2. а) $\rho = \frac{3}{4}\rho_в = 750$ кг/м^3 ; б) граница будет находиться над поверхностью воды на высоте $h = \frac{5}{16}l \approx 3{,}1$ см .

3. 9:30:2,25.

4. Через резисторы текут токи $I_{12} = 25$ мА , $I_{23} = 40$ мА , $I_{34} = -45$ мА , $I_{45} = 50$ мА , $I_{56} = 20$ мА , $I_{67} = -90$ мА , $I_{78} = 25$ мА , $I_{89} = 40$ мА ; через перемычки текут токи $I_{52} = 15$ мА , $I_{58} = 15$ мА , $I_{36} = 85$ мА , $I_{69} = 195$ мА , $I_{47} = 115$ мА , $I_{14} = 210$ мА ; ток через источник равен $I_{91} = 235$ мА .

10 класс

1. $\frac{\Delta m}{\Delta t} = 4$ г/с . **2.** $v_2 = \sqrt{\frac{2gL\beta}{\sin\beta}}$ (β – в радианах).

3. $\varphi = \frac{2}{11} \approx 18\%$.

4. $C_{AB} = \frac{\varepsilon_0(5\varepsilon+3)S}{2d}$ (эквивалентная схема изображена на рисунке 20, где $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$.

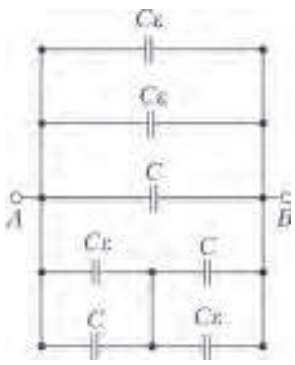

Рис. 20

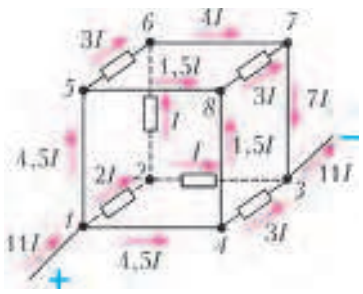

Рис. 21

5. Силы тока показаны на рисунке 21, где $I = \frac{U}{3R}$; $R_{общ} = \frac{3}{11}R$.

11 класс

1. 1) $s_{max} = \frac{v_0^2}{2\mu g}$; 2) $\omega_1 = \omega_0 - \frac{v_0}{R}$, где $v_0 < \omega_0 R$;

3) $v_к = \frac{\omega_0 R - v_0}{2}$; 4) $v_0 = \frac{\omega_0 R}{3}$.

2. 1) $x_{max} = \frac{2}{k}$; 2) $v_{max} = \sqrt{\frac{g}{2k}}$; 3) $T_{max} = \frac{3}{2}mg$;

4) см. рис.22 и 23.

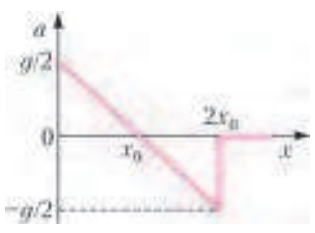

Рис. 22

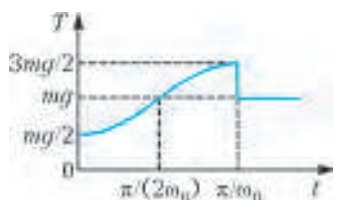

Рис. 23

3. 1) $I_{R_0} = \frac{U_0}{R_0} = \frac{2}{3}$ А , $I_{R_1} = \frac{2I_0U_0}{I_0R_1 + U_0} = \frac{4}{3}$ А ;

2) $C = \frac{2Q_0}{U_0^2} = 0{,}24$ мкФ ;

3) $Q_1 = Q_0\frac{I_0R_1(3U_0 - I_0R_1)}{U_0(U_0 + I_0R_1)} = \frac{5}{6}Q_0 = 10$ мкДж .

