

УДК 629.78+519.62

**МЕТОД УСКОРЕННОГО РАСЧЕТА  
ДВИЖЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА  
С ТРОСОВЫМ АЭРОДИНАМИЧЕСКИМ СТАБИЛИЗАТОРОМ**

© 2013 г. Ю.М. Заболотнов, Д.В. Еленев

Самарский государственный аэрокосмический университет им. акад. С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)  
443086 Самара, Московское шоссе, 34, e-mail: yumz@yandex.ru, elenev@ssau.ru

Рассматривается метод ускоренного расчета движения в атмосфере космического аппарата с прикрепленным к нему на тросе аэродинамическим стабилизатором, основанный на принципе искусственного увеличения периодов колебаний. Метод позволяет снизить трудоемкость вычислений в несколько десятков раз и одновременно уменьшить влияние вычислительной погрешности на точность численного интегрирования. Предложен алгоритм априорного выбора коэффициента увеличения периодов колебаний для рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: искусственное увеличение периодов колебаний, ускоренный расчет, космический аппарат, тросовая система, аэродинамический стабилизатор.

**METHOD OF THE ACCELERATED CALCULATION OF SPACECRAFT MOTION  
IN THE ATMOSPHERE WITH ATTACHED TETHER AERODYNAMIC STABILIZER**

*Yu.M. Zabolotnov, D.V. Elenev*

Samara State Aerospace University

The method of the accelerated calculation of spacecraft motion in the atmosphere with attached tether aerodynamic stabilizer is considered. Method is based on artificial increase of the oscillation periods. The method allows reducing complexity of calculations in tens of times and allows reducing influence of a computing error on accuracy of numerical integration. The algorithm for aprioristic choice of the magnification factor of oscillation periods is offered.

Key words: artificial increase of the oscillation periods, accelerated calculation, spacecraft, tether system, aerodynamic stabilizer.

**1. Постановка задачи**

Численные исследования движения тросовой системы (ТС) в атмосфере показали [1], что расчет движения некоторых конфигураций ТС с характерными массово-инерционными характеристиками тел, входящих в систему, приводит к существенным затратам машинного времени. Кроме того, из-за влияния вычислительной погрешности численные высокочастотные решения начинают вести себя нерегулярно при изменении параметров методов интегрирования. В частности, это относится к конфигурации ТС типа

«конус – конус», когда массы тел, входящих в систему, невелики (спуск легкой капсулы с тросовым аэродинамическим стабилизатором). В связи с этим для численного моделирования движения в атмосфере ТС предлагается использовать метод искусственного увеличения периодов колебаний. Метод был предложен в [2] и развит для многомерных систем дифференциальных уравнений в [3,4]. Сущность метода заключается в построении преобразованной системы, быстрые переменные которой изменяются с меньшей частотой, что позволяет существенно ускорить процесс численного расчета. Вид преобразованной системы выбирается исходя из инвариантности уравнений первого приближения метода усреднения для обеих систем, что ведет, например, к совпадению амплитуд колебаний быстрых переменных. Метод особенно эффективен для систем, характеризующихся высокими исходными частотами, и может быть использован в сочетании с любым численным методом интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменным шагом.

