А. Л. КУЗЬМИНА

О ЗАМКНУТОСТИ СИСТЕМЫ $\{x^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ В $L_2([-1, 1])$

Пусть $\{x^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — система степеней с неотрицательными целыми показателями n_k, $n_k < n_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$

Известно, что система $\{x^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута в $L_2([0, 1])$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = +\infty \tag{1}$$

(см. [1], с. 329, теорема Мюнца).

Каковы условия замкнутости системы $\{x^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_2([-1, 1])$?

Если система $\{x^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута в $L_2([-1, 1])$, то она должна содержать как четные степени $x^{n'_k}$, $n'_k < n'_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, так и нечетные степени $x^{n''_k}$, $n''_k < n''_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, так как в противном случае некоторая подсистема из многочленов Лежандра была бы замкнута в $L_2([-1, 1])$.

Установим условия замкнутости системы $\{x^{n'_k}, x^{n''_k}\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_2([-1, 1])$.

Теорема. *Система* $\{x^{n'_k}, x^{n''_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *замкнута в* $L_2([-1, 1])$ *тогда и только тогда, когда каждая из систем* $\{x^{n'_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\{x^{n''_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *замкнута в* $L_2([0, 1])$.

Доказательство. Достаточность.

Пусть условие выполнено и $f(x) \in L_2([-1, 1])$.

Очевидно,

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

где

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

четная и

$$f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

нечетная функции.

Поскольку системы $\{x^{n'_k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{x^{n''_k}\}_{k=1}^{\infty}$ замкнуты в $L_2([0, 1])$, то для каждого ε, $\varepsilon > 0$ найдется такой многочлен $P(x)$ из степеней $x^{n'_k}$, что

$$\int_0^1 [f_1(x) - P(x)]^2 dx < \frac{\varepsilon}{8},$$

и такой многочлен $Q(x)$ из степеней $x^{n''_k}$, что

$$\int_0^1 [f_2(x) - Q(x)]^2 dx < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Так как функции $[f_1(x) - P(x)]^2$ и $[f_2(x) - Q(x)]^2$ являются четными функциями, то

$$\int_{-1}^1 [f_1(x) - P(x)]^2 dx < \frac{\varepsilon}{4}$$

и

$$\int_{-1}^1 [f_2(x) - Q(x)]^2 dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{-1}^1 [f(x) - P(x) - Q(x)]^2 dx < \varepsilon,$$

т. е. система $\{x^{n'_k}, x^{n''_k}\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута в $L_2([-1, 1])$.

Необходимость. Пусть система $\{x^{n'_k}, x^{n''_k}\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута в $L_2([-1, 1])$.

Если бы система $\{x^{n'_k}\}_{k=1}^{\infty}$ (аналогично для системы $\{x^{n''_k}\}_{k=1}^{\infty}$) была незамкнутой и, значит, неполной в $L_2([0, 1])$, то нашлась бы такая функция $g(x)$, $g(x) \not\equiv 0$, $g(x) \in L_2([0, 1])$, что

$$\int_0^1 x^{n'_k} g(x)\, dx = 0, \ k = 1, 2, \ldots$$

Тогда функция $f(x) = g(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $f(-x) = f(x)$, $f(x) \not\equiv 0$, $f(x) \in L_2([-1, 1])$ такова, что

$$\int_{-1}^1 x^{n'_k} f(x)\, dx = 0$$

и

$$\int_{-1}^{1} x^{n_k''} f(x)\,dx = 0, \ k = 1, 2, \dots ,$$

что невозможно, ибо система $\{x^{n_k}, x^{n_k''}\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута в $L_2([-1, 1])$.

Теорема доказана.

Очевидно, что система $\{x^{n_k'}, x^{n_k''}\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута в $L_2([-1, 1])$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k'} = +\infty \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k''} = +\infty. \qquad (2)$$

Точно также доказывается

Теорема. *Система $\{|x|^{p_k'}, |x|^{p_k''} \operatorname{sgn} x\}_{k=1}^{\infty}$ с произвольными показателями p_k', $p_k' > -\frac{1}{2}$, и p_k'', $p_k'' > -\frac{1}{2}$ замкнута в $L_2([-1, 1])$ тогда и только тогда, когда каждая из систем $\{x^{p_k'}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{x^{p_k''}\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута в $L_2([0, 1])$.*

Условия замкнутости системы степеней $\{x^{p_k}\}_{k=1}^{\infty}$ с произвольными показателями p_k, $p_k > -\frac{1}{2}$ в $L_2([0, 1])$ известны (см. [1], с. 670).

В заключение отметим, что условие (2) является необходимым и достаточным условием замкнутости системы $\{x^{n_k'}, x^{n_k''}\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_2([a, b])$, $a < 0$, $b > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.—Л., ГИТТЛ, 1949.