Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Ю. С. Колесов, Н. Х. Розов, Циклы-утки дифференциально-разностных уравнений, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1995, номер 1, 12–17

https://www.mathnet.ru/vmumm2098

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.175
9 декабря 2025 г., 17:33:53

УДК 517.929

Ю. С. Колесов, Н. Х. Розов

ЦИКЛЫ-УТКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В [1] отмечено, что в многомерных релаксационных системах обыкновенных дифференциальных уравнений, когда количество медленных переменных не меньше двух, в общем случае циклы-утки обладают свойством сильной неустойчивости: уравнение в вариациях имеет мультипликатор, модуль которого неограниченно возрастает при уменьшении малого параметра. В настоящей работе данное свойство положено в основу понятия цикла-утки и на важном содержательном примере показано, что по крайней мере для дифференциально-разностных уравнений математической экологии сильно неустойчивые релаксационные циклы — их достаточно характерные образования.

1. Объект дальнейшего анализа — базовое уравнение динамики популяций насекомых [2]:

$$\dot{N}=r_0\left[1+\frac{a}{\varepsilon}N(t-(H_0-h_0))-\frac{1}{\varepsilon}N(t-h_0)\right]N. \tag{1}$$

Здесь $N(t)$ — плотность имаго (насекомых в окончательной стадии развития) в текущий момент времени; целое число H_0 — длина жизненного цикла, часто равная единице; h_0 — среднее время жизни в году (взятом за единицу времени) популяции имаго; параметр $a<1$ характеризует долю личинок, достигающих стадии имаго; $\varepsilon=1-a$ в дальнейшем мало; мальтузианский коэффициент линейного роста

$$r_0=\ln(pm),$$

где p — доля самок в популяции имаго, m — среднее число яиц, откладываемых одной самкой.

К настоящему времени уравнение (1) достаточно подробно проанализировано с помощью численных методов. Назовем основные свойства аттракторов его решений с положительными начальными условиями.

Во-первых, оно диссипативно. Во-вторых, хотя бы некоторые из его установившихся режимов имеют выраженный δ-образный характер. В-третьих, биологический период (время между соседними всплесками численности или некоторыми их группами) с высокой точностью кратен единице. В-четвертых, в некоторых случаях стационарные режимы носят сложный характер, причем наблюдается постепенное нарастание колебаний с последующим спадом, депрессией, т. е. моделируется известное в природе явление вспышек численности. В-пятых, отдельные стационарные режимы чувствительны даже к небольшим изменениям параметров. Наконец, в-шестых, может сосуществовать сразу большое количество качественно различных стационарных режимов.

Условимся считать, что в уравнении (1) $H_0\geqslant 2$, т. е. речь пойдет о насекомых, жизненный цикл которых равен двум годам и больше. При этом ограничении построенные в работе [3] релаксационные колебания уравнения (1) с биологической точки зрения означают, что всплески плотности имаго происходят через H_0 лет. Поставим вопрос о существовании таких релаксационных циклов этого уравнения, биологическая интерпретация которых означает, что всплески плотности

имаго происходят чаще, например каждый год. Ниже будут сформулированы ограничения, обеспечивающие существование циклов такого рода. Будет также объяснено, что все они обладают свойством сильной неустойчивости, т. е. относятся к числу циклов-уток. Впрочем, на биологическом уровне смысл последнего обстоятельства достаточно прозрачен: в энергетически перевозбужденной системе (почти все личинки достигают стадии имаго) сильно неустойчивы циклы, обладающие чрезмерной временной упорядоченностью.