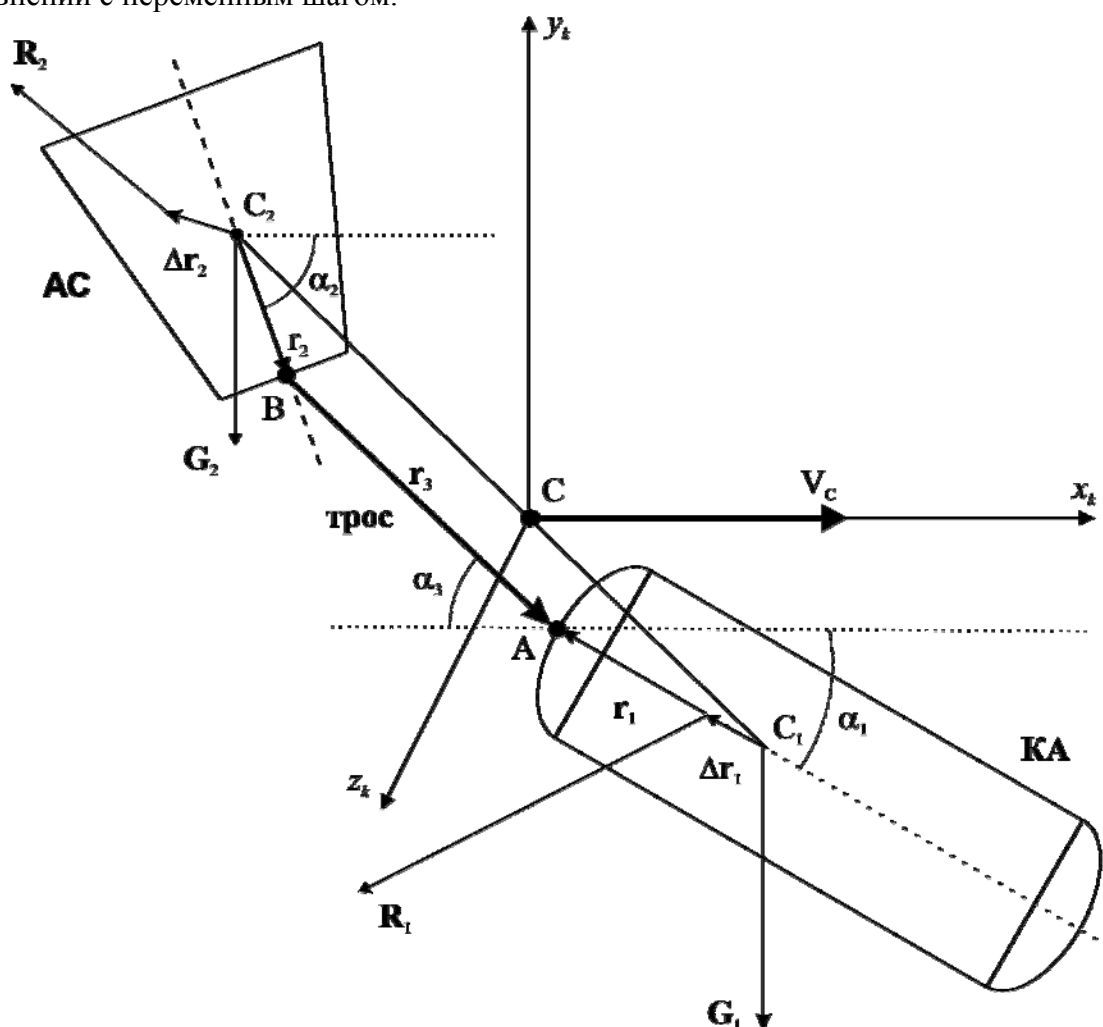


Рис.1. Схема тросовой системы.

Принципиальная схема рассматриваемой ТС показана на рис.1, где  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C$  – центры масс космического аппарата (КА), аэродинамического стабилизатора (АС) и механической системы;  $G_1$ ,  $G_2$  и  $R_1$ ,  $R_2$  – равнодействующие гравитационных и аэроди-

намических сил;  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  – пространственные углы атаки тел и троса по отношению к вектору скорости центра масс системы  $\mathbf{V}_C$ ;  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{r}_3$  и  $\Delta\mathbf{r}_1$ ,  $\Delta\mathbf{r}_2$  – векторы, определяющие взаимное положение центров масс тел, точек крепления троса и центров давления аэродинамических сил. Здесь и далее индекс «1» относится к КА, «2» – к АС и «3» – к тросу.

## 2. Математическая модель движения и оценка собственных частот системы

Уравнения пространственного движения рассматриваемой ТС получены в [1] на основании применения теоремы об изменении кинетического момента для каждого из тел, теоремы о движении центра масс системы и уравнений связей. При выводе уравнений движения пренебрегается гравитационными моментами, действующими на тела, и предполагается, что модуль гравитационного ускорения в пределах размеров системы не изменяется. Уравнения движения системы в атмосфере записываются в виде

$$A \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = B, \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_{x1}, \omega_{y1}, \omega_{z1}, \omega_{x2}, \omega_{y2}, \omega_{z2}, \omega_{x3}, \omega_{y3}, \omega_{z3})$  – вектор угловых скоростей системы,  $A$  и  $B$  – матрица и вектор, определяющие динамические уравнения вращательного движения системы тел [5].

Динамические уравнения (1) дополняются кинематическими уравнениями для КА, АС и троса и уравнениями движения центра масс, которые записываются в традиционной форме [5].

Для оценки значений собственных частот ТС, состоящей из симметричных тел вращения, рассмотрим малые колебания механической системы относительно положения равновесия  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . Полагая  $\sin \alpha_i \approx \alpha_i$ ,  $\cos \alpha_i \approx 1$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и пренебрегая нелинейными слагаемыми, получим

$$A\ddot{\alpha} + C\alpha = 0, \quad (2)$$

где  $\alpha = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)^T$ ,  $A$  и  $C$  – матрицы коэффициентов размерностью  $3 \times 3$ ,

$$A = \begin{pmatrix} I_1 + m_{12}r_1^2 & m_{12}r_1r_2 & m_{12}r_1r_3 \\ m_{12}r_1r_2 & I_2 + m_{12}r_2^2 & m_{12}r_2r_3 \\ m_{12}r_1 & m_{12}r_2 & m_{12}r_3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -\Delta R_x r_1 - m_2 r_1 R_{yk1}^\alpha / (m_1 + m_2) & m_1 r_1 R_{yk2}^\alpha / (m_1 + m_2) & 0 \\ -m_2 r_2 R_{yk1}^\alpha / (m_1 + m_2) & -\Delta R_x r_2 + m_1 r_2 R_{yk2}^\alpha / (m_1 + m_2) & 0 \\ -m_2 R_{yk1}^\alpha / (m_1 + m_2) & m_1 R_{yk2}^\alpha / (m_1 + m_2) & -\Delta R_x \end{pmatrix},$$

