



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Рисник, А. П. Левич, П. В. Фурсова, И. А. Гончаров, Алгоритм метода по расчету границ качественных классов для количественных характеристик систем и по установлению взаимосвязей между характеристиками. Часть 2. Расчеты для трех и более качественных классов, *Компьютерные исследования и моделирование*, 2016, том 8, выпуск 1, 37–54

DOI: 10.20537/2076-7633-2016-8-1-37-54

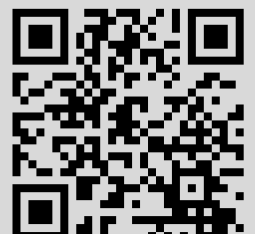
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.84

9 февраля 2025 г., 10:54:45



УДК: 51-76, 51-77, 57.042

**Алгоритм метода по расчету
границ качественных классов для количественных
характеристик систем и по установлению
взаимосвязей между характеристиками.
Часть 2. Расчеты для трех и более
качественных классов**

Д. В. Рисник^{1,a}, А. П. Левич¹, П. В. Фурсова¹, И. А. Гончаров²

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, биологический факультет,
Россия, 119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 12

² Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Россия, 119234, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 1

E-mail: ^abiant3@mail.ru

*Получено 19 мая 2015 г.,
после доработки 22 декабря 2015 г.*

Метод расчета границ качественных классов для количественных характеристик систем любой природы адаптирован к поиску границ при наличии трех качественных классов. Адаптация метода позволила в дополнение к другим результатам определить границы между качественными классами при одновременной «неприемлемости» высоких и низких значений индикаторной характеристики состояния системы и одновременной «недопустимости» высоких и низких значений факторов, влияющих на систему.

Ключевые слова: анализ связи, максимизация силы связи, индикаторы, факторы, границы качественных классов, вклад фактора

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2016, vol. 8, no. 1, pp. 37–54 (Russian).

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты №№ 13-04-01027а, 12-07-00580а, 14-04-01873а, 14-04-00143а, 15-04-02601а, 16-04-01024а).

© 2016 Дмитрий Владимирович Рисник, Александр Петрович Левич, Полина Викторовна Фурсова, Иннокентий Александрович Гончаров

The algorithm of the method for calculating quality classes' boundaries for quantitative systems' characteristics and for determination of interactions between characteristics. Part 2. Calculation for three or more quality classes

D. V. Risnik¹, A. P. Levich¹, P. V. Fursova¹, I. A. Goncharov²

¹ Lomonosov Moscow State University, Faculty of Biology, 1-12 Leninskie Gory, Moscow, GSP-1, 119991, Russia

² Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, 1-1 Leninskie Gory, Moscow, GSP-1, 119991, Russia

Abstract. — The method of calculation of the boundaries of quality classes for quantitative characteristics of systems with any properties is adapted to search for boundaries of three quality classes. In addition to other results, adaptation of the method allowed to determine boundaries between quality classes at simultaneous «unacceptability» of high and low values of indicator characteristic of the system condition and simultaneous «inadmissibility» of high and low values of factors affecting the system.

Keywords: analysis of interaction, maximization of interaction power, indicators, factors, boundaries of quality classes, factor contribution

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2016, vol. 8, no. 1, pp. 37–54 (Russian).

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты №№ 13-04-01027а, 12-07-00580а, 14-04-01873а, 14-04-00143а, 15-04-02601а, 16-04-01024а).

© 2016 Дмитрий Владимирович Рисник, Александр Петрович Левич, Полина Викторовна Фурсова, Иннокентий Александрович Гончаров

Введение

Данная работа — вторая в серии статей, посвященных описанию метода по расчету границ качественных классов для количественных характеристик систем (метода ГКК). В первой статье серии [Рисник и др., 2015] подробно описаны проблемы, возникающие при анализе натуральных данных, предложены критерии расчета и проверки границ для анализа связи между двумя классами качества, алгоритмы расчета полноты вклада факторов в степень «неприемлемости» значений индикаторной характеристики и достаточности программы наблюдений за факторами для отражения причин этой «неприемлемости». В данной статье описаны те же критерии и полноты для случая анализа трех и произвольного числа классов качества.

Предложенный в работе алгоритм позволяет получить следующие результаты:

- выявить факторы, существенно влияющие на индикатор;
- определить взаимосогласованные границы нормы индикатора (разделяющие классы качества индикатора) и границы нормы фактора (разделяющие классы качества фактора);
- упорядочить все исследуемые факторы по величине их вклада в «неприемлемые» классы качества индикаторной характеристики;
- оценить полноту программы наблюдения за исследуемым объектом и дать необходимые рекомендации по ее сокращению или расширению;
- указать предпочтения в выборе индикаторной характеристики состояния исследуемого объекта.

Отметим, что метод ГКК позволяет обнаружить, но не позволяет объяснить связи между переменными. Этап обнаружения связей тем не менее с необходимостью предшествует этапу объяснения, который представляет собой самостоятельную задачу в предметной области, к которой принадлежит исследуемая система. Этап объяснения не входит в круг задач, решаемых методом ГКК.

1. Одновременный расчет верхних и нижних границ норм индикаторов и факторов для двух классов качества

1.1. Термины и обозначения

Здесь и далее приняты следующие обозначения.

«*a*», «*b*», «*c*», «*d*» — *типы областей* (см. рис. 1); «*a*» соответствует «приемлемым» значениям индикатора при «допустимых» значениях фактора; «*b*» соответствует «приемлемым» значениям индикатора при «недопустимых» значениях фактора; «*c*» соответствует «неприемлемым» значениям индикатора при «допустимых» значениях фактора; «*d*» соответствует «неприемлемым» значениям индикатора при «недопустимых» значениях фактора, значения индексов в обозначении « $a_{m,p}^{k,l}$ » для областей аналогичны значениям индексов для количества наблюдений в области (см. далее).

$n_{m,p}^{k,l}$ — количество наблюдений в области, относящейся к классу *m* по индикатору, классу *p* по фактору, находящейся выше области «приемлемых» значений по индикатору при *k* = «в», находящейся ниже области «приемлемых» значений по индикатору при *k* = «н», находящейся выше области «допустимые» по фактору при *l* = «в», находящейся ниже области «допустимые» по фактору при *l* = «н».

$n_{m,p}^{*,l}$ — сумма чисел наблюдений в областях (согласно [Миркин, 1980]): $n_{m,p}^{*,l} = \sum_{k \in \{н,в\}} n_{m,p}^{k,l}$;

$$n_{m,p}^{k,*} = \sum_{l \in \{н,в\}} n_{m,p}^{k,l}; \quad n_{*,p}^{k,l} = \sum_{m=1}^w n_{m,p}^{k,l}; \quad n_{m,*}^{k,l} = \sum_{p=1}^w n_{m,p}^{k,l}; \quad n_{m,p}^{*,*} = \sum_{k \in \{н,в\}} \sum_{l \in \{н,в\}} n_{m,p}^{k,l} \text{ и т. д.}$$

N — общее количество совместных наблюдений индикатора и фактора.

w — количество классов качества по индикатору и фактору.

ГКК-метод — метод расчета границ качественных классов количественных характеристик.

Граница нормы — граница, разделяющая классы качества индикатора или фактора. *Верхняя граница нормы* говорит о том, что сравнительно неблагоприятны значения в классе выше этой границы. *Нижняя граница нормы* говорит о том, что сравнительно неблагоприятны значения в классе ниже этой границы. *Расчет односторонних границ нормы* — поиск только верхних или только нижних границ нормы, *расчет двусторонних границ нормы* — одновременный поиск верхних и нижних границ нормы.

PR_{\min} — *параметр минимальной представительности* (использован в критерии проверки полученных границ норм), ограничивает минимальное количество наблюдений в областях типов «*a*» и «*d*», чтобы эти области можно было считать достаточно представительными.

C — *критерий существенности*, отражает степень пустоты области типа «*b*» в сравнении с областями типов «*a*» и «*d*» с учетом вклада соотношения частот исследуемых характеристик в эту степень. Имеет нижние индексы, аналогичные типу области «*b*», которую он характеризует.

T — *критерий точности*, отражает пустоту области типа «*b*» в сравнении с областями типов «*a*» и «*d*». Имеет нижние индексы, аналогичные типу области «*b*», которую он характеризует.

T_{\min} — *параметр минимальной точности* (использован в критерии проверки полученных границ норм), ограничивает такую степень пустоты области типа «*b*» в сравнении с областями типов «*a*» и «*d*», чтобы эту область можно было считать достаточно пустой.

