формул численного интегрирования и решением конечной системы линейных алгебраических уравнений относительно значений искомой функции в узлах применяемой квадратурной формулы. По этим значениям путем соответствующего интерполирования можно определить искомую функцию $X(\lambda)$ для всех значений параметра λ .

Отметим, что быстрое убывание ядра $A(\lambda, \mu)$ начинается с тем больших значений μ , чем больше волновые размеры экрана. Поэтому уравнением (2) удобно пользоваться для определения характеристик рассеяния в длинноволновой и резонансной областях, когда размеры экрана малы или сравнимы с длиной волны. Заметим, что в длинноволновом случае решение уравнения (2) может быть получено методом последовательных приближений.

3. Второй способ решения системы парных уравнений (1) существенно использует то обстоятельство, что если второе уравнение системы определено на полубесконечном промежутке, то соответствующее этому случаю решение можно получить с помощью метода Винера–Хопфа. Учитывая представление

$$X(\lambda)K(\lambda) = X_+(\lambda)e^{i\lambda} + X_-(\lambda)e^{-i\lambda} + \tilde{f}(\lambda),$$

вытекающее из второго уравнения системы (1), где $X_{\pm}(\lambda)$ — аналитичны и убывают соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексного переменного λ , а $\tilde{f}(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $f(t)$, продолженной нулем для $|t| > 1$, и пользуясь схемой метода Винера–Хопфа, придем к системе интегральных уравнений второго рода относительно функции $X_{\pm}(\lambda)$, из которой с по-

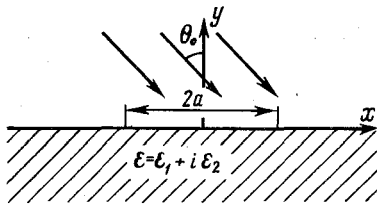


Рис. 1

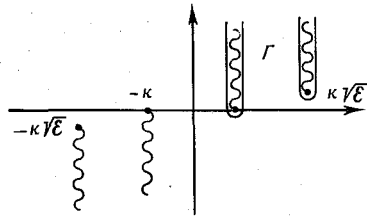


Рис. 2

мощью соотношений $\varphi_{\pm}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_{\pm}(\lambda) e^{\mp i\lambda t} d\lambda$ получим для нахождения их систему интегральных уравнений Фредгольма:

$$(3) \quad \varphi_{\pm}(t) = \int_0^{\infty} R(t, s) \varphi_{\mp}(s) ds + q_{\pm}(t), \quad 0 < t < \infty,$$

$$R(t, s) = -\frac{1}{4\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda t} d\lambda}{K_+(\lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\mu(s+2)}}{\mu - \lambda} K_+(\mu) d\mu,$$

а $q_{\pm}(t)$ определяются через $\tilde{f}(\lambda)$ и функции факторизации $K_+(\lambda)$ и $K_-(\lambda)$. Отметим, что физический смысл функций $\varphi_{\pm}(t)$ заключается в том, что они представляют собой составляющие электромагнитных полей на левом и правом геометрическом продолжении рассеивающего экрана, а система уравнений (3) описывает их взаимное влияние. Очевидно, что это влияние должно быть тем меньше, чем больше размеры экрана. Подтверждение этого содержится в уравнениях (3), поскольку норма соответствующего интегрального оператора будет стремиться к нулю, когда волновые размеры экрана увеличиваются. Таким образом, уравнения (3) оказываются удобным аппаратом для исследования характеристик рассеяния в коротковолновом случае. Разработанные и обоснованные в данной работе методы решения системы парных уравнений (1) взаимно дополняют друг друга и могут быть использованы для анализа рассеивающих свойств ленточных экранов в широком диапазоне частот.