$m_1$  – масса КА,  $m_2$  – масса АС,  $m_{12} = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ ,  $r_1 = AO_1$ ,  $r_2 = BO_2$ ,  $r_3 = AB$  – длина троса,  $I_i = I_{zi}$  ( $i = 1, 2$ ) – моменты инерции тел относительно поперечных осей,  $\Delta R_x = (m_1 R_{2xk} - m_2 R_{1xk}) / (m_1 + m_2)$ ,  $R_{1xk}$ ,  $R_{2xk}$ ,  $R_{1yk}$ ,  $R_{2yk}$  – проекции аэродинамических сил  $R_1$  и  $R_2$  на оси траекторной системы координат,  $R_{yk1}^\alpha = (C_{x1} + C_{y1})qS_1$  и  $R_{yk2}^\alpha = (C_{x2} + C_{y2})qS_2$  – частные производные аэродинамических сил по углу атаки,  $S_1$  и  $S_2$  – характерные площади КА и АС,  $C_{xi}$  и  $C_{yi}$  ( $i = 1, 2$ ) – коэффициенты аэродинамических сил в связанных системах координат,  $q$  – скоростной напор. Характеристическое уравнение динамической системы (2) записывается как

$$\det(A\lambda^2 + C) = 0.$$

Раскрывая определитель и приводя подобные слагаемые, получим кубическое относительно  $\lambda^2$  уравнение

$$p_\lambda \lambda^6 + q_\lambda \lambda^4 + r_\lambda \lambda^2 + t_\lambda = 0, \quad (3)$$

где  $p_\lambda = m_{12} I_1 I_2 r_2^2$ ,  $q_\lambda = -[m_{12} I_1 r_2 (r_2 + r_3) + m_{12} I_2 r_1 (r_1 + r_3) + I_1 I_2] \Delta R_x$ ,  
 $r_\lambda = I_1 \Delta R_x r_2 (\Delta R_x - m_1 R_{yk2}^\alpha / (m_1 + m_2)) + I_2 \Delta R_x r_1 (\Delta R_x + m_2 R_{yk1}^\alpha / (m_1 + m_2)) + m_{12} \Delta R_x^2 r_1 (r_1 r_2 + r_2^2 + r_2 r_3)$ ,  
 $t_\lambda = -r_1 r_2 (\Delta R_x)^2 \cdot (\Delta R_x - \Delta R_y^\alpha)$ ,  $\Delta R_y^\alpha = (m_1 R_{2yk}^\alpha - m_2 R_{1yk}^\alpha) / (m_1 + m_2)$ , при малых углах атаки параметр  $\Delta R_y^\alpha - \Delta R_x = q (m_1 S_2 C_{y2} - m_2 S_1 C_{y1}) / (m_1 + m_2)$ .

Рассматриваемая механическая система статически устойчива, если все корни характеристического уравнения мнимые, а это выполняется тогда и только тогда, когда кубическое относительно  $\lambda^2$  уравнение (3) имеет три вещественных отрицательных корня. Если система статически устойчива, то характеристическое уравнение позволяет определить частоты малых колебаний рассматриваемой механической системы в плоском случае.

### 3. Теоретические основы метода увеличения периодов колебаний

Для иллюстрации метода искусственного увеличения периодов колебаний и для получения преобразованной системы рассмотрим систему общего вида, описывающую многомерные вращательно-колебательные движения

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X_1(x, y) + \varepsilon^2 \dots, \quad \frac{dy}{dt} = Y_0(x, y) + \varepsilon Y_1(x, y) + \dots, \quad (4)$$

где  $\varepsilon$  – малый параметр,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – вектор медленных переменных системы,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  – вектор быстрых переменных системы,  $X_i(x, y)$  –  $n$ -мерные вектор-функции ( $i = 1, 2, \dots$ ),  $Y_i(x, y)$  –  $m$ -мерные вектор-функции ( $i = 0, 1, \dots$ ). Функции  $X_i$  и  $Y_i$  удовлетворяют условиям теоремы о первом приближении метода усреднения.

Рассмотрим также невозмущенную систему, положив  $\varepsilon = 0$ , тогда

$$\frac{dy^{(0)}}{dt} = Y_0(x^{(0)}, y^{(0)}), \quad x^{(0)} = \text{const}, \quad (5)$$

где  $x^{(0)}, y^{(0)}$  – решения невозмущенной системы.