Рассмотрим случай поиска двух границ нормы фактора, когда к «неприемлемым» значениям индикаторной характеристики приводят как «низкие», так и «высокие» значения фактора, допустимыми же являются «средние» значения фактора. Одновременно с двумя границами нормы по фактору при необходимости могут быть найдены две границы нормы для индикатора, когда к «неприемлемым» относятся и «низкие», и «высокие» значения индикатора, этот случай проиллюстрирован на рис. 1.

1.2. Критерий расчета границ

В формулах критериев точности $\left(T = \frac{n_{1,1} + n_{2,2}}{n_{1,1} + n_{2,2} + n_{1,2}} \right)$ и существенности $\left(C = \frac{n_{1,1} + n_{2,2}}{n_{1,1} + n_{2,2} + n_{1,2}} - \frac{n_{1,*}n_{*,1} + n_{2,*}n_{*,2}}{n_{1,*}n_{*,1} + n_{2,*}n_{*,2} + n_{1,*}n_{*,2}} \right)$, для поиска одной границы нормы индикатора и одной границы нормы фактора, происходит замена количества наблюдений в областях «*b*» ($n_{1,2}$) и «*d*» ($n_{2,2}$) на суммы чисел наблюдений в однотипных областях (т. е. областях, относящихся к одному классу качества по индикатору и одному классу качества по фактору, например « $b_{1,2}^{*,H}$ » и « $b_{1,2}^{*,B}$ », а также « $d_{2,2}^{H,H}$ », « $d_{2,2}^{B,H}$ », « $d_{2,2}^{H,B}$ » и « $d_{2,2}^{B,B}$ »). Проведенные преобразования критериев расчета и проверки границ исходят из того, что классы «недопустимых» значений фактора расположены симметрично относительно класса его «допустимых» значений и классы «неприемлемых» значений индикатора расположены симметрично относительно класса его «приемлемых» значений, причем на одну область «*a*» приходятся две однотипные области «*b*», две однотипные области «*c*» и четыре однотипные области «*d*». Изменение требований к областям связано с тем, что областей каждого типа («*a*», «*b*», «*c*» и «*d*») при поиске верхней и нижней границ становится четыре (см. таблицу 1), но ввиду соседства некоторых однотипных областей эти области невозможно разделить, они сливаются в более крупную область, требования к которой возрастают пропорционально количеству неразделимых однотипных областей, из которых она состоит.

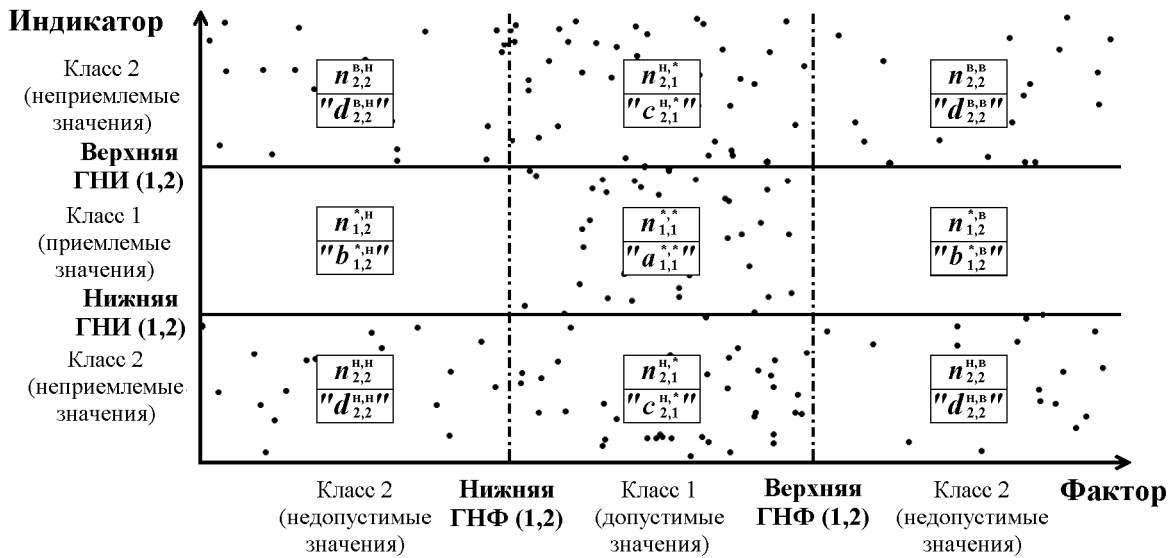


Рис. 1. Верхняя и нижняя граница нормы индикатора и фактора для двух классов качества. Обозначения: ГНИ — граница нормы индикатора, ГНФ — граница нормы фактора, в скобках указано, между какими классами качества проведены границы, «a», «b», «c», «d» — обозначения областей диаграммы; $n_{m,p}^{k,l}$ — количество наблюдений в области, относящейся к классу m по индикатору, классу p по фактору, находящейся выше области приемлемых значений по индикатору при $k = «в»$, находящейся ниже области приемлемых значений по индикатору при $k = «н»$, находящейся выше области допустимых значений по фактору при $l = «в»$, находящейся ниже области допустимых значений по фактору при $l = «н»$, $n_{m,p}^{*,l}$ — для экономии места в работе использованы обозначения сумм наблюдений в областях согласно [Миркин,

$$1980]: n_{m,p}^{*,l} = \sum_{k \in \{н,в\}} n_{m,p}^{k,l}; n_{m,p}^{k,*} = \sum_{l \in \{н,в\}} n_{m,p}^{k,l}; n_{*,p}^{k,l} = \sum_{m=1}^w n_{m,p}^{k,l}; n_{m,*}^{k,l} = \sum_{p=1}^w n_{m,p}^{k,l}$$

Из таблицы 1 видно, что неразделимы четыре области типа «a» ($\langle a_{1,1}^{*,*} = a_{1,1}^{н,н} + a_{1,1}^{в,н} + a_{1,1}^{н,в} + a_{1,1}^{в,в} \rangle$), неразделимы пары областей «b» ($\langle b_{1,2}^{*,*} = b_{1,2}^{н,н} + b_{1,2}^{н,в} \rangle$ и $\langle b_{1,2}^{*,*} = b_{1,2}^{н,в} + b_{1,2}^{в,в} \rangle$) и неразделимы пары областей «c» ($\langle c_{2,1}^{*,*} = c_{2,1}^{н,н} + c_{2,1}^{н,в} \rangle$ и $\langle c_{2,1}^{*,*} = c_{2,1}^{в,н} + c_{2,1}^{в,в} \rangle$).

Формула расчета критерия существенности приобретает вид

$$C = \frac{n_{1,1}^{*,*} + n_{2,2}^{*,*}}{n_{1,1}^{*,*} + n_{2,2}^{*,*} + n_{1,2}^{*,*}} - \frac{n_{1,*}^{*,*} n_{*,1}^{*,*} + n_{2,*}^{*,*} n_{*,2}^{*,*}}{n_{1,*}^{*,*} n_{*,1}^{*,*} + n_{2,*}^{*,*} n_{*,2}^{*,*} + n_{1,*}^{*,*} n_{*,2}^{*,*}}$$

Формула расчета критерия точности соответственно

$$T = \frac{n_{1,1}^{*,*} + n_{2,2}^{*,*}}{n_{1,1}^{*,*} + n_{2,2}^{*,*} + n_{1,2}^{*,*}}$$

1.3. Критерии проверки границ

1. Критерий проверки того, что область «b» достаточно пуста в сравнении с областями «a» и «d» ($T > T_{\text{мин}}$), преобразуется в два критерия:

$$\frac{0,5 \cdot n_{1,1}^{*,*} + n_{2,2}^{в,в} + n_{2,2}^{н,в}}{0,5 \cdot n_{1,1}^{*,*} + n_{2,2}^{в,в} + n_{2,2}^{н,в} + n_{1,2}^{*,*}} > T_{\text{мин}}, \frac{0,5 \cdot n_{1,1}^{*,*} + n_{2,2}^{н,н} + n_{2,2}^{н,в}}{0,5 \cdot n_{1,1}^{*,*} + n_{2,2}^{н,н} + n_{2,2}^{н,в} + n_{1,2}^{*,*}} > T_{\text{мин}}$$

т. е. требование вида

$$\frac{0,5 \cdot n_{1,1}^{**} + n_{2,2}^{B,l} + n_{2,2}^{H,l}}{0,5 \cdot n_{1,1}^{**} + n_{2,2}^{B,l} + n_{2,2}^{H,l} + n_{1,2}^{*,l}} > T_{\min} \text{ при каждом } l \in \{H, B\}.$$

Критерий преобразован ввиду наличия двух однотипных областей «b», требования к пустоте каждой из которых должны быть выполнены независимо друг от друга.