4. Рассмотрим рассеяние волн ленточным экраном, расположенным на проводящем диэлектрическом полупространстве. При горизонтальной поляризации плоской волны, падающей под углом θ на ленту ширины $2a$, лежащую на границе диэлектрического полупространства с ϵ (рис. 1), задача сводится к решению системы парных интегральных уравнений вида (1), где

$$(4) \quad K(\lambda) = 2(\sqrt{\kappa^2 - \lambda^2} + \sqrt{\kappa^2 \epsilon - \lambda^2})^{-1}, \quad f(t) = -e^{i\kappa \sin \theta_0 t}.$$

Угловое распределение рассеянной в верхнее полупространство энергии определяется соотношением

$$(5) \quad P_+^{\Gamma}(\theta) = acE_0^2 \frac{4\beta^2 \cos^2 \theta}{\kappa |\beta + \gamma_0|^2 |\cos \theta + \sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta}|^2} |X(-\kappa \sin \theta)|^2,$$

а полная рассеянная в это полупространство энергия равна

$$(6) \quad \Pi_+^{\Gamma} = acE_0^2 \frac{4\beta^2}{\kappa |\beta + \gamma_0|^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{|X(-\kappa \sin \theta)|^2 \cos^2 \theta}{|\cos \theta + \sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta}|^2} d\theta.$$

Здесь E_0 — амплитуда падающей волны, $\beta = \cos \theta_0$; $\gamma_0 = \sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta_0}$; c — скорость света в вакууме; $\kappa = ka$.

Полная рассеянная лентой энергия может быть найдена из соотношения

$$(7) \quad \Pi^{\Gamma} = -acE_0^2 \frac{2\beta^2}{\kappa |\beta + \gamma_0|^2} \operatorname{Re}(\kappa \sin \theta_0).$$

Величина

$$(8) \quad \Pi_{\pm}^{\Gamma} = \Pi^{\Gamma} - \Pi_{\pm}^{\Gamma}$$

определяет энергию, рассеянную в диэлектрическое полупространство (которая при $\operatorname{Im} \epsilon \neq 0$ переходит в тепловые потери) и служит мерой радиояркостного контраста поверхности раздела.

5. Асимптотическое решение уравнения типа (2) при $\kappa \ll 1$ дает:

$$(9) \quad X(\lambda) = X^+(\lambda) + X^-(\lambda),$$

$$X^+(\lambda) = \{L [J_0(\lambda) + DJ_2(\lambda)] - \frac{1}{2} \kappa \alpha J_2(\lambda)\} [1 + O(\kappa^4)],$$

$$X^-(\lambda) = \left\{ \left[(D + \frac{1}{2}) J_1(\lambda) + \frac{\kappa^2 (\epsilon + 1)}{8\lambda} J_2(\lambda) \right] [1 + O(\kappa^4)] \right\}.$$

Здесь

$$L = \left(1 + \frac{\kappa^2}{4} \left[\alpha^2 - \frac{\epsilon + 1}{2} + O(\kappa^2) \right] \right) / \left(2 \ln \frac{\kappa \gamma}{4i} + \frac{\epsilon \ln \epsilon}{\epsilon - 1} - 1 \right);$$

γ — постоянная Эйлера.

$$D = \frac{\kappa^2}{8} \left[(\epsilon + 1) \ln \frac{\kappa \gamma}{4i} + \frac{\epsilon^2 \ln \epsilon}{2(\epsilon - 1)} + \frac{\epsilon + 1}{4} \right] [1 + O(\kappa^4)].$$

Отсюда, если ограничиться точностью порядка $O(\kappa^2)$, получим для полной рассеянной лентой энергии выражение

$$(10) \quad \Pi^{\Gamma} = \frac{ac}{\kappa} E_0^2 \cdot 2\pi\beta \left[1 + \frac{\delta}{\pi} \frac{|\epsilon|^2 - |\epsilon| \cos \delta - |\epsilon| \ln |\epsilon| \sin \delta / \delta}{|\epsilon|^2 - 2|\epsilon| \cos \delta + 1} \right] \times \\ \times \left(|\beta + \gamma_0|^2 \left| 2 \ln \frac{\kappa \gamma}{4i} + \frac{\epsilon \ln \epsilon}{\epsilon - 1} - 1 \right|^2 \right)^{-1},$$

где δ — угол потерь ($\delta = \arg \epsilon$). Видно, что зависимость Π^{Γ} от $\kappa = ka$ имеет тот же характер, что и в случае ленты в свободном пространстве, однако зависимость от угла падения совершенно другая: при $\epsilon \neq 1$ появляется множитель $\beta^2 (|\beta + \gamma_0|^{-2})$, приводящий к уменьшению рассеянной энергии при приближении угла падения к скользящему. Распределение рассеянной энергии в верхнем полупространстве по углам наблюдения θ при $\kappa \ll 1$ имеет вид

$$(11) \quad P_{\pm}^{\Gamma}(\theta) = \frac{4ac}{\kappa} E_0^2 \frac{\beta^2}{|\beta + \gamma_0|^2} \frac{1 + O(\kappa^2)}{\left| 2 \ln \frac{\kappa \gamma}{4i} + \frac{\epsilon \ln \epsilon}{\epsilon - 1} - 1 \right|^2} \frac{\cos^2 \theta}{|\cos \theta + \sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta_0}|^2}.$$