XX МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ТУЙМААДА». ФИЗИКА

1. Рассмотрим однородный стержень, имеющий длину L, площадь поперечного сечения S, плотность ρ и модуль Юнга E. Если такой стержень подвесить за один конец и приложить ко второму концу силу F, направленную вниз, то сила натяжения будет линейно расти вдоль стержня от значения $F_1 = F$ вблизи нижнего конца до значения $F_2 = F + \rho SLg$ около точки подвеса. Поскольку сила натяжения линейно зависит от координаты, можно найти общее удлинение Δx , подставив среднюю силу $F_{ср} = (F_1 + F_2)/2$ в закон Гука:

$$\Delta x = \frac{F_{ср}L}{ES} = \frac{FL}{ES} + \frac{\rho gL^2}{2E}.$$

1) При поочередном подвешивании стержней дополнительная сила F отсутствует, поэтому получаем

$$\Delta L_1 = \frac{\rho_1 gL_1^2}{2E_1}, \quad \Delta L_2 = \frac{\rho_2 gL_2^2}{2E_2}, \text{ и } \frac{L_1}{L_2} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{E_1}{E_2}\frac{\Delta L_1}{\Delta L_2}} = 3 .$$

2) Соединить два стержня в один составной можно двумя способами. Пусть первый стержень находится сверху, а второй – снизу. Тогда общее удлинение составного стержня складывается из увеличенного за счет веса второго стержня $F = \rho_2 SL_2 g$ удлинения ΔL_1 первого стержня и прежнего значения удлинения ΔL_2 второго стержня:

$$\Delta L = \Delta L_1 + 2\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{E_2}{E_1}\Delta L_1\Delta L_2} + \Delta L_2 = 13 \text{ мм} .$$

Пусть теперь первый стержень находится снизу, а второй – сверху. Тогда для получения ответа достаточно заменить индексы в предыдущей формуле:

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 + 2\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{E_1}{E_2}\Delta L_1\Delta L_2} = 20 \text{ мм} .$$

2. Зависимость доли η диссоциировавших молекул водорода от температуры T имеет линейный вид:

$$\eta = aT + b ,$$

где коэффициенты a и b определяются по двум точкам:

$$a = \frac{\eta_1 - \eta_2}{T_1 - T_2} = 6{,}0 \cdot 10^{-4} \text{ К}^{-1}, \quad b = \frac{\eta_2 T_1 - \eta_1 T_2}{T_1 - T_2} = -1{,}9 .$$

Суммарная внутренняя энергия U рассматриваемой части облака складывается из энергий двух идеальных газов (одноатомного и двухатомного) и энергии диссоциировавших молекул, поэтому, обозначив через ν общее количество пар атомов водорода в любом состоянии, можно записать

$$U = \frac{3}{2}\cdot 2\nu\eta RT + \frac{5}{2}\nu(1-\eta)RT + WN_A\nu\eta =$$

$$= \frac{\nu RaT^2}{2} + \nu\left(\frac{(b+5)R}{2} + WN_A a\right)T + \nu WN_A b.$$

С помощью дифференцирования находим изменение внутренней энергии при малом расширении:

$$dU = \nu R\left(aT + \frac{b+5}{2} + \frac{WN_A a}{R}\right)dT .$$

Пусть V – объем рассматриваемой части облака при некоторой температуре T, тогда с помощью закона Менделеева–Клапейрона выражаем давление p газа и находим его работу δA при малом расширении:

$$p = \frac{\nu(1+\eta)RT}{V}, \quad \delta A = pdV = \nu R\left(aT^2 + (b+1)T\right)\frac{dV}{V} .$$

Согласно первому началу термодинамики, в адиабатическом процессе справедливо равенство $U = -A$, из дифференциальной формы $dU = -\delta A$ которого после подстановки формул