Таблица 1. Обозначения количества наблюдений для различных сочетаний двух классов качества, пунктиром разделены соседние области одного типа (т. е. относящиеся к одному классу качества по индикатору и одному классу качества по фактору)

Класс качества по индикатору	Класс качества по фактору				Количество наблюдений в классах по индикатору
	2 (недопустимость)	1 (допустимость)	1 (допустимость)	2 (недопустимость)	
	(в кавычках обозначение области)				
2 (неприемлемость)	$n_{2,2}^{B,H}$ « $d_{2,2}^{B,H}$ »	$n_{2,1}^{B,H}$ « $c_{2,1}^{B,H}$ »	$n_{2,1}^{B,B}$ « $c_{2,1}^{B,B}$ »	$n_{2,2}^{B,B}$ « $d_{2,2}^{B,B}$ »	$n_{2,*}^{B,*}$
1 (приемлемость)	$n_{1,2}^{B,H}$ « $b_{1,2}^{B,H}$ »	$n_{1,1}^{B,H}$ « $a_{1,1}^{B,H}$ »	$n_{1,1}^{B,B}$ « $a_{1,1}^{B,B}$ »	$n_{1,2}^{B,B}$ « $b_{1,2}^{B,B}$ »	$n_{1,*}^{B,*}$
1 (приемлемость)	$n_{1,2}^{H,H}$ « $b_{1,2}^{H,H}$ »	$n_{1,1}^{H,H}$ « $a_{1,1}^{H,H}$ »	$n_{1,1}^{H,B}$ « $a_{1,1}^{H,B}$ »	$n_{1,2}^{H,B}$ « $b_{1,2}^{H,B}$ »	$n_{1,*}^{H,*}$
2 (неприемлемость)	$n_{2,2}^{H,H}$ « $d_{2,2}^{H,H}$ »	$n_{2,1}^{H,H}$ « $c_{2,1}^{H,H}$ »	$n_{2,1}^{H,B}$ « $c_{2,1}^{H,B}$ »	$n_{2,2}^{H,B}$ « $d_{2,2}^{H,B}$ »	$n_{2,*}^{H,*}$
Количество наблюдений в классах по фактору	$n_{*,2}^{*,H}$	$n_{*,1}^{*,H}$	$n_{*,1}^{*,B}$	$n_{*,2}^{*,B}$	$n_{*,1}^{*,H} + n_{*,1}^{*,B} + n_{*,2}^{*,H} + n_{*,2}^{*,B}$ = $n_{1,*}^{*,H} + n_{1,*}^{*,B} +$ $+ n_{2,*}^{*,H} + n_{2,*}^{*,B}$

2. Проверка того, что каждая из областей «a» и «d» должна содержать представительное количество точек. Формально требование к количеству наблюдений в областях «a» и «d» должно быть изменено аналогично другим критериям, т. е. области определенного типа заменены на суммы областей определенного типа ($n_{1,1}/N > \text{ПР}_{\min}$; $n_{2,2}/N > \text{ПР}_{\min}$ заменено на $n_{1,1}^{*,*}/N > \text{ПР}_{\min}$; $n_{2,2}^{*,*}/N > \text{ПР}_{\min}$). Для четырех областей типа «a», ввиду их неразделимости, применимо только приведенное выше требование. Для четырех областей типа «d», необходима проверка того, что каждая из областей «d» не пуста. Это обусловлено тем, что суммарная доля наблюдений может превышать минимальную представительность за счет высокого количества наблюдений в одной или двух областях типа «d» при пустоте остальных областей этого типа. В таком случае исследуемое распределение будет описано неверно. Таким образом, для проверки непустоты каждой из областей типа «d», ввиду их равноправности, требование к представительности изменено на требования:

$$n_{2,2}^{H,H}/N > \text{ПР}_{\min}/4, n_{2,2}^{B,H}/N > \text{ПР}_{\min}/4, n_{2,2}^{H,B}/N > \text{ПР}_{\min}/4, n_{2,2}^{B,B}/N > \text{ПР}_{\min}/4.$$

Таким образом, для двух классов качества при поиске верхних и нижних границ норм по индикатору и фактору должны быть выполнены два вида требований:

$$n_{1,1}/N > \text{ПР}_{\min} \text{ и } n_{2,2}^{k,l}/N > \text{ПР}_{\min}/4 \text{ при каждом } k \in \{H, B\} \text{ и каждом } l \in \{H, B\}.$$

3. Критерий проверки количества совместных наблюдений индикатора и фактора должен быть преобразован исходя из того, что требование к наполненности каждой из областей «a» и «d»

в абсолютных единицах при поиске верхней и нижней границ качественных классов должно соответствовать аналогичному требованию для двух классов качества.

Таким образом, исходя из требования к минимальному количеству совместных наблюдений для двух классов качества при расчете односторонних границ и требований к минимальной представительности каждой из четырех областей « d », получаем равенство

$$N_{\min}(2 \text{ кл., } 1 \text{ гр.}) \cdot \text{ПР}_{\min} = N_{\min}(2 \text{ кл., } 2 \text{ гр.}) \cdot \text{ПР}_{\min} / 4,$$

где $N_{\min}(2 \text{ кл., } 1 \text{ гр.})$ — минимальное количество совместных наблюдений при расчете односторонних границ для двух классов качества, ПР_{\min} — минимальная представительность области « d » при этом расчете; $N_{\min}(2 \text{ кл., } 2 \text{ гр.})$ — минимальное количество совместных наблюдений при расчете двух верхних и нижних границ для двух классов качества, $\text{ПР}_{\min}/4$ — минимальная представительность области « d » при этом расчете. Количество совместных наблюдений должно быть выше соответствующего параметра минимального количества совместных наблюдений:

$$N > N_{\min}(2 \text{ кл., } 2 \text{ гр.}).$$

4. *Доверительную вероятность результатов* определяют как вероятность того, что при независимости распределений двух характеристик, между которыми проводится поиск связи, не будут найдены границы норм при заданных параметрах минимальной точности и представительности.

1.4. Полноты факторов для найденных границ

В целом все полноты найденных границ изменяются аналогично критериям расчета и проверки границ, т. е. происходит замена количества наблюдений в области типа « d » на количество наблюдений в сумме областей этого типа. Общее количество «неприемлемых» значений индикатора получают, суммируя количество «неприемлемых» значений выше верхней границы нормы индикатора и ниже нижней границы нормы индикатора.

1. *Полнота фактора*. Отношение количества наблюдений, «недопустимых» по фактору и «неприемлемых» по индикатору, к общему количеству наблюдений, «неприемлемых» по индикатору (при любых значениях всех факторов):

$$\Pi = n_{2,2}^{*,*} / N^{-},$$

где N^{-} — количество наблюдений, «неприемлемых» по индикатору при любых значениях всех факторов.

2. *Совместные полноты факторов*. Отношение количества «неприемлемых» наблюдений по индикатору, обусловленных одновременной «недопустимостью» значений по группе факторов, к общему количеству всех «неприемлемых» наблюдений по индикатору (при любых значениях всех факторов).
3. *Достаточность программы наблюдений за факторами*. Доля среди всех «неприемлемых» значений индикатора (при любых значениях всех факторов) таких значений, «неприемлемость» которых обусловлена «недопустимостью» значений хотя бы одного из исследуемых в программе наблюдений факторов.

2. Расчет односторонних границ норм для трех и произвольного количества классов качества по индикатору и фактору

2.1. Термины и обозначения

Расчет односторонних границ при выделении трех классов качества по индикатору и фактору позволяет найти две верхние или две нижние границы нормы для индикаторов и факторов.

На рис. 2 представлены обозначения количества наблюдений для различных сочетаний трех классов качества по индикатору и фактору. Для трех классов качества по индикатору класс 1 соответствует «приемлемости», класс 3 — «неприемлемости». Для трех классов качества по фактору класс 1 соответствует «допустимости», класс 3 — «недопустимости». Однако, во избежание путаницы терминов, здесь и в дальнейшем не будем вводить словесных обозначений для классов качества по индикатору и по фактору, примем правило, что в данном тексте с увеличением номера класса качества ухудшается качество исследуемого объекта.