Пусть исходная система характеризуется несколькими частотами, и решения невозмущенной системы представляются в виде

$$y^{(0)} = y^{(0)}(C, x^{(0)}, \phi^{(0)}), \quad (6)$$

где  $\phi^{(0)} = \omega(x^{(0)}, C)(t - t_0) + \alpha$  – вектор фаз,  $\omega(x^{(0)}, C) = (\omega_1, \dots, \omega_r)$  – вектор-функция частот системы,  $C, \alpha$  – векторные произвольные постоянные.

В соответствии с видом невозмущенного решения (6) произведем замену переменных  $(x, y) \rightarrow (z, \phi)$ , где  $z = (x, C)$ , для исходной системы (4) и предположим, что дифференциальные уравнения для новых переменных  $(z, \phi)$  можно записать в виде стандартной системы с быстрыми фазами

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon Z_1(z, \phi) + \varepsilon^2 \dots, \quad \frac{d\phi}{dt} = \omega(z) + \varepsilon \Phi_1(z, \phi) + \varepsilon^2 \dots, \quad (7)$$

где функции  $Z_1(z, \phi)$ ,  $\Phi_1(z, \phi)$  периодичны с периодом  $2\pi$  по каждой из фаз  $\phi_1, \dots, \phi_r$ .

При получении системы (7) обычно используется стандартный метод вариации произвольных постоянных  $C, \alpha$ , как это принято в методе усреднения. Невозмущенная система в новых переменных будет иметь вид

$$\frac{d\phi^{(0)}}{dt} = \omega(z^{(0)}), \quad z^{(0)} = \text{const}. \quad (8)$$

Искусственно уменьшим частоты системы (7), то есть запишем преобразованную систему в виде

$$\frac{dz_*}{dt} = \varepsilon Z_1(z_*, \phi_*) + \varepsilon^2 \dots, \quad \frac{d\phi_*}{dt} = K(z_*)\omega(z_*) + \varepsilon \Phi_1(z_*, \phi_*) + \varepsilon^2 \dots, \quad (9)$$

где  $0 < K(z_*) < 1$  – некоторый коэффициент увеличения периодов. В дальнейшем знаком \* обозначаются переменные преобразованной системы. В преобразованной системе функции  $Z_1(z_*, \phi_*)$ ,  $\Phi_1(z_*, \phi_*)$  также периодичны по фазам  $\phi_{*1}, \dots, \phi_{*r}$  с периодом  $2\pi$ , так как они отличаются от исходных функций  $Z_1(z, \phi)$ ,  $\Phi_1(z, \phi)$  только обозначением переменных.

Формальное применение метода усреднения для систем (7) и (9) приводит в первом приближении к тождественности усредненных уравнений для медленных переменных  $z$  и  $z_*$  в резонансном случае, так как

$$\langle Z_1(z, \phi) \rangle_{\phi} = \langle Z_1(z_*, \phi_*) \rangle_{\phi_*}. \quad (10)$$

Резонансный случай в данной работе не рассматривается, так как он требует отдельного анализа [4].

Учитывая вид преобразованной системы (9), сделаем обратный переход к системе общего вида (4). Для этого запишем общее решение преобразованной невозмущенной системы в виде

$$y^{(0)} = y^{(0)}(C, x^{(0)}, \phi_*^{(0)}), \quad (11)$$

где  $\phi_*^{(0)} = K(x^{(0)}) \omega(x^{(0)}, C)(t - t_0) + \alpha$ . Дифференцируя решение (11) по времени  $t$  при постоянных величинах  $x^{(0)}, C, \alpha$ , придем к следующей невозмущенной системе:

$$\frac{dy_*^{(0)}}{dt} = K(x^{(0)}) Y_0(x^{(0)}, y_*^{(0)}), \quad x^{(0)} = \text{const}.$$

Соответствующая ей система общего вида примет форму

$$\frac{dx_*}{dt} = \varepsilon X_1(x_*, y_*) + \varepsilon^2 \dots, \quad \frac{dy_*}{dt} = K(x_*) Y_0(x_*, y_*) + \varepsilon Y_1(x_*, y_*) + \varepsilon^2 \dots \quad (12)$$

Полученная система дифференциальных уравнений (12) может быть использована для определения усредненных характеристик (усредненных значений медленных переменных  $x$  и амплитуд колебаний  $A$  быстрых переменных) исходной системы (4), так как она найдена из условия равенства уравнений первого приближения метода усреднения обеих систем. Однако интегрирование системы (12) производится значительно быстрее в связи с тем, что её быстрые переменные  $y_*$  колеблются с меньшей частотой.

При обосновании метода делается ряд предположений о существовании соответствующих замен переменных и о возможности приведения исходной системы к системе с быстрыми фазами, однако сами эти преобразования не делаются. Поэтому окончательный вывод о применимости данного метода все же должен быть сделан при проведении численных экспериментов на исходной модели (4). С другой стороны, в этом заключается преимущество метода по сравнению с явной схемой метода усреднения, так как метод применяется непосредственно для исходной системы и не требует никаких трудоемких преобразований. Открытым также остается вопрос о допустимой величине коэффициента увеличения периодов, которая должна выбираться при рассмотрении конкретной системы дифференциальных уравнений.