Все дальнейшее изложение относится к случаю, когда

$$h_0 < 1/2. \tag{2}$$

Оказывается, что неочевидно, при этом необременительном ограничении существование интересующих нас релаксационных циклов связано с наличием экспоненциально устойчивых циклов M_0, ..., M_k у одномерного отображения

$$M \to M \exp\{r_0 - [1 - \exp(-r_0 h_0)] M\}, \tag{3}$$

отличающегося от аналогичного отображения из [3] отсутствием множителя H_0 перед r_0. Кроме того, дополнительно считаем, что $k \leqslant H_0 - 2$, т. е. при $H_0 = 2$ речь может идти только об экспоненциально устойчивом состоянии равновесия; при $H_0 = 3$ допускаются к рассмотрению также циклы периода два и т. д.

Поясним способ вывода отображения (3) и смысл последующих ограничений. Предположим, что уравнение (1) имеет интересующий нас релаксационный цикл, т. е. всплески плотности порядка единицы длятся время, близкое к h_0, а между ними плотность экспоненциально мала. Деля уравнение (1) на N и интегрируя результат по подходящим временны́м промежуткам, убеждаемся, что локальные максимумы N при $\varepsilon \to 0$ подчинены закону (3), а также выполнены последующие ограничения.

Таким образом, интересующие нас релаксационные циклы заведомо должны обладать заметной временно́й упорядоченностью. Как уже отмечалось, это объясняет факт их сильной неустойчивости. Действительно, даже небольшие отличия в начальном условии, нарушающие требуемую временну́ю упорядоченность, с течением времени не гаснут, а приводят к резкому отлету траектории от цикла.

Остается отметить прикладное значение нашей работы. Оно состоит в том, что получено объяснение колебательной потери устойчивости соответствующих циклов уравнения (1), численно наблюдаемых при промежуточных (не близких к нулю и единице) значениях параметра a.

2. Удобно от уравнения (1) перейти к унифицированному уравнению

$$\dot{N} = \lambda \left[1 + \frac{a}{\varepsilon} N(t-1) - \frac{1}{\varepsilon} N(t-h) \right] N, \tag{4}$$

где $\lambda = (H_0 - h_0) r_0$, $h = h_0/(H_0 - h_0)$, получающемуся из (1) путем нормировки времени $t/(H_0 - h_0) \to t$. После этого можно приступать к описанию конструкции — назовем ее «охотой на циклы-утки», — позволяющей установить факт их существования. Ввиду громоздкости последующих построений ограничимся простейшим случаем $H_0 = 2$. Отметим, что в соответствии с (2) тогда

$$h < 1/3. \tag{5}$$

Полагая $M = \exp \lambda(z + h)$, преобразуем отображение (3) к виду

$$z \to \frac{1+h}{2} + z - \frac{\exp \lambda (z+h) - \exp \lambda z}{\lambda}. \tag{6}$$

Считаем, что

$$\lambda (1+h) < 4. \tag{7}$$

Неравенство (7) означает, что отображение (6) имеет экспоненциально устойчивое состояние равновесия:

$$z_0 = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\lambda (1+h)}{2 (\exp \lambda h - 1)}.$$

Пусть S_1 — совокупность неотрицательных функций $N_1(t, \varepsilon)$, определенных при $-1 \leqslant t \leqslant -(1+h)/2 + \varepsilon \nu_0$; положительная постоянная ν_0 будет выбрана ниже. Предполагаем, что каждая из функций $N_1(t, \varepsilon)$ подчинена следующим четырем ограничениям.

Положим

$$\overline{M} = \exp \lambda (z_0 + h + \varepsilon^{1/3}), \quad \underline{M} = \exp \lambda (z_0 + h - \varepsilon^{1/3}),$$

$$\underline{N}_1(t, \varepsilon) = \underline{M} \exp \left\{ \lambda (t+1) + \frac{\varepsilon}{a\underline{M} + \varepsilon} \left[1 - \exp \frac{\lambda (a\overline{M} + \varepsilon)}{\varepsilon} (t+1) \right] \right\}.$$

Считаем что:

1) $\underline{N}_1(t, \varepsilon) \leqslant N_1(t, \varepsilon) \leqslant \overline{M}, \quad -1 \leqslant t \leqslant -1 + \delta_1(\varepsilon),$