для dU и δA получаем уравнение

$$\frac{T+x}{T(T+y)}dT = -\frac{dV}{V},$$

где

$$x = \frac{b+5}{2a} + \frac{WN_A}{R} = \frac{(\eta_2+5)T_1 - (\eta_1+5)T_2}{2(\eta_1-\eta_2)} + \frac{WN_A}{R} \approx 5{,}5\cdot 10^4 \text{ К},$$

$$y = \frac{b+1}{a} = \frac{(\eta_2+1)T_1 - (\eta_1+1)T_2}{\eta_1-\eta_2} = -1{,}5\cdot 10^3 \text{ К}.$$

Вычислим неопределенный интеграл от левой части нашего уравнения, затем проинтегрируем его целиком от (T_1, V_1) до (T_2, V_2). Получим

$$\frac{x}{y}\ln\left|\frac{T_2}{T_1}\right| + \frac{y-x}{y}\ln\left|\frac{T_2+y}{T_1+y}\right| = -\ln\left|\frac{V_2}{V_1}\right|,$$

или

$$\ln\frac{V_2}{V_1} = \ln\frac{T_1+y}{T_2+y} + \frac{x}{y}\ln\frac{T_1(T_2+y)}{T_2(T_1+y)},$$

откуда найдем искомый конечный объем:

$$V_2 = V_1\frac{T_1+y}{T_2+y}\left(\frac{T_1(T_2+y)}{T_2(T_1+y)}\right)^{x/y} \approx 411{,}5 \text{ км}^3.$$

3. Если сместить заряд q из положения равновесия в центре кольца на малое расстояние x в плоскости кольца, то на этот заряд будет действовать возвращающая электрическая сила $F = qE$, где E – напряженность поля, создаваемого кольцом на расстоянии x от центра. Для расчета E рассмотрим цилиндр малой высотой h и радиусом x, нижнее основание которого лежит в плоскости кольца, а центр этого основания совпадает с центром кольца (рис.24). В силу симметрии кольца

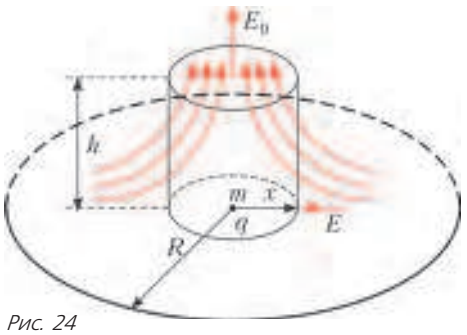

Рис. 24

поле в центре верхнего основания направлено вдоль оси цилиндра, а напряженность E_0 этого поля можно найти по принципу суперпозиции, разбив кольцо на множество точечных зарядов:

$$E_0 = \frac{\rho\cdot 2\pi R}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2+h^2\right)}\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} \approx \frac{\rho h}{2\varepsilon_0 R^2}.$$

Из условия малости h и x по сравнению с R следует, что во всех точках боковой поверхности цилиндра перпендикулярная составляющая поля примерно равна E, а во всех точках верхнего основания она примерно равна E_0. Отсюда находим потоки поля Φ_1 и Φ_2 через боковую поверхность и через верхнее основание цилиндра соответственно:

$$\Phi_1 \approx -E\cdot 2\pi x h, \quad \Phi_2 \approx E_0\cdot \pi x^2.$$

Поток поля через нижнее основание отсутствует, а внутри цилиндра зарядов нет, поэтому из теоремы Гаусса следует, что

$$\Phi_1 + \Phi_2 = 0,$$

откуда получаем

$$E = \frac{\rho x}{4\varepsilon_0 R^2}, \text{ и } F = qE = \frac{q\rho x}{4\varepsilon_0 R^2}.$$

Сила F прямо пропорциональна смещению x, поэтому можно определить эффективную жесткость $k = F/x$ и найти период колебаний по формуле для пружинного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 4\pi R\sqrt{\frac{\varepsilon_0 m}{\rho q}}.$$

4. Для выражения скорости v «массивного» фотона через длину λ соответствующей ему световой волны запишем энергию фотона двумя способами:

$$E = \frac{hc}{\lambda}, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2c^2}},$$