#### 4. Преобразованная система уравнений движения тросовой системы

Вид преобразованной системы уравнений движения ТС должен соответствовать виду общей преобразованной системы (12). Поэтому необходимо: 1) разделить все интегрируемые переменные на медленные и быстрые; 2) в правых частях дифференциальных уравнений выделить функции, характеризующие действие возмущений  $X_1(x_*, y_*)$ ,

$Y_1(x_*, y_*)$ . Разделение переменных и выделение возмущающих функций проведем исходя из опыта использования метода увеличения периодов колебаний для расчета движения в атмосфере одного почти симметричного тела [3]. В этом случае векторы медленных и быстрых переменных будут иметь следующий вид:

$$x = [u, \omega_{x1}, \omega_{x2}, \omega_{x3}]^T, \quad y = [\omega_{y1}, \omega_{z1}, \omega_{y2}, \omega_{z2}, \omega_{y3}, \omega_{z3}, \alpha, \phi, \gamma]^T,$$

где  $u$  – вектор параметров движения центра масс системы,  $\omega_{x1}, \omega_{x2}, \omega_{x3}$  – угловые скорости вращения тел относительно продольных осей, которые для случая невозмущенного движения являются их осями симметрии;  $\omega_{y1}, \omega_{z1}, \omega_{y2}, \omega_{z2}, \omega_{y3}, \omega_{z3}$  – компоненты угловых скоростей вращений двух тел и троса относительно поперечных осей связанных систем координат;  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ ,  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  – углы атаки, собственного вращения и крена для тел и троса.

В возмущающие функции  $Y_1(x_*, y_*)$  в уравнениях для быстрых переменных необходимо включить демпфирующие моменты относительно поперечных осей каждого тела и другие малые возмущения, возникающие от асимметрии (геометрической и массовой) почти симметричных тел. Кроме того, в кинематических уравнениях для углов  $\alpha, \phi, \gamma$  к малым возмущениям следует отнести слагаемые, возникающие от неинерциальности подвижных связанных систем координат. Таким образом, преобразованная система уравнений движения ТС в атмосфере примет следующий вид:

$$\dot{\omega}_* = (A^{-1}B)_* = D_*, \quad (13)$$

$$\dot{\gamma}_{i*} = K(q) (\omega_{zi*} \sin \phi_{i*} - \omega_{yi*} \cos \phi_{i*}) / \sin \alpha_{i*}, \quad (14)$$

$$\dot{\alpha}_i = K(q) (\omega_{zi*} \cos \phi_{i*} + \omega_{yi*} \sin \phi_{i*}) - q(C_{yv1}S_1 + C_{yv2}S_2) / (m_1 + m_2), \quad (15)$$

$$\dot{\phi}_{i*} = K(q) (\omega_{xi*} - \dot{\gamma}_{i*} \cos \alpha_{i*}), \quad (16)$$

$$\dot{u}_* = f(u_*, \alpha_*), \quad (17)$$

где  $D_* = [D_1, K(q)D_2, K(q)D_3, D_4, K(q)D_5, K(q)D_6, D_7, K(q)D_8, K(q)D_9]^T$ ,  $K(q)$  – коэффициент увеличения периодов колебаний системы,  $C_{yv1}, C_{yv2}$  – коэффициенты подъемных сил КА и АС,  $f(u_*, \alpha_*)$  – вектор-функция правых частей дифференциальных уравнений движения центра масс системы [5].

## 5. Алгоритм выбора коэффициента увеличения периодов колебаний

Коэффициент увеличения периодов колебаний  $K(x_*)$  в преобразованной системе задается в виде [3]

$$K(q) = K_n K_q, \quad (18)$$

где  $K_n = \text{const}$  – постоянный по траектории коэффициент, определяемый инерционно-массовыми и аэродинамическими параметрами тел;  $K_q$  – коэффициент, учитывающий изменение частот колебаний системы по траектории.

Так как все частоты колебаний тел при их движении в атмосфере пропорциональны величине  $\sqrt{q}$  [6], то коэффициент  $K_q$  определяется как

$$K_q = \sqrt{\frac{q(H_n)}{q(H)}}, \quad (19)$$

где  $q(H_n)$  – скоростной напор на высоте начала применения метода увеличения периодов,  $q(H)$  – скоростной напор на текущей высоте. Обычно высота начала применения метода при спуске в атмосфере равна  $H_n = 80 - 95$  км.

Так как частоты системы определяются не только величинами скоростного напора, но и инерционно-массовыми и аэродинамическими параметрами тел связи, то необходима методика, позволяющая заранее, априори, оценивать величину коэффициента  $K_n$  по заданным параметрам связи и троса (его длины). В данной работе предлагается использовать следующий алгоритм выбора коэффициента  $K_n$ : 1) задается ТС с известными параметрами, называемая «эталонной»; 2) для «эталонной» системы производится выбор коэффициента увеличения периодов колебаний  $K_n$ , исходя из заданной погрешности вычислений на основании численных экспериментов; 3) аналитически оцениваются собственные частоты «эталонной» системы; 4) для другой системы, для которой необходимо провести численные расчеты, также оцениваются величины собственных частот; 5) на основании сравнения частот «эталонной» и рассчитываемой систем задается новый коэффициент увеличения периодов колебаний  $K_n$ .