где

$$\delta_1(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon z_0 \right) \exp [-\lambda (z_0 + h)];$$

2) $N_1(t, \varepsilon)$ монотонно убывает при

$$-1 + \delta_1(\varepsilon) \leqslant t \leqslant -1 + \delta(\varepsilon), \quad \delta(\varepsilon) = \delta_1(\varepsilon) + \delta_2(\varepsilon),$$

где

$$\delta_2(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon (z_0 + h) \right) \exp [-\lambda z_0 + 3 \exp (-\lambda h)];$$

3) при $-1 + \delta(\varepsilon) \leqslant t \leqslant -3/4$

$$N_1(t, \varepsilon) \leqslant \varepsilon \exp \left[-\frac{\nu (1 - \delta(\varepsilon) + t)}{\varepsilon} \right],$$

а при $-3/4 \leqslant t \leqslant -(1+h)/2 - \varepsilon \nu_0$

$$N_1(t, \varepsilon) \leqslant \varepsilon \exp \left[\frac{\nu}{\varepsilon} ((1+h)/2 + \varepsilon \nu_0 + t) \right],$$

о положительной постоянной ν скажем позднее;

4) $N_1(t, \varepsilon) \leqslant C_0 \varepsilon, \quad |t + (1+h)/2| \leqslant \varepsilon \nu_0,$

где о постоянной $C_0 > 1$ также скажем позднее.

Через S_2 обозначим совокупность таких непрерывных и неотрицательных функций $N_2(t, \varepsilon)$, определенных при $-h \leqslant t \leqslant 0$, что

$$N_2(t, \varepsilon) \leqslant \varepsilon \exp \frac{\nu t}{\varepsilon}, \quad N_2(0, \varepsilon) = \varepsilon.$$

Ниже $T_{\text{вх}}$ — положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$|T_{\text{вх}} - (1+h)/2| \leqslant \varepsilon \nu_0.$$

Набор всех таких чисел обозначим через T_0.

В дальнейшем $N(t, \varepsilon)$ — решение уравнения (4) при $t \geqslant 0$. Пусть

$$N(t, \varepsilon) = \begin{cases} N_1(t, \varepsilon), & -1 \leqslant t \leqslant -T_{\text{вх}}; \\ N_2(t, \varepsilon), & -h \leqslant t \leqslant 0. \end{cases} \tag{8}$$

Формула (8) позволяет шагами построить $N(t, \varepsilon)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1 - T_{\text{вх}}$. Чтобы определить решение при больших t, необходимо знание начального условия при $-T_{\text{вх}} < t < -h$. При указанных t положим его равным $N(T_{\text{вх}} + t, \varepsilon)$. Это дает возможность продолжить решение до такого момента времени $T_{\text{вых}}$, асимптотически близкого к $(1+h)/2$, когда в первый раз $N(T_{\text{вых}}, \varepsilon) = \varepsilon$.

В связи со сказанным поясним одно простое обстоятельство. Лакуна в начальном условии (8) при помощи функции $N(T_{\text{вх}} + t, \varepsilon)$ заполняется при

$$-T_{\text{вх}} < t < \min(-h, 1 - 2T_{\text{вх}}).$$

Если она осталась незаполненной, то при помощи той же формулы продолжаем ее заполнение, используя построенное решение при соответствующих $t > 1 - T_{\text{вх}}$.

Итак, при $t \geqslant 0$ начинается всплеск $N(t, \varepsilon)$, длящийся близкое к h время. Затем значения $N(t, \varepsilon)$ падают до экспоненциально малых. После этого происходит постепенное возрастание функции $N(t, \varepsilon)$, что выше позволило ввести величину $T_{\text{вых}}$. Существенно, что при этом «пробел» в начальном условии заполняется путем подходящего временнóго сдвига решения. Отметим еще, что в итоге начальное условие оказывается, вообще говоря, разрывным в моменты времени $-T_{\text{вх}}$ и $-h$.