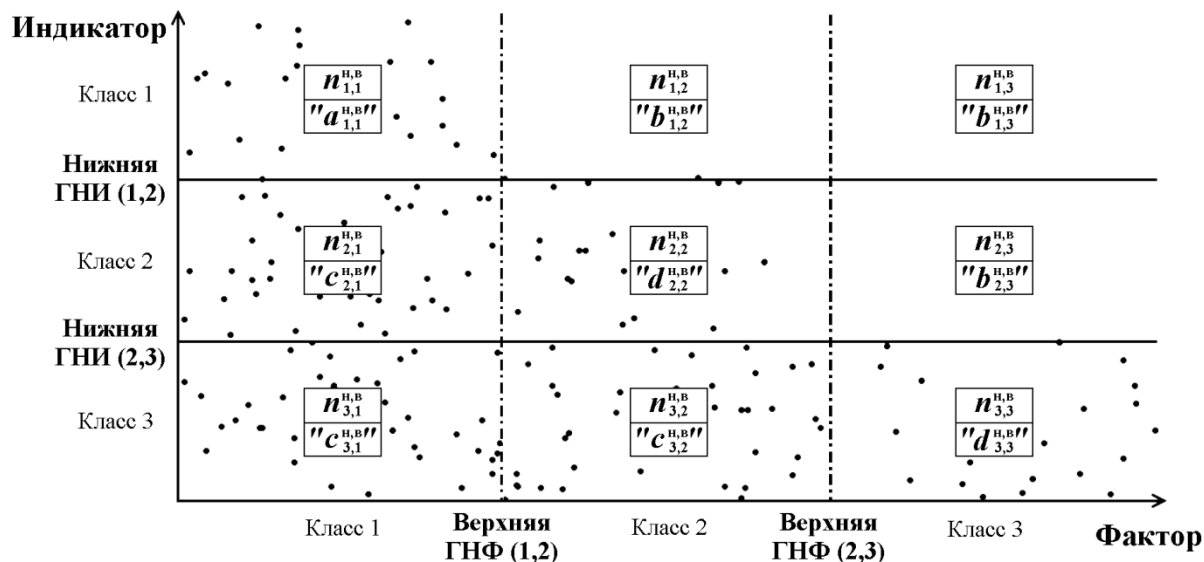


Рис. 2. Верхние границы нормы фактора и нижние границы нормы индикатора для трех классов качества вод. Обозначения: ГНИ — граница нормы индикатора; ГНФ — граница нормы фактора, в скобках указано, между какими классами качества проведены границы; «a», «b», «c», «d» — обозначения областей диаграммы; $n_{m,p}^{k,l}$ — количество наблюдений в области, относящейся к классу m по индикатору, классу p по фактору, находящейся выше области нормы по индикатору при $k = \langle \text{в} \rangle$, находящейся ниже области нормы по индикатору при $k = \langle \text{н} \rangle$, находящейся выше области нормы по фактору при $l = \langle \text{в} \rangle$, находящейся ниже области нормы по фактору при $l = \langle \text{н} \rangle$.

Расчет односторонних границ при выделении w классов качества по индикатору и фактору позволяет найти $w-1$ верхних или $w-1$ нижних границ нормы для индикаторов и факторов. В таблице 2 представлены обозначения количества наблюдений для различных сочетаний w классов качества по индикатору и фактору.

2.2. Критерий расчета границ

При расчете односторонних границ норм для трех классов качества критерий существенности приобретает трехсоставной характер, что связано с появлением трех типов области «b»: « $b_{1,2}^{h,b}$ », « $b_{1,3}^{h,b}$ », « $b_{2,3}^{h,b}$ », пустоту которых надо охарактеризовать. Для определения степени пустоты каждый тип следует сравнить с наполненностью соответствующих этому типу областей «a» и «d», т. е. областей «a» и «d», относящихся к тому же классу качества по индикатору или по фактору, что и исследуемая область «b». Индивидуальная точность, характеризующая пустоту области «b», относящейся к 1-му классу по индикатору и 2-му классу по фактору, рассчитывается по формуле

$$T_{1,2} = \frac{n_{1,1}^{h,b} + n_{2,2}^{h,b}}{n_{1,1}^{h,b} + n_{2,2}^{h,b} + n_{1,2}^{h,b}}.$$

Она соответствует точности, приведенной в первой части цикла статей [Рисник и др., 2015] для поиска одной границы по индикатору и одной границы по фактору и двух классов качества.

Таблица 2. Обозначения количества наблюдений для различных сочетаний произвольного числа классов качества по индикатору и фактору

Класс качества по индикатору	Класс качества по фактору				Количество наблюдений в классах по индикатору
	1	2	...	w	
	(в кавычках обозначение области)				
1	$n_{1,1}^{H,B}$ « $a_{1,1}^{H,B}$ »	$n_{1,2}^{H,B}$ « $b_{1,2}^{H,B}$ »	...	$n_{1,w}^{H,B}$ « $b_{1,w}^{H,B}$ »	$n_{1,*}^{H,B}$
2	$n_{2,1}^{H,B}$ « $c_{2,1}^{H,B}$ »	$n_{2,2}^{H,B}$ « $d_{2,2}^{H,B}$ »	...	$n_{2,w}^{H,B}$ « $b_{2,w}^{H,B}$ »	$n_{2,*}^{H,B}$
...
w	$n_{w,1}^{H,B}$ « $c_{w,1}^{H,B}$ »	$n_{w,2}^{H,B}$ « $d_{w,2}^{H,B}$ »	...	$n_{w,w}^{H,B}$ « $d_{w,w}^{H,B}$ »	$n_{w,*}^{H,B}$
Количество наблюдений в классах по фактору	$n_{*,1}^{H,B}$	$n_{*,2}^{H,B}$...	$n_{*,w}^{H,B}$	$n_{*,1}^{H,B} + n_{*,2}^{H,B} + \dots + n_{*,w}^{H,B} =$ $n_{1,*}^{H,B} + n_{2,*}^{H,B} + \dots + n_{w,*}^{H,B}$

Индивидуальную точность, характеризующую пустоту области «b», относящейся к 1-му классу по индикатору и 3-му классу по фактору, рассчитывают по формуле

$$T_{1,3} = \frac{n_{1,1}^{H,B} + n_{3,3}^{H,B}}{n_{1,1}^{H,B} + n_{3,3}^{H,B} + n_{1,3}^{H,B}}$$

Индивидуальную точность, характеризующая пустоту области «b», относящейся ко 2-му классу по индикатору и 3-му классу по фактору, — по формуле

$$T_{2,3} = \frac{n_{2,2}^{H,B} + n_{3,3}^{H,B}}{n_{2,2}^{H,B} + n_{3,3}^{H,B} + n_{2,3}^{H,B}}$$

Формула индивидуальных точностей для трех классов качества в обобщенной формулировке может быть записана как

$$T_{m,p} = \frac{n_{m,m}^{H,B} + n_{p,p}^{H,B}}{n_{m,m}^{H,B} + n_{p,p}^{H,B} + n_{m,p}^{H,B}}$$

при каждом $m \in [1, 2]$ и каждом $p \in [(m+1), 3]$. Для произвольного числа классов качества формула точности имеет тот же вид, но уже при каждом $m \in [1, (w-1)]$ и каждом $p \in [(m+1), w]$.

Соответствующие индивидуальные существенности для трех классов качества рассчитывают по формулам

$$C_{1,2} = \frac{n_{1,1}^{H,B} + n_{2,2}^{H,B}}{n_{1,1}^{H,B} + n_{2,2}^{H,B} + n_{1,2}^{H,B}} - \frac{n_{1,*}^{H,B} n_{*,1}^{H,B} + n_{2,*}^{H,B} n_{*,2}^{H,B}}{n_{1,*}^{H,B} n_{*,1}^{H,B} + n_{2,*}^{H,B} n_{*,2}^{H,B} + n_{1,*}^{H,B} n_{*,2}^{H,B}}; C_{1,3} = \frac{n_{1,1}^{H,B} + n_{3,3}^{H,B}}{n_{1,1}^{H,B} + n_{3,3}^{H,B} + n_{1,3}^{H,B}} - \frac{n_{1,*}^{H,B} n_{*,1}^{H,B} + n_{3,*}^{H,B} n_{*,3}^{H,B}}{n_{1,*}^{H,B} n_{*,1}^{H,B} + n_{3,*}^{H,B} n_{*,3}^{H,B} + n_{1,*}^{H,B} n_{*,3}^{H,B}};$$

$$C_{2,3} = \frac{n_{2,2}^{H,B} + n_{3,3}^{H,B}}{n_{2,2}^{H,B} + n_{3,3}^{H,B} + n_{2,3}^{H,B}} - \frac{n_{2,*}^{H,B} n_{*,2}^{H,B} + n_{3,*}^{H,B} n_{*,3}^{H,B}}{n_{2,*}^{H,B} n_{*,2}^{H,B} + n_{3,*}^{H,B} n_{*,3}^{H,B} + n_{2,*}^{H,B} n_{*,3}^{H,B}}$$

Формула индивидуальных существенностей для трех классов качества в обобщенной формулировке может быть записана как

$$C_{m,p} = \frac{n_{m,m}^{H,B} + n_{p,p}^{H,B}}{n_{m,m}^{H,B} + n_{p,p}^{H,B} + n_{m,p}^{H,B}} - \frac{n_{m,*}^{H,*}n_{*,m}^{*,B} + n_{p,*}^{H,*}n_{*,p}^{*,B}}{n_{m,*}^{H,*}n_{*,m}^{*,B} + n_{p,*}^{H,*}n_{*,p}^{*,B} + n_{m,*}^{H,*}n_{*,p}^{*,B}},$$

при каждом $m \in [1, 2]$ и каждом $p \in [(m+1), 3]$. Для произвольного числа классов качества формула существенности имеет тот же вид, но уже при каждом $m \in [1, (w-1)]$ и каждом $p \in [(m+1), w]$.