Приведенный алгоритм не требует проведения новых численных экспериментов на рассчитываемой ТС, необходимо лишь уметь оценивать ее собственные частоты. В рассматриваемой задаче оценку частот рассматриваемой системы можно произвести для ее плоского движения в случае малых углов атаки тел и троса.

Решая характеристическое уравнение системы, можно определить собственные частоты колебаний «эталонной» и рассчитываемой ТС. Численные эксперименты показали, что в этом случае требуемый коэффициент увеличения периодов колебаний можно оценить по формуле

$$K_n = K_n^{\ominus} \frac{\max_i \omega_i^{\ominus}}{\max_i \omega_i}, \quad (20)$$

где  $\max_i \omega_i^{\ominus}$ ,  $\max_i \omega_i$  – оценки максимальных частот «эталонной» и рассчитываемой тро-

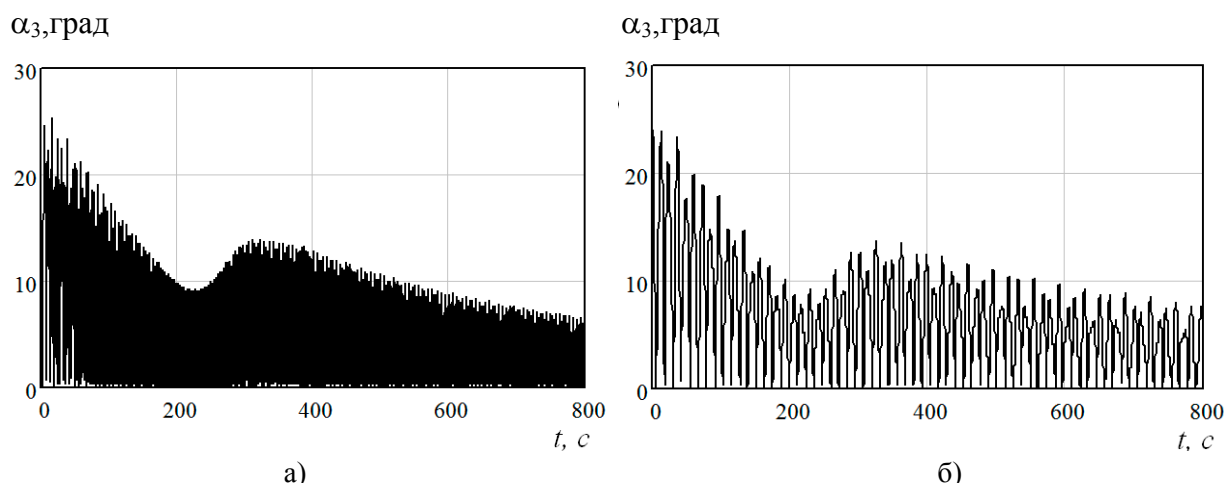
совой систем,  $K_n^{\mathcal{E}}$  – коэффициент увеличения периодов, соответствующий «эталонной» системе.

Оценка собственных частот тросовых систем может быть проведена при любом значении скоростного напора, то есть на любой высоте.

## 6. Численные результаты

Для «эталонной» ТС были выбраны следующие параметры:  $m_1 = 10$  кг,  $m_2 = 2$  кг,  $I_1 = 3.5$  кг·м<sup>2</sup>,  $I_2 = 0.3$  кг·м<sup>2</sup>,  $C_{x1} = -1$ ,  $C_{y1} = 5$ ,  $C_{x2} = -1$ ,  $C_{y2} = 2.5$ ,  $S_1 = S_2 = 0.196$  м<sup>2</sup>,  $q = 1000$  кг/м·с<sup>2</sup>,  $r_1 = r_2 = 1$  м,  $r_3 = 10$  м. Этим параметрам соответствуют собственные частоты  $\omega_1^{\mathcal{E}} = 3.2$  с<sup>-1</sup>,  $\omega_2^{\mathcal{E}} = 20.3$  с<sup>-1</sup>,  $\omega_3^{\mathcal{E}} = 7.2$  с<sup>-1</sup>. Следовательно,  $\max_i \omega_i^{\mathcal{E}} = \omega_2^{\mathcal{E}}$ . Выбранный коэффициент увеличения периодов колебаний для «эталонной» системы в этом случае составил  $K_n^{\mathcal{E}} = 0.5$ .