Описав конструкцию построения решений уравнения (4), приходим к заключению, что проблема существования у него требуемого релаксационного цикла сводится к разрешимости следующих трех равенств.

Первое из них имеет вид

$$T_{\text{вх}} = T_{\text{вых}}(N_1, N_2, T_{\text{вх}}, \varepsilon). \tag{9}$$

Второе имеет вид

$$N_1(t, \varepsilon) = \Pi_1(N_1, N_2, T_{\text{вх}}, \varepsilon), \tag{10}$$

где по определению

$$\Pi_1 = N(T_{\text{вых}} + t, \varepsilon), \quad -1 \leqslant t \leqslant -(1+h)/2 + \varepsilon\nu_0.$$

Наконец, третье — это формула

$$N_2(t, \varepsilon) = \Pi_2(N_1, N_2, T_{\text{вх}}, \varepsilon), \tag{11}$$

где по определению

$$\Pi_2 = N(T_{\text{вых}} + t, \varepsilon), \quad -h \leqslant t \leqslant 0.$$

Правые части равенств (9)—(11) порождают оператор квазипоследования Π, который будем рассматривать в произведении пространств

$$\mathbf{R} \times L\left(-1, -\frac{1+h}{2} + \varepsilon\nu_0\right) \times C(-h, 0). \tag{12}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены неравенства* (5) *и* (7). *Тогда найдется такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *и подходящем выборе постоянных* ν_0, ν, C_0, *фигурирующих в определении множеств* T_0, S_1, S_2, *оператор квазипоследования* Π *преобразует замкнутое выпуклое множество* $T_0 \times S_1 \times S_2$ *из пространства* (12) *в себя.*

Доказательство, аналитически достаточно громоздкое, не относится к числу простых. К счастью, в работе [3] подробно изложено обоснование аналогичной теоремы в случае, когда речь идет о релаксационном цикле уравнения (4) полного периода, т. е. близкого к $1+h$. А в нашем случае нужна лишь небольшая модификация соответствующих рассуждений из [3]. В частности, из [3] следует, что для справедливости заключения теоремы постоянные ν_0 и C_0 нужно взять побольше, а ν — поменьше.

Конечно, оператор П компактным не является. Но в силу изложенного в [4] он уплотняющий. Поэтому в условиях теоремы 1 уравнение (4) имеет релаксационный цикл половинного периода, т. е. близкого к $(1+h)/2$.

В связи с теоремой 1 уместно отметить работу [5], в которой развита техника построения релаксационных циклов с короткими периодами одного класса систем с запаздыванием. В случае уравнения (4) она не проходит. Грубо говоря, это связано с тем, что периоды его циклов с высокой точностью заданы заранее.

3. Перейдем к рассмотрению уравнения в вариациях

$$\dot{v}=\frac{\lambda}{\varepsilon}[av(t-1)-v(t-h)]N(t,\ \varepsilon)+\frac{\dot{N}(t,\varepsilon)}{N(t,\ \varepsilon)}v, \tag{13}$$

где $N(t,\varepsilon)$ — одно из периодических решений уравнения (4), существование которых следует из теоремы 1. Как и в [3], в качестве его фазового пространства удобно взять

$$E=\mathbf{R}\times L(-1,\ 0),$$

т. е. при $-1\leqslant t\leqslant 0$ начальная функция $v(t)$, дополненная значением решения в нулевой момент времени, принадлежит $L(-1,0)$. Через V обозначим действующий из E в E оператор монодромии уравнения (13).

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *спектральный радиус оператора V по порядку равен* $1/\varepsilon$.

В основе доказательства лежат неравенства

$$\|V^n v_n\|\geqslant\left(\frac{\delta_0}{\varepsilon}\right)^n,\quad n=1,\ 2,\ \ldots, \tag{14}$$

где v_n — нормированная в E единицей подходящая последовательность, а постоянная $\delta_0>0$ от ε не зависит. Обоснование неравенства (14) получаем путем последовательного интегрирования уравнения (13) методом шагов.