В качестве итогового трехсоставного критерия расчета границ используют среднегеометрическое значение трех индивидуальных существенностей (*критерий результирующей существенности*):

$$C_{\text{рез}} = \sqrt[3]{C_{1,2} \cdot C_{1,3} \cdot C_{2,3}}, \text{ или}$$

$$C_{\text{рез}} = \sqrt[3]{\prod_{m=1}^2 \prod_{p=(m+1)}^3 \left(\frac{n_{m,m}^{H,B} + n_{p,p}^{H,B}}{n_{m,m}^{H,B} + n_{p,p}^{H,B} + n_{m,p}^{H,B}} - \frac{n_{m,*}^{H,*}n_{*,m}^{*,B} + n_{p,*}^{H,*}n_{*,p}^{*,B}}{n_{m,*}^{H,*}n_{*,m}^{*,B} + n_{p,*}^{H,*}n_{*,p}^{*,B} + n_{m,*}^{H,*}n_{*,p}^{*,B}} \right)}.$$

В качестве итогового критерия расчета границ для произвольного числа классов используют среднегеометрическое значение $\frac{w(w-1)}{2}$ индивидуальных существенностей:

$$C_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{w(w-1)}{2} C_{1,2} \cdot C_{1,3} \cdot C_{2,3} \cdot \dots \cdot C_{(w-1),w}}, \text{ или}$$

$$C_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{w(w-1)}{2} \prod_{m=1}^{w-1} \prod_{p=m+1}^w \left(\frac{n_{m,m}^{H,B} + n_{p,p}^{H,B}}{n_{m,m}^{H,B} + n_{p,p}^{H,B} + n_{m,p}^{H,B}} - \frac{n_{m,*}^{H,*}n_{*,m}^{*,B} + n_{p,*}^{H,*}n_{*,p}^{*,B}}{n_{m,*}^{H,*}n_{*,m}^{*,B} + n_{p,*}^{H,*}n_{*,p}^{*,B} + n_{m,*}^{H,*}n_{*,p}^{*,B}} \right)}.$$

2.3. Критерии проверки границ

1. Критерий проверки того, что область «b» должна быть достаточно пуста в сравнении с областями «a» и «d», при поиске трех классов качества необходим в отношении каждой из областей «b», т. е. каждая из индивидуальных точностей должна быть больше параметра минимальной точности:

$$T_{m,p} > T_{\text{мин}} \text{ при каждом } m \in [1, 2] \text{ и каждом } p \in [(m+1), 3].$$

Для произвольного числа классов качества формула имеет тот же вид, но уже при каждом $m \in [1, (w-1)]$ и каждом $p \in [(m+1), w]$.

2. Проверка того, что каждая из областей «a» и «d» должна содержать представительное количество точек, при поиске трех классов качества должна быть преобразована в критерии:

$$n_{1,1}^{H,B}/N > \frac{2}{3} \text{ПР}_{\text{мин}}; n_{2,2}^{H,B}/N > \frac{2}{3} \text{ПР}_{\text{мин}}; n_{3,3}^{H,B}/N > \frac{2}{3} \text{ПР}_{\text{мин}}.$$

Преобразование критерия связано с тем, что появление трех классов качества вызывает появление трех равноправных по представительности областей (одной области «a» и двух областей «d») вместо двух равноправных («a» и «d») для двух классов качества. Чтобы сохранить общую долю наблюдений, характеризующую массив данных как представительный, изменена

пропорция требований к каждой из областей. Это изменение обусловлено тем, что при дальнейшем увеличении числа классов без изменения пропорции критерий проверки представительности вырождается в требование, чтобы все наблюдения были только в ячейках «а» и «d».

Для произвольного числа классов критерий принимает вид:

$$n_{1,1}^{н.в}/N \geq \frac{2}{w} \text{ПР}_{\text{мин}} ; n_{2,2}^{н.в}/N \geq \frac{2}{w} \text{ПР}_{\text{мин}} ; \dots ; n_{w,w}^{н.в}/N \geq \frac{2}{w} \text{ПР}_{\text{мин}} ,$$

что обусловлено наличием w классов качества и, как следствие, w равноправных по представительности областей (одной области «а» и $(w-1)$ областей «d»).

3. *Критерий проверки количества совместных наблюдений* индикатора и фактора при поиске трех классов качества должен быть преобразован исходя из того, что требование к наполненности областей «а» и «d» в абсолютных единицах не должно быть менее строгим, чем аналогичное требование при расчете границ норм для двух классов качества. То есть исходя из требования к минимальному количеству совместных наблюдений для двух классов качества и требований к минимальной представительности, например, области «а», для двух и трех классов качества можно составить пропорцию

$$N_{\text{мин}}(2 \text{ кл., } 1 \text{ гр.}) \cdot \text{ПР}_{\text{мин}} = N_{\text{мин}}(3 \text{ кл., } 1 \text{ гр.}) \cdot \frac{2}{3} \text{ПР}_{\text{мин}} ,$$

где $N_{\text{мин}}(2 \text{ кл., } 1 \text{ гр.})$ — минимальное количество совместных наблюдений индикатора и фактора при расчете односторонних границ норм для двух классов качества, $\text{ПР}_{\text{мин}}$ — минимальная представительность области «а» при этом расчете; $N_{\text{мин}}(3 \text{ кл., } 1 \text{ гр.})$ — минимальное количество совместных наблюдений индикатора и фактора при расчете односторонних границ норм для трех классов качества, $\frac{2}{3} \text{ПР}_{\text{мин}}$ — минимальная представительность области «а» при этом расчете.

Для произвольного числа классов критерий принимает вид

$$N_{\text{мин}}(2 \text{ кл., } 1 \text{ гр.}) \cdot \text{ПР}_{\text{мин}} = N_{\text{мин}}(w \text{ кл., } 1 \text{ гр.}) \cdot \frac{2}{w} \text{ПР}_{\text{мин}} ,$$

где $N_{\text{мин}}(w \text{ кл., } 1 \text{ гр.})$ — минимальное количество совместных наблюдений индикатора и фактора при расчете односторонних границ норм для w классов качества, $\frac{2}{w} \text{ПР}_{\text{мин}}$ — минимальная представительность области «а» при этом расчете.

Количество совместных наблюдений должно быть выше соответствующего параметра минимального количества совместных наблюдений:

$$N > N_{\text{мин}}(w \text{ кл., } 1 \text{ гр.}) .$$

4. *Доверительную вероятность результатов* определяют как вероятность того, что при независимости распределений двух характеристик, между которыми проводится поиск связи, не будут найдены границы норм при заданных параметрах минимальной точности и представительности.

2.4. Полноты факторов для найденных границ

1. *Полнота фактора.* При поиске трех классов качества для учета вклада каждого из исследуемых факторов в условно слабую «неприемлемость» значений индикатора (соответствует классу качества 2) или условно сильную «неприемлемость» значений индикатора (соответствует

ет классу качества 3) использованы полноты факторов. Вклад фактора в класс качества 2 по индикатору рассчитывают как количество наблюдений, соответствующих классу 2 по индикатору и по фактору среди значений, соответствующих классу 2 по индикатору, за вычетом наблюдений, попавших в область « $b_{2,3}^{H,B}$ » по исследуемой паре «индикатор–фактор»:

$$\Pi = n_{2,2}^{H,B} / (N_2 - n_{2,3}^{H,B}),$$

где N_2 — количество наблюдений, соответствующих классу 2 по индикатору.

Вклад фактора в класс качества 3 по индикатору рассчитывают как количество наблюдений, соответствующих классу 3 по индикатору и по фактору среди значений, соответствующих классу 3 по индикатору:

$$\Pi = n_{3,3}^{H,B} / N_3,$$

где N_3 — количество наблюдений, соответствующих классу 3 по индикатору.