Неоднородность среды, окружающей ленточный экран, уже в главном члене по κ приводит к неравномерности углового распределения рассеянной энергии. С увеличением неоднородности среды энергия, рассеиваемая лентой в верхнее полупространство, убывает обратно пропорционально ($|\epsilon|^2 \ln^2 |\epsilon|$), в то время как большая ее часть, пропорциональная $(|\epsilon| \ln |\epsilon|)^{-1}$, будет рассеиваться в нижнее полупространство.

6. Когда ширина ленты велика по сравнению с длиной волны ($\kappa \gg 1$), решение системы парных уравнений представим в виде

$$(12) \quad X(\lambda) = \frac{e^{i\lambda}}{K_-(\lambda)} \int_0^{\infty} \psi_+(x) e^{i\lambda x} dx + \frac{e^{-i\lambda}}{K_+(\lambda)} \int_0^{\infty} \psi_-(x) e^{-i\lambda x} dx - \frac{\sin(\lambda - \kappa\alpha)}{\pi(\lambda - \kappa\alpha)},$$

а $\psi(x)$ удовлетворяют следующей системе интегральных уравнений:

$$(13) \quad \psi_{\pm}(x) = \int_0^{\infty} R(x, t; \kappa, \epsilon) \psi_{\mp}(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 R(x; t-1; \kappa, \epsilon) e^{\pm i\kappa\alpha t} dt,$$

где

$$R(x, t; \kappa, \epsilon) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{K_+(\mu)}{K_-(\mu)} e^{i\mu(x+t+2)} d\mu.$$

Здесь контур интегрирования представляет собой петли, охватывающие вертикальные разрезы ($\kappa, \kappa + i\infty$) и ($\kappa\sqrt{\epsilon}; \kappa\sqrt{\epsilon} + i\infty$) в верхней полуплоскости комплексного переменного μ (рис. 2).

Функции $K_{\pm}(\mu)$ определяются факторизацией $K(\mu)$:

$$(14) \quad K_+(\mu) = \sqrt{\frac{2}{\kappa(\epsilon+1)}} \exp\left(-\int_0^{\mu/\kappa} U(\nu, \epsilon) d\nu\right), \quad K_-(\mu) = K_+(\mu),$$

а функция $U(\nu, \epsilon)$ выражается через полные эллиптические интегралы 1- и 3-го родов. Решение (13) при $\kappa \gg 1$ может быть найдено методом последовательных приближений, поскольку норма соответствующего интегрального оператора пропорциональна $\kappa^{-1/2}$.

7. Вдали от углов падения, близких к скользящим ($\kappa(1 - \sin\theta_0) \gg 1$), полная рассеянная лентой энергия может быть представлена в виде

$$(15) \quad \Pi^{\Gamma} = \frac{ac}{\pi} E_0^2 \frac{\beta^2}{|\beta + \gamma_0|^2} \operatorname{Re} \left\{ (\beta + \gamma_0) \left[1 + \frac{i}{2\kappa} \left(2U(\nu, \epsilon) + \frac{\alpha}{\beta\gamma_0} \right) \right] \right\} [1 + O(\kappa^{-5/2})].$$

В случае вещественных ϵ зависимость рассеянной энергии от частоты не меняет своего характера по сравнению с лентой в свободном пространстве (поправка на неоднородность среды, связанная с частотой, имеет порядок краевых эффектов $O(\kappa^{-5/2})$) [3]. Потери в среде приводят к увеличению влияния краевых эффектов. Так, вдали от скользящих углов падения дифракционное взаимодействие между ребрами ленты в выражении (15) описывается слагаемым, пропорциональным $\delta |\epsilon|^{-1/2} \kappa^{-1}$, которое в $\kappa^{3/2}$ больше соответствующей величины для свободного пространства. При скользящих углах падения неоднородность среды можно не учитывать с погрешностью $O(\kappa^{1/2}(\epsilon - 1))$. Величина рассеянной энергии при этом пропорциональна $\cos^2\theta_0$. Когда диэлектрическая проницаемость нижнего полупространства велика, то полная рассеянная энергия имеет вид