4. В заключение кратко остановимся на истории вопроса и нерешенных задачах.

Задача о релаксационных циклах уравнения (4) была поставлена, как уже отмечалось в [3], первым автором около десяти лет назад. Однако существенное продвижение в ее решении осуществлено лишь недавно в статье [3], где доказано существование релаксационных колебаний полного периода уравнения (4) при условии $h<1$ (ср. с (5)). При этом исследовать на устойчивость удалось только самый простой релаксационный цикл полного периода — при дополнительном предположении о подходящей малости h. Вызвано это главным образом тем, что счетное число мультипликаторов уравнения в вариациях имеет ненулевые пределы $\varepsilon\to 0$. В связи с последним замечанием отметим заметку [6], где утверждалось, что без дополнительных ограничений все мультипликаторы, кроме двух, стремятся к нулю при $\varepsilon\to 0$.

Настоящим сообщением в определенной степени закрывается вопрос о релаксационных циклах уравнения (4) конечной амплитуды. Но остается открытым вопрос о существовании и устойчивости таких релаксационных циклов уравнения (4), у которых некоторые пики неограниченно возрастают, а некоторые неограниченно убывают при $\varepsilon \to 0$. Мы надеемся, что данное сообщение стимулирует содержательный анализ циклов-уток релаксационных систем с запаздыванием, имеющих различные приложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колесов А. Ю. О неустойчивости циклов-уток, возникающих при прохождении состояния равновесия многомерной релаксационной системы через многообразие срыва//Успехи матем. наук. 1989. **44**, № 5. 165—166.
2. Колесов Ю. С. Моделирование популяций насекомых//Биофизика. 1983. **28**, № 3. 513—514.
3. Колесов А. Ю., Колесов Ю. С. Релаксационные циклы дифференциально-разностных уравнений//Изв. РАН. Сер. Матем. 1992. **56**, № 4. 790—812.
4. Садовский Б. Н. Предельно компактные и уплотняющие операторы//Успехи матем. наук. 1972. **27**, № 1. 81—146.
5. Колесов А. Ю., Колесов Ю. С. Релаксационные циклы в системах с запаздыванием//Матем. сб. 1992. **183**, № 8. 141—159.
6. Кащенко С. А. Стационарные режимы уравнения, описывающего колебания численности насекомых//Докл. АН СССР. 1983. **273**, № 2. 328—330.

Поступила в редакцию
13.04.93

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1995. № 1

УДК 517.9

Т. В. Дудникова

ЭРГОДИЧНОСТЬ ФАЗОВОГО ПОТОКА ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕШИВАНИЕМ

Введение. Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = \Delta u(t, x), \ x \in \mathbf{R}^n, \ t > 0; & (1) \\ u(0, x) = u^0(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u^1(x), \ x \in \mathbf{R}^n. & (2) \end{cases}$$

Предположим, что $n \geqslant 3$ нечетно.

Будем считать, что начальные данные $u = \{u^0, u^1\}$ в (2) вещественны и принадлежат пространству $\mathscr{H} = H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n) \oplus L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ с полунормами: для любого $R > 0$

$$|||u|||_{(R)} = \Big(\int\limits_{|x| \leqslant R} (|u^0(x)|^2 + |\nabla u^0(x)|^2 + |u^1(x)|^2)\, dx \Big)^{1/2} < \infty.$$

Как известно (см. [1, с. 362]), существует сильно непрерывная группа S_t, $t \in \mathbf{R}$, линейных операторов на $\mathscr{H}$, сопоставляющих начальным условиям $u = \{u^0, u^1\}$ решение задачи Коши и его производную по t в момент времени t:

$$S_t u = \Big\{ u(t, \cdot), \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) \Big\}, \ \forall t \in \mathbf{R}. \qquad (3)$$