При поиске произвольного числа классов расчет полноты для класса качества m заключается в определении отношения количества наблюдений, относящихся к классу m по фактору и к классу m по индикатору, к общему количеству наблюдений индикатора, относящихся к классу m по индикатору, за вычетом наблюдений, попавших в области « $b_{m,p}^{H,B}$ » (для всех $p \in [(m+1), w]$).

2. *Совместные полноты факторов* также должны быть преобразованы при поиске трех классов качества ввиду появления двух «неприемлемых» классов качества. Отдельно следует определять совместные полноты факторов, вносящих вклад в класс качества 2 по индикатору, и отдельно — совместные полноты факторов, вносящих вклад в класс качества 3 по индикатору. Расчет полноты заключается в определении отношения количества наблюдений, относящихся к классу 2 по нескольким факторам и к классу 2 по индикатору, к общему количеству наблюдений индикатора, относящихся к классу 2 по индикатору, за вычетом количества наблюдений, попавших в область « $b_{2,3}^{H,B}$ » по всем исследуемым факторам. Аналогичный расчет проводят для наблюдений, относящихся к классу 3 по нескольким факторам и классу 3 по индикатору, определяя отношение количества таких наблюдений к общему количеству наблюдений, относящихся к классу качества 3 по индикатору.

При поиске произвольного числа классов расчет совместных полнот для класса качества m заключается в определении отношения количества наблюдений, относящихся к классу m по нескольким факторам и к классу m по индикатору, к общему количеству наблюдений индикатора, относящихся к классу m по индикатору, за вычетом количества наблюдений, попавших в области « $b_{m,p}^{H,B}$ » (для всех $p \in [(m+1), w]$) по всем исследуемым факторам.

3. Алгоритм расчета *достаточности программы наблюдений за факторами* для какого-либо индикатора при поиске трех классов качества должен быть преобразован ввиду появления двух отличных от «приемлемости» классов качества. Отметим, что в данном случае два отличных от «приемлемости» класса качества использованы для примера. Могут быть случаи, когда из трех классов качества два могут отражать градации «приемлемости» и только один может отвечать за «неприемлемость». Поскольку исследователю важно знать не только достаточность программы наблюдений за факторами в целом (т. е. всех градаций, относящихся к «неприемлемости»), но и достаточность программы наблюдений, объясняющих различные градации «неприемлемости», необходимо введение двух типов достаточности: *общей достаточности наблюдений за факторами* и *достаточности наблюдений за факторами для описания причин «неприемлемости» значений выделенного класса качества «т» по индикатору* (в нашем случае класс качества 2 и 3). *Общую достаточность наблюдений за факторами* определяют как отношение количества наблюдений, относящихся к «неприемлемым», попавших в область « d »

(« $d_{2,2}^{H,B}$ » или « $d_{3,3}^{H,B}$ ») хотя бы по одному из факторов, к общему количеству наблюдений, относящихся к «неприемлемым» (в нашем примере — классам качества 2 и 3 по индикатору), за вычетом количества наблюдений, попавших в область « $b_{2,3}^{H,B}$ » по всем факторам. *Достаточность наблюдений за факторами для описания причин «неприемлемости» значений класса качества 2 по индикатору* определяют как отношение количества наблюдений, попавших в область « $d_{2,2}^{H,B}$ » хотя бы по одному из факторов, к общему количеству наблюдений, относящихся к классу качества 2 по индикатору, за вычетом количества наблюдений, попавших в область « $b_{2,3}^{H,B}$ » по всем исследуемым факторам; для класса качества 3 по индикатору — как отношение количества наблюдений, попавших в область « $d_{3,3}^{H,B}$ » хотя бы по одному из факторов, к общему количеству наблюдений, относящихся к классу качества 3.

При поиске произвольного числа классов *общую достаточность наблюдений за факторами* определяют как долю наблюдений, попавших в области « d », относящиеся к градациям «неприемлемости» значений индикатора (т. е. одного или нескольких классов качества индикатора, которые следует отнести к «неприемлемым» при выделении двух групп классов качества «приемлемые» и «неприемлемые») хотя бы по одному из факторов, среди всех наблюдений, относящихся к градациям «неприемлемости» значений индикатора за вычетом наблюдений, попавших в области « b », относящиеся к градациям «неприемлемости» значений индикатора. *Достаточность наблюдений за факторами для описания причин «неприемлемости» значений класса качества индикатора « t »* определяют как долю наблюдений, попавших в область « $d_{m,m}^{H,B}$ » хотя бы по одному из факторов, среди всех наблюдений, относящихся к классу качества m индикатора, за вычетом наблюдений, попавших в области « $b_{m,p}^{H,B}$ » (для всех $p \in [(m+1), w]$) по всем исследуемым факторам.

3. Расчет верхних и нижних границ норм для трех и произвольного числа классов качества по индикатору и фактору

3.1. Термины и обозначения

Расчет верхних и нижних границ норм при выделении трех классов качества по индикатору и фактору позволяет одновременно найти как две верхние, так и две нижние границы нормы для индикаторов и факторов. В таблице 3 приведены обозначения количества наблюдений для различных сочетаний трех классов качества по индикатору и фактору. С увеличением номера класса качества ухудшается качество исследуемого объекта. Отметим, что, по аналогии с расчетом верхних и нижних границ норм для двух классов качества, области, относящиеся к первому классу по индикатору или первому классу по фактору, содержат несколько неразделимых областей одного типа. Так, область « $a_{1,1}^{*,*}$ » содержит четыре неразделимые области (см. таблицу 1) « $a_{1,1}^{*,*} = a_{1,1}^{H,H} + a_{1,1}^{H,B} + a_{1,1}^{B,H} + a_{1,1}^{B,B}$ », области « $b_{1,3}^{*,H}$ », « $b_{1,3}^{*,B}$ », « $b_{1,2}^{*,H}$ », « $b_{1,2}^{*,B}$ », « $c_{3,1}^{*,*}$ », « $c_{3,1}^{B,*}$ », « $c_{2,1}^{*,*}$ », « $c_{2,1}^{B,*}$ » содержат по две неразделимые области « $b_{1,3}^{*,H} = b_{1,3}^{H,H} + b_{1,3}^{H,B}$ », « $b_{1,3}^{*,B} = b_{1,3}^{B,H} + b_{1,3}^{B,B}$ », « $b_{1,2}^{*,H} = b_{1,2}^{H,H} + b_{1,2}^{H,B}$ », « $b_{1,2}^{*,B} = b_{1,2}^{B,H} + b_{1,2}^{B,B}$ », « $c_{3,1}^{*,*} = c_{3,1}^{H,H} + c_{3,1}^{H,B}$ », « $c_{3,1}^{*,B} = c_{3,1}^{B,H} + c_{3,1}^{B,B}$ », « $c_{2,1}^{*,*} = c_{2,1}^{H,H} + c_{2,1}^{H,B}$ », « $c_{2,1}^{*,B} = c_{2,1}^{B,H} + c_{2,1}^{B,B}$ ». Наличие неразделимых областей обуславливает различие требований к областям в критериях проверки границ.

Расчет верхних и нижних границ при выделении w классов качества по индикатору и фактору позволяет одновременно найти как $(w-1)$ верхние, так и $(w-1)$ нижние границы нормы для индикаторов и факторов. В таблице 4 представлены обозначения числа наблюдений для различных сочетаний w классов качества по индикатору и фактору. С увеличением номера класса качества в таблице ухудшается качество исследуемого объекта.