и найдем

$$v = c\sqrt{1-\frac{m^2c^2\lambda^2}{h^2}}.$$

Пусть v_1 и v_2 – скорости фотонов с длинами волн λ_1 и λ_2 соответственно, тогда

$$\tau = \frac{cT}{v_1} - \frac{cT}{v_2},$$

и

$$\frac{\tau}{T} = \left(1-\frac{m^2c^2\lambda_1^2}{h^2}\right)^{-1/2} - \left(1-\frac{m^2c^2\lambda_2^2}{h^2}\right)^{-1/2}.$$

Обе дроби в скобках малы, поэтому воспользуемся приведенным в условии приближением и запишем

$$\frac{\tau}{T} \approx \frac{m^2c^2}{2h^2}\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right),$$

откуда найдем искомую массу фотона по мнению Глюка:

$$m \approx \sqrt{\frac{2h^2\tau}{c^2T\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)}} \approx 1{,}6\cdot 10^{-40} \text{ кг}.$$

5. 1) Соединяем шарик S, манометр M и насос N с помощью тройника T и трубок (рис.25). Постепенно накачивая шарик, измеряем манометром избыточное давление Δp в зависимости от объема шарика V, который можно определить через параметры насоса или из геометрических соображений. На этом же этапе измеряем размеры шарика в сдутом состоянии и непосредственно перед взрывом, так как эти величины потребуются для

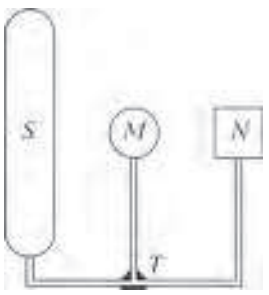

Рис. 25

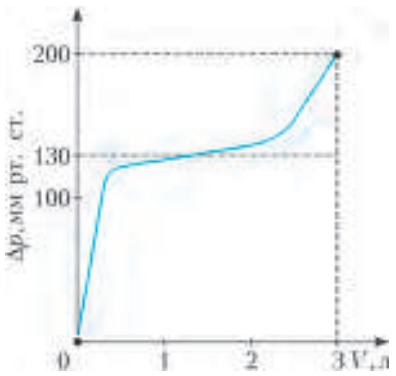

Рис. 26

расчетов параметров резины, описанных в последнем пункте. Качественный график зависимости $\Delta p(V)$, полученной после усреднения результатов измерений нескольких однотипных шариков, приведен на рисунке 26.

2) По приведенному графику находим критические параметры:

$$\Delta p_{\max} = 200 \text{ мм рт.ст.} \approx 26{,}3 \text{ кПа},$$

$$V_{\max} = 3 \text{ л} = 3\cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

3) Из графика находим среднее избыточное давление:

$$\Delta p_{\text{ср}} \approx 130 \text{ мм рт.ст.} \approx 17{,}1 \text{ кПа}.$$

Работа газа по растяжению оболочки пропорциональна площади под графиком:

$$A = \Delta p_{\text{ср}} V_{\max} \approx 51 \text{ Дж} .$$

Из закона сохранения энергии, получаем искомую энергию:

$$W_{\text{упр}} = A \approx 51 \text{ Дж} .$$

4) Далее для ясности будем называть воздух в шарике газом, а воздух вне шарика – атмосферой. Во время взрыва расширение газа происходит очень быстро, поэтому теплообменом пренебречь можно, но использовать уравнение адиабаты и считать работу газа как площадь под ее графиком $p(V)$ нельзя, так как процесс является существенно неравновесным. Пусть V_0 – объем газа в конце взрыва, когда его давление снизится от $p_{\max} = p_0 + \Delta p_{\max}$ до p_0, тогда изменение внутренней энергии газа составит

$$\Delta U = \frac{5}{2} p_0 V_0 - \frac{5}{2} p_{\max} V_{\max} ,$$

а работа против атмосферы будет равна

$$A = p_0 (V_0 - V_{\max}) .$$

Согласно первому началу термодинамики, справедливо равенство $\Delta U = -A$, из которого находим

$$V_0 = V_{\max} \left(1 + \frac{5\Delta p}{7 p_0} \right).$$

Ударная волна получает энергию за счет работы против атмосферы, поэтому искомая энергия равна

$$W_{\text{воз}} = A = p_0 (V_0 - V_{\max}) = \frac{5}{7} \Delta p_{\max} V_{\max} \approx 56 \text{ Дж} .$$