$$(16) \quad \Pi^{\Gamma} = \frac{ac}{\pi} E_0^2 \frac{\beta^2 \cos(\delta/2)}{\sqrt{|\epsilon|}} \left[1 - \frac{\beta \cos\delta}{\sqrt{|\epsilon|} \cos(\delta/2)} - \frac{\delta}{2\pi\kappa \sqrt{|\epsilon|} \cos(\delta/2)} + O(\kappa^{-5/2}) \right].$$

Отсюда следует, что сильная неоднородность среды приводит к уменьшению рассеянной энергии в $2|\epsilon|^{-1/2} \cos(\delta/2)$ раз (в главном члене) по сравнению с лентой в свободном пространстве. В случае сильной неоднородности среды ($|\epsilon| \gg 1$) угловое распределение энергии в верхнем полупространстве, рассеянное широкой лентой ($\kappa \gg 1$):

$$(17) \quad \Pi^{\Gamma}_+(\theta) = \frac{ac}{\pi} E_0^2 \frac{\beta^2 \cos^2\theta}{\pi\kappa |\epsilon|} \frac{\sin^2\kappa [(\sin\theta + \sin\theta_0)]}{(\sin\theta + \sin\theta_0)} [1 + O(\kappa^{-3/2} + |\epsilon|^{-1/2})].$$

Интегрируя (14) по углам наблюдения ($|\theta| < \pi/2$), получаем выражение для энергии, рассеянной в верхнее полупространство,

$$(18) \quad \Pi_+^\Gamma = \frac{ac}{\pi} E_0^2 \frac{\beta^3}{|\epsilon|} [1 + O(\kappa^{-1})].$$

Отношение этой величины к полной рассеянной энергии убывает с ростом $|\epsilon|$ пропорционально $\beta|\epsilon|^{-1/2} \cos(\delta/2)$. Следовательно, большая часть рассеянной лентой энергии (порядка $|\epsilon|^{-1/2}$) рассеивается в нижнее полупространство, превращаясь при $\delta \neq 0$ в омические потери.

8. Полученные аналитические соотношения (случай горизонтальной поляризации) являются удобными как для физического анализа, так и для вычислений на ЭВМ. Они позволяют дать качественную и количественную оценку физическим явлениям, связанным с исследованием различных свойств подстилающих поверхностей, рассмотрение которых приведено, например, в [4, 5].

Поступило
30 X 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. Шестопалов В.П. Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1971. 400 с.
2. Сологуб В.Г. - ЖВМиМФ, 1971, т. 11, вып. 4, с. 837.
3. Хёна Х., Мауэ А., Вестфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
4. Шутко А.М. СВЧ-радиометрия водной поверхности и почвогрунтов. М.: Наука, 1986. 189 с.
5. Арманд Н.А., Крапивин В.Ф., Мкртчян Ф.А. Методы обработки данных радиофизического исследования окружающей среды. М.: Наука, 1987. 270 с.

УДК 517.946

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В.Г. ЯХНО

МНОГОМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОСТИ

(Представлено академиком М.М. Лаврентьевым 24 IX 1987)

Изотропная неоднородная упругая среда полностью характеризуется тремя функциями точки пространства: параметрами Ламе $\mu(x)$, $\lambda(x)$ и плотностью $\rho(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$. Определение этих характеристик среды внутри заданной области D по измерениям волнового процесса в точках ее границы S , возникшего в результате точечных воздействий на эту границу, является важнейшей прикладной задачей [1, 2]. Задача определения всех функций $\mu(x_3)$, $\lambda(x_3)$, $\rho(x_3)$ для вертикально-неоднородного изотропного полупространства по измерениям на границе волнового процесса исследовалась ранее в работах [2-8]. В [4, 5, 9, 10] изучены задачи определения многомерных аддитивных малых добавок к уже известным одномерным характеристикам среды $\mu(x_3)$, $\lambda(x_3)$, $\rho(x_3)$. Предмет исследования настоящей работы составляет задача определения неизвестных гладких функ-