Таблица 3. Обозначения количества наблюдений для различных сочетаний трех классов качества по индикатору и фактору и при одновременном поиске верхних и нижних границ

Класс качества по индикатору	Класс качества по фактору					Количество наблюдений в классах по индикатору
	3	2	1	2	3	
	(в кавычках — обозначение области)					
3	$n_{3,3}^{B,H}$ « $d_{3,3}^{B,H}$ »	$n_{3,2}^{B,H}$ « $d_{3,2}^{B,H}$ »	$n_{3,1}^{B,H}$ « $d_{3,1}^{B,H}$ »	$n_{3,2}^{B,B}$ « $d_{3,2}^{B,B}$ »	$n_{3,3}^{B,B}$ « $d_{3,3}^{B,B}$ »	$n_{3,*}^{B,*}$
2	$n_{2,3}^{B,H}$ « $d_{2,3}^{B,H}$ »	$n_{2,2}^{B,H}$ « $d_{2,2}^{B,H}$ »	$n_{2,1}^{B,*}$ « $d_{2,1}^{B,*}$ »	$n_{2,2}^{B,B}$ « $d_{2,2}^{B,B}$ »	$n_{2,3}^{B,B}$ « $d_{2,3}^{B,B}$ »	$n_{2,*}^{B,*}$
1	$n_{1,3}^{*,H}$ « $d_{1,2}^{*,H}$ »	$n_{1,2}^{*,H}$ « $d_{1,2}^{*,H}$ »	$n_{1,1}^{*,*}$ « $d_{1,1}^{*,*}$ »	$n_{1,2}^{*,B}$ « $d_{1,2}^{*,B}$ »	$n_{1,3}^{*,B}$ « $d_{1,3}^{*,B}$ »	$n_{1,*}^{*,*}$
2	$n_{2,3}^{H,H}$ « $d_{2,3}^{H,H}$ »	$n_{2,2}^{H,H}$ « $d_{2,2}^{H,H}$ »	$n_{2,1}^{H,*}$ « $d_{2,1}^{H,*}$ »	$n_{2,2}^{H,B}$ « $d_{2,2}^{H,B}$ »	$n_{2,3}^{H,B}$ « $d_{2,3}^{H,B}$ »	$n_{2,*}^{H,*}$
3	$n_{3,3}^{H,H}$ « $d_{3,3}^{H,H}$ »	$n_{3,2}^{H,H}$ « $d_{3,2}^{H,H}$ »	$n_{3,1}^{H,*}$ « $d_{3,1}^{H,*}$ »	$n_{3,2}^{H,B}$ « $d_{3,2}^{H,B}$ »	$n_{3,3}^{H,B}$ « $d_{3,3}^{H,B}$ »	$n_{3,*}^{H,*}$
Количество наблюдений в классах по фактору	$n_{*,3}^{*,H}$	$n_{*,2}^{*,H}$	$n_{*,1}^{*,*}$	$n_{*,2}^{*,B}$	$n_{*,3}^{*,B}$	$n_{*,1}^{*,*} + n_{*,2}^{*,B} + n_{*,3}^{*,B} + n_{*,2}^{*,H} + n_{*,3}^{*,H} =$ $= n_{*,1}^{*,*} + n_{*,2}^{*,*} + n_{*,3}^{*,*} = n_{1,*}^{*,*} + n_{2,*}^{*,*} + n_{3,*}^{*,*}$ $+ n_{2,*}^{B,*} + n_{3,*}^{B,*} = n_{1,*}^{*,*} + n_{2,*}^{*,*} + n_{3,*}^{*,*}$

Таблица 4. Обозначения количества наблюдений для различных сочетаний произвольного числа классов качества по индикатору и фактору и при одновременном поиске верхних и нижних границ

Класс качества по индикатору	Класс качества по фактору							Количество наблюдений в классах по индикатору
	w	...	2	1	2	...	w	
	(в кавычках — обозначение области)							
w	$n_{w,w}^{B,H}$ « $d_{w,w}^{B,H}$ »	...	$n_{w,2}^{B,H}$ « $d_{w,2}^{B,H}$ »	$n_{w,1}^{B,*}$ « $d_{w,1}^{B,*}$ »	$n_{w,2}^{B,B}$ « $d_{w,2}^{B,B}$ »	...	$n_{w,w}^{B,B}$ « $d_{w,w}^{B,B}$ »	$n_{w,*}^{B,*}$
...
2	$n_{2,w}^{B,H}$ « $d_{2,w}^{B,H}$ »	...	$n_{2,2}^{B,H}$ « $d_{2,2}^{B,H}$ »	$n_{2,1}^{B,*}$ « $d_{2,1}^{B,*}$ »	$n_{2,2}^{B,B}$ « $d_{2,2}^{B,B}$ »	...	$n_{2,w}^{B,B}$ « $d_{2,w}^{B,B}$ »	$n_{2,*}^{B,*}$
1	$n_{1,w}^{*,H}$ « $d_{1,w}^{*,H}$ »	...	$n_{1,2}^{*,H}$ « $d_{1,2}^{*,H}$ »	$n_{1,1}^{*,*}$ « $d_{1,1}^{*,*}$ »	$n_{1,2}^{*,B}$ « $d_{1,2}^{*,B}$ »	...	$n_{1,w}^{*,B}$ « $d_{1,w}^{*,B}$ »	$n_{1,*}^{*,*}$
2	$n_{2,w}^{H,H}$ « $d_{2,w}^{H,H}$ »	...	$n_{2,2}^{H,H}$ « $d_{2,2}^{H,H}$ »	$n_{2,1}^{H,*}$ « $d_{2,1}^{H,*}$ »	$n_{2,2}^{H,B}$ « $d_{2,2}^{H,B}$ »	...	$n_{2,w}^{H,B}$ « $d_{2,w}^{H,B}$ »	$n_{2,*}^{H,*}$
...
w	$n_{w,w}^{H,H}$ « $d_{w,w}^{H,H}$ »	...	$n_{w,2}^{H,H}$ « $d_{w,2}^{H,H}$ »	$n_{w,1}^{H,*}$ « $d_{w,1}^{H,*}$ »	$n_{w,2}^{H,B}$ « $d_{w,2}^{H,B}$ »	...	$n_{w,w}^{H,B}$ « $d_{w,w}^{H,B}$ »	$n_{w,*}^{H,*}$
Количество наблюдений в классах по фактору	$n_{*,w}^{*,H}$...	$n_{*,2}^{*,H}$	$n_{*,1}^{*,*}$	$n_{*,2}^{*,B}$...	$n_{*,w}^{*,B}$	$n_{*,1}^{*,*} + n_{*,2}^{*,*} +$ $+ \dots + n_{*,w}^{*,*} =$ $= n_{1,*}^{*,*} + n_{2,*}^{*,*} +$ $+ \dots + n_{w,*}^{*,*}$

3.2. Критерий расчета границ

При расчете верхних и нижних границ норм для трех классов качества критерий существенности, аналогично критерию расчета односторонних границ, имеет составной характер ввиду наличия трех типов области «b» (« $b_{1,2}^{**}$ », « $b_{1,3}^{**}$ », « $b_{2,3}^{**}$ », где $b_{1,2}^{**} = \sum_{k \in \{н,в\}} \sum_{l \in \{н,в\}} b_{1,2}^{k,l}$, $b_{1,3}^{**} = \sum_{k \in \{н,в\}} \sum_{l \in \{н,в\}} b_{1,3}^{k,l}$, $b_{2,3}^{**} = \sum_{k \in \{н,в\}} \sum_{l \in \{н,в\}} b_{2,3}^{k,l}$). При определении степени пустоты каждого типа областей «b» наполненность области этого типа следует сравнить с наполненностью соответствующих ей областей «a» и «d» (областей «a» и «d», относящихся к тому же классу качества по индикатору или по фактору, что и исследуемая область «b»). Среди областей «a» и «d» встречаются области трех типов: « $a_{1,1}^{**} = \sum_{k \in \{н,в\}} \sum_{l \in \{н,в\}} a_{1,1}^{k,l}$ », « $d_{2,2}^{**} = \sum_{k \in \{н,в\}} \sum_{l \in \{н,в\}} d_{2,2}^{k,l}$ » и « $d_{3,3}^{**} = \sum_{k \in \{н,в\}} \sum_{l \in \{н,в\}} d_{3,3}^{k,l}$ ». Индивидуальные точности, характеризующие пустоту областей «b», соответствуют точностям, приведенным для расчета односторонних границ с заменой количества наблюдений в типе области на сумму чисел наблюдений в типе области:

$$T_{1,2} = \frac{n_{1,1}^{**} + n_{2,2}^{**}}{n_{1,1}^{**} + n_{2,2}^{**} + n_{1,2}^{**}}, T_{1,3} = \frac{n_{1,1}^{**} + n_{3,3}^{**}}{n_{1,1}^{**} + n_{3,3}^{**} + n_{1,3}^{**}}, T_{2,3} = \frac{n_{2,2}^{**} + n_{3,3}^{**}}{n_{2,2}^{**} + n_{3,3}^{**} + n_{2,3}^{**}}.$$

Формула индивидуальных точностей для трех классов качества при расчете верхних и нижних границ норм в обобщенной формулировке может быть записана как:

$$T_{m,p} = \frac{n_{m,m}^{**} + n_{p,p}^{**}}{n_{m,m}^{**} + n_{p,p}^{**} + n_{m,p}^{**}},$$

при каждом $m \in [1, 2]$ и каждом $p \in [(m+1), 3]$. Для произвольного количества классов качества формула точности имеет тот же вид, но уже при каждом $m \in [1, (w-1)]$ и каждом $p \in [(m+1), w]$.