5) Общая мощность взрыва равна

$$W = W_{\text{упр}} + W_{\text{воз}} \approx 107 \text{ Дж} ,$$

или 26 мг в тротиловом эквиваленте. Искомые доли составляют

$$\eta_{\text{упр}} = \frac{W_{\text{упр}}}{W} \approx 48\% , \quad \eta_{\text{воз}} = \frac{W_{\text{воз}}}{W} \approx 52\% ,$$

т.е. оба вклада примерно одинаковы.

6) Воздушный шарик, имеющий форму сосиски, можно рассматривать как полый цилиндр. Размеры цилиндра в сдутом состоянии: высота $H_0 = 32$ см, длина окружности поперечного сечения $L_0 = 23$ мм, толщина стенок $d_0 = 0{,}25$ мм. Размеры цилиндра непосредственно перед взрывом: высота $H = 135$ см, длина окружности поперечного сечения $L = 160$ мм. При этом относительные деформации резины в поперечном и продольном направлениях составляют

$$\varepsilon_L = \frac{L}{L_0} - 1 \approx 6{,}0 \text{ и } \varepsilon_H = \frac{H}{H_0} - 1 \approx 3{,}2 .$$

При взрыве шарик рвется вдоль, а не поперек, что полностью согласуется с теоретическим расчетом деформаций ($\varepsilon_L > \varepsilon_H$). Таким образом, искомая максимальная относительная деформация равна

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_L = 600\% .$$

Пусть d – толщина оболочки шарика непосредственно перед взрывом, тогда из условия постоянства объема резины $H_0 L_0 d_0 = HLd$ находим

$$d = \frac{H_0 L_0 d_0}{HL} = 8{,}5 \text{ мкм} .$$

Радиус поперечного сечения цилиндра равен $R = L/(2\pi)$. Мысленно разрежем цилиндр осевым сечением на два равных полуцилиндра и запишем условие равновесия для одного из них непосредственно перед взрывом, когда механическое напряжение в резине достигает максимального значения σ:

$$\Delta p_{\max} \cdot 2R \cdot H = \sigma \cdot 2d \cdot H ,$$

откуда находим

$$\sigma = \Delta p_{\max} \frac{R}{d} = \frac{L \Delta p_{\max}}{2\pi d} \approx 80 \text{ МПа} .$$

Полученные результаты превосходят параметры обычной резины, имеющей, согласно справочным данным, максимальную относительную деформацию до 500% и максимальное механическое напряжение (прочность) до 25 МПа.

ЧИСЛО ЭЙЛЕРА В ТРЕУГОЛЬНИКЕ ПАСКАЛЯ

Кратко изложим доказательство равенства Х.Бразерса. Так как $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, то

$$s_n = \prod_{k=0}^{n} C_n^k = \frac{(n!)^{n+1}}{\prod_{k=0}^{n} (k!)^2} .$$

Поэтому

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{((n+1)!)^{n+2}}{((n)!)^{n+1}} \cdot \frac{\prod_{k=0}^{n} (k!)^2}{\prod_{k=0}^{n+1} (k!)^2} = \frac{(n+1)^{n+2} n!}{1} \cdot \frac{1}{((n+1)!)^2} = \frac{(n+1)^n}{n!} .$$

Откуда

$$\frac{s_{n-1} s_{n+1}}{s_n^2} = \frac{s_{n-1}}{s_n} \cdot \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{n!} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n ,$$

что в пределе и дает число e.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.В.Сумнина, В.М.Хлебникова

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: (495) 930-56-48

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь www.Pareto-print.ru