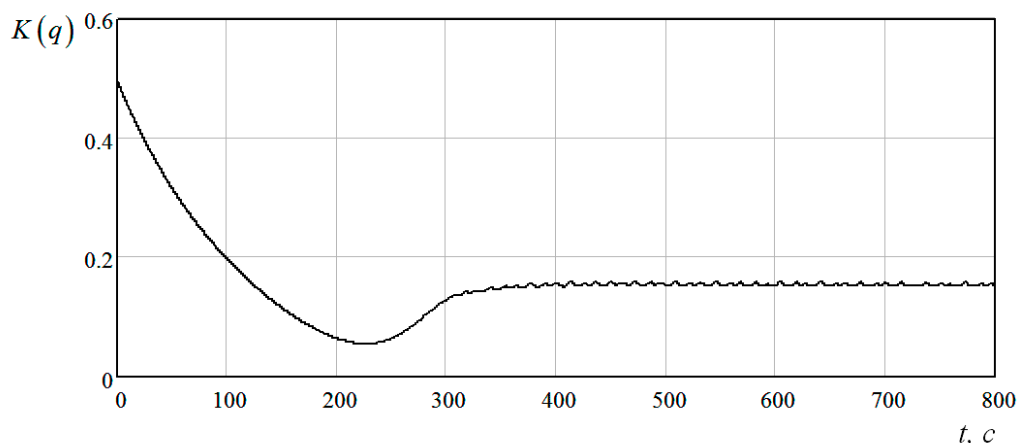
На рис.2 приводится сравнение зависимостей, характеризующих колебания по углу атаки троса  $\alpha_3(t)$  при спуске в атмосфере, определенных для «эталонной» исходной системы при  $K(q) = 1$  (расчет без применения метода увеличения периодов колебаний) и для преобразованной системы при  $K(q) = K_n^{\mathcal{E}} K_q$  (с применением метода), где  $K_n^{\mathcal{E}} = 0.5$ . В этом случае интегрирование обеих систем производилось методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности с переменным шагом. Выигрыш в трудоемкости вычислений составил приблизительно шесть раз. Выигрыш определялся через отношение количеств шагов интегрирования для обоих случаев. В общем случае выигрыш в объеме вычислений в рассматриваемой задаче зависит от собственных частот рассчитываемой системы и может достигать несколько десятков раз.



**Рис.2.** Зависимость угла атаки троса без применения (а) и с применением (б) метода увеличения периодов колебаний для «эталонной» системы.

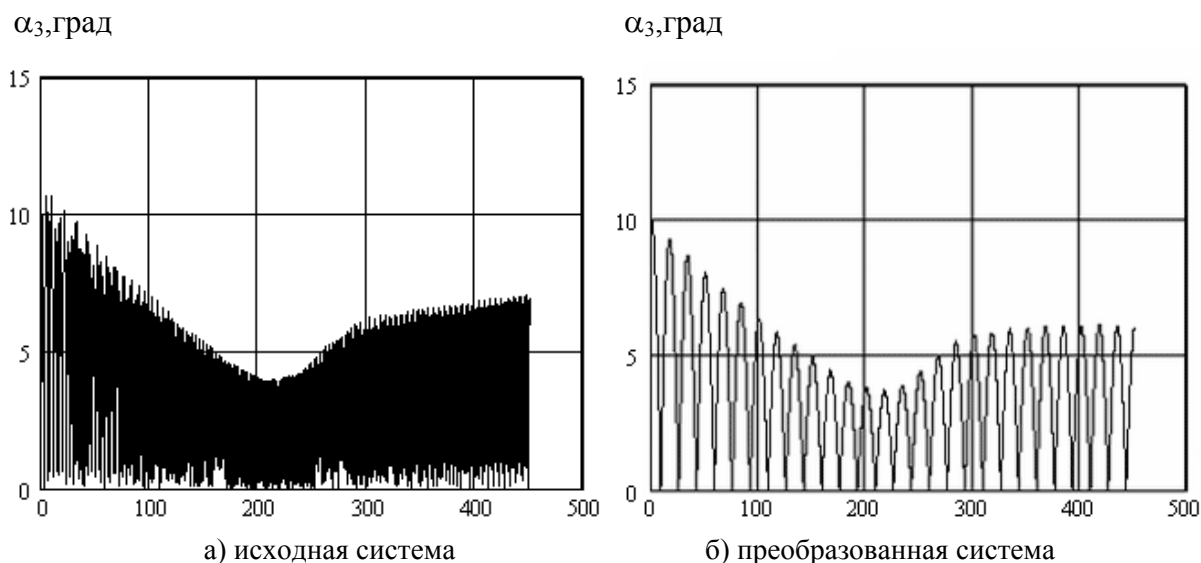
Кроме того, при больших собственных частотах рассчитываемой системы (в жестких системах) возникают трудности при численном интегрировании стандартными методами, так как жесткие системы требуют специальных методов интегрирования. Предлагаемый метод позволяет искусственно уменьшить жесткость системы и, тем самым,

остаться в рамках классических методов интегрирования. На рис.3 приводится зависимость, характеризующая изменение коэффициента увеличения периодов колебаний по траектории спуска «эталонной» ТС в атмосфере.



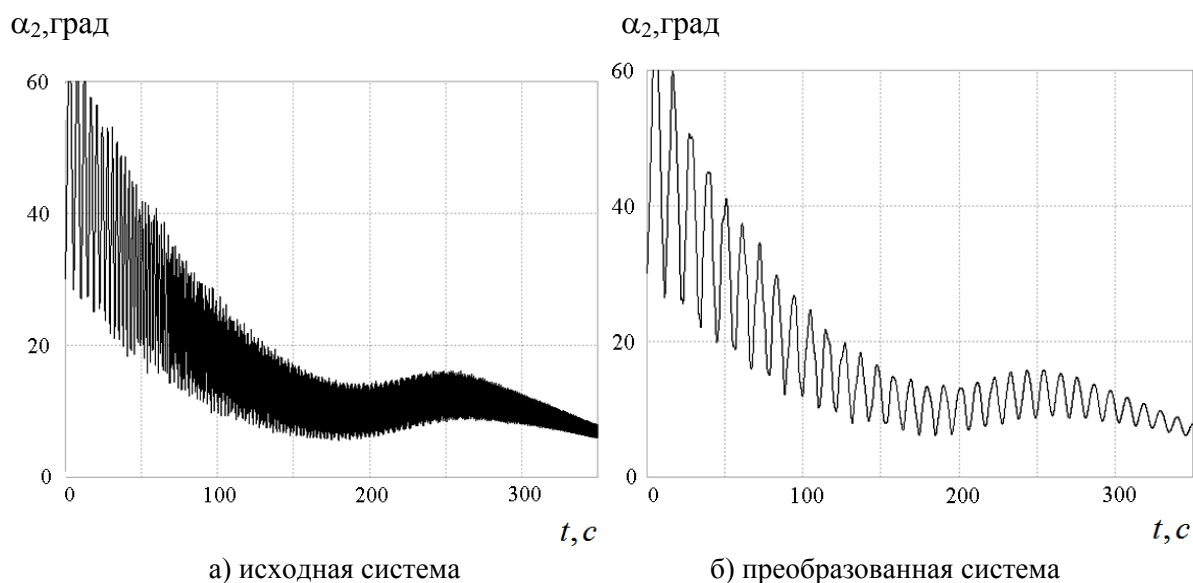
**Рис.3.** Изменение коэффициента увеличения периодов колебаний по траектории спуска.

Больших затрат машинного времени требует расчет движения ТС вида «конус – конус», предназначенной для стабилизации движения легкой спускаемой капсулы с большой площадью миделя, так как тела, выполненные в виде расширяющегося конуса, имеют большой запас статической устойчивости, что неизбежно приводит к большим собственным частотам исходной системы, причем никаким изменением параметров ТС не удастся существенно уменьшить эти частоты. На рис.4 представлены расчеты зависимостей угла атаки троса от времени  $\alpha_3(t)$ , вычисленные в соответствии с исходной и «преобразованной» ( $K_n = 0.1$ ) системами. В данном случае выигрыш в трудоемкости вычислений составил 24 раза.



**Рис.4.** Зависимость угла атаки троса от времени.

На рис. 5 приводятся зависимости для угла атаки АС  $\alpha_2(t)$  в более сложном по начальным условиям случае движения ТС в атмосфере: тела закручены вокруг продольной оси с угловой скоростью 2 рад/с и их пространственное движение близко к прямой прецессии. Как видно из графиков, наблюдается совпадение верхней и нижней огибающих зависимостей  $\alpha_2(t)$ , а сам метод искусственного увеличения периодов колебаний показывает свою работоспособность и в таких случаях.



**Рис.5.** Зависимость угла атаки АС для тел с закруткой.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Заболотнов Ю.М., Еленев Д.В.* Движение в атмосфере тросовой системы «спускаемый аппарат – аэродинамический стабилизатор» // Изв. СНЦ РАН, 2006, т.8, №3, с.833-840.
2. *Ярошевский В.А., Воейков В.В.* Метод ускорения расчета быстрых квазипериодических движений на цифровых вычислительных машинах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, т.4, №1, с.168-171.
3. *Белоконов В.М., Белоконов И.В., Заболотнов Ю.М.* Метод ускоренного моделирования квазипериодического движения в атмосфере твердого почти осесимметричного тела // Механика твердого тела, 1984, №2, с.43-50.
4. *Заболотнов Ю.М.* Метод уточнения решений усредненных систем дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1986, т.26, №5, с.686-693.
5. *Еленев Д.В., Заболотнов Ю.М.* Движение космического аппарата с тросовым аэродинамическим стабилизатором. – Самара: Издательство СНЦ РАН, 2011, 114 с.
6. *Ярошевский В.А.* Движение неуправляемого тела в атмосфере. – М.: Машиностроение, 1978, 168 с.