Индивидуальные существенности для трех классов качества рассчитывают по формулам:

$$C_{1,2} = \frac{n_{1,1}^{**} + n_{2,2}^{**}}{n_{1,1}^{**} + n_{2,2}^{**} + n_{1,2}^{**}} - \frac{n_{1,*}^{**} n_{*,1}^{**} + n_{2,*}^{**} n_{*,2}^{**}}{n_{1,*}^{**} n_{*,1}^{**} + n_{2,*}^{**} n_{*,2}^{**} + n_{1,*}^{**} n_{*,2}^{**}}, C_{1,3} = \frac{n_{1,1}^{**} + n_{3,3}^{**}}{n_{1,1}^{**} + n_{3,3}^{**} + n_{1,3}^{**}} - \frac{n_{1,*}^{**} n_{*,1}^{**} + n_{3,*}^{**} n_{*,3}^{**}}{n_{1,*}^{**} n_{*,1}^{**} + n_{3,*}^{**} n_{*,3}^{**} + n_{1,*}^{**} n_{*,3}^{**}},$$

$$C_{2,3} = \frac{n_{2,2}^{**} + n_{3,3}^{**}}{n_{2,2}^{**} + n_{3,3}^{**} + n_{2,3}^{**}} - \frac{n_{2,*}^{**} n_{*,2}^{**} + n_{3,*}^{**} n_{*,3}^{**}}{n_{2,*}^{**} n_{*,2}^{**} + n_{3,*}^{**} n_{*,3}^{**} + n_{2,*}^{**} n_{*,3}^{**}}.$$

Формула индивидуальных существенностей для трех классов качества при расчете верхних и нижних границ норм в обобщенной формулировке может быть записана как

$$C_{m,p} = \frac{n_{m,m}^{**} + n_{p,p}^{**}}{n_{m,m}^{**} + n_{p,p}^{**} + n_{m,p}^{**}} - \frac{n_{m,*}^{**} n_{*,m}^{**} + n_{p,*}^{**} n_{*,p}^{**}}{n_{m,*}^{**} n_{*,m}^{**} + n_{p,*}^{**} n_{*,p}^{**} + n_{m,*}^{**} n_{*,p}^{**}},$$

при каждом $m \in [1, 2]$ и каждом $p \in [(m+1), 3]$. Для произвольного количества классов качества формула существенности имеет тот же вид, но уже при каждом $m \in [1, (w-1)]$ и каждом $p \in [(m+1), w]$.

В качестве итогового критерия расчета границ используют среднегеометрическое значение трех индивидуальных существенностей (*критерий результирующей существенности*):

$$C_{рез} = \sqrt[3]{C_{1,2} \cdot C_{1,3} \cdot C_{2,3}}, \text{ или } C_{рез} = \sqrt[3]{\prod_{m=1}^2 \prod_{p=(m+1)}^3 \left(\frac{n_{m,m}^{**} + n_{p,p}^{**}}{n_{m,m}^{**} + n_{p,p}^{**} + n_{m,p}^{**}} - \frac{n_{m,*}^{**} n_{*,m}^{**} + n_{p,*}^{**} n_{*,p}^{**}}{n_{m,*}^{**} n_{*,m}^{**} + n_{p,*}^{**} n_{*,p}^{**} + n_{m,*}^{**} n_{*,p}^{**}} \right)}.$$

Для произвольного числа классов критерий результирующей существенности равен среднегеометрическому значению $\frac{w(w-1)}{2}$ индивидуальных существенностей:

$$C_{\text{рез}} = \frac{w(w-1)}{2} \sqrt{C_{1,2} \cdot C_{1,3} \cdot C_{2,3} \cdot \dots \cdot C_{(w-1),w}}, \text{ или}$$

$$C_{\text{рез}} = \frac{w(w-1)}{2} \sqrt{\prod_{m=1}^{w-1} \prod_{p=m+1}^w \left(\frac{n_{m,m}^{**} + n_{p,p}^{**}}{n_{m,m}^{**} + n_{p,p}^{**} + n_{m,p}^{**}} - \frac{n_{m,*}^{**} n_{*,m}^{**} + n_{p,*}^{**} n_{*,p}^{**}}{n_{m,*}^{**} n_{*,m}^{**} + n_{p,*}^{**} n_{*,p}^{**} + n_{m,*}^{**} n_{*,p}^{**}} \right)}.$$

3.3. Критерии проверки грани

1. Критерий проверки того, что область «b» должна быть достаточно пуста в сравнении с областями «a» и «d», при поиске трех классов качества преобразуется в следующие критерии:

$$\frac{0,5 \cdot n_{1,1}^{**} + n_{2,2}^{*B}}{0,5 \cdot n_{1,1}^{**} + n_{2,2}^{*B} + n_{1,2}^{*B}} > T_{\text{мин}}, \quad \frac{0,5 \cdot n_{1,1}^{**} + n_{3,3}^{*B}}{0,5 \cdot n_{1,1}^{**} + n_{3,3}^{*B} + n_{1,3}^{*B}} > T_{\text{мин}}, \quad \frac{n_{2,2}^{*B} + n_{3,3}^{*B}}{n_{2,2}^{*B} + n_{3,3}^{*B} + n_{2,3}^{*B}} > T_{\text{мин}},$$

$$\frac{n_{2,2}^{*H} + n_{3,3}^{*H}}{n_{2,2}^{*H} + n_{3,3}^{*H} + n_{2,3}^{*H}} > T_{\text{мин}}, \quad \frac{0,5 \cdot n_{1,1}^{**} + n_{2,2}^{*H}}{0,5 \cdot n_{1,1}^{**} + n_{2,2}^{*H} + n_{1,2}^{*H}} > T_{\text{мин}}, \quad \frac{0,5 \cdot n_{1,1}^{**} + n_{3,3}^{*H}}{0,5 \cdot n_{1,1}^{**} + n_{3,3}^{*H} + n_{1,3}^{*H}} > T_{\text{мин}},$$

$$\frac{n_{2,2}^{*H} + n_{3,3}^{*H}}{n_{2,2}^{*H} + n_{3,3}^{*H} + n_{2,3}^{*H}} > T_{\text{мин}}, \quad \frac{n_{2,2}^{*H} + n_{3,3}^{*H}}{n_{2,2}^{*H} + n_{3,3}^{*H} + n_{2,3}^{*H}} > T_{\text{мин}},$$

т. е. в два вида требований:

$$\frac{0,5 \cdot n_{1,1}^{**} + n_{p,p}^{*l}}{0,5 \cdot n_{1,1}^{**} + n_{p,p}^{*l} + n_{1,p}^{*l}} > T_{\text{мин}}, \quad (1)$$

$$\frac{n_{2,2}^{*k,l} + n_{3,3}^{*k,l}}{n_{2,2}^{*k,l} + n_{3,3}^{*k,l} + n_{2,3}^{*k,l}} > T_{\text{мин}} \quad (2)$$

при каждом $p \in [2, 3]$, каждом $k \in \{H, B\}$ и каждом $l \in \{H, B\}$.

Критерий преобразован ввиду наличия трех типов областей «b», каждый из типов « $b_{1,2}^{**}$ » и « $b_{1,3}^{**}$ » представлен двумя равноправными областями, тип « $b_{2,3}^{**}$ » — четырьмя равноправными областями, требования к пустоте каждой из этих областей должны быть выполнены независимо друг от друга.

Для произвольного числа классов требование (1) должно выполняться при каждом $p \in [2, w]$ и каждом $l \in \{H, B\}$, а требование (2) — при каждом $m \in [2, (w-1)]$, каждом $p \in [(m+1), w]$, каждом $k \in \{H, B\}$ и каждом $l \in \{H, B\}$. Критерий преобразован ввиду наличия $\frac{w(w-1)}{2}$ типов областей «b», каждый из типов « $b_{1,2}^{**}$ », ..., « $b_{1,w}^{**}$ » представлен двумя равноправными областями, каждый из типов « $b_{2,3}^{**}$ », ..., « $b_{2,w}^{**}$ », ..., « $b_{(w-1),w}^{**}$ » — четырьмя равноправными областями, требования к пустоте каждой из этих областей должны быть выполнены независимо друг от друга.

2. Критерии проверки того, что каждая из областей «a» и «d» должна содержать предстательное количество точек, при поиске трех классов качества преобразованы в следующие критерии:

$$n_{1,1}^{**}/N \geq \frac{2}{3} \text{ПР}_{\text{мин}}, \quad n_{2,2}^{*H}/N \geq \frac{1}{6} \text{ПР}_{\text{мин}}, \quad n_{2,2}^{*B}/N \geq \frac{1}{6} \text{ПР}_{\text{мин}}, \quad n_{2,2}^{*H}/N \geq \frac{1}{6} \text{ПР}_{\text{мин}}, \quad n_{2,2}^{*B}/N \geq \frac{1}{6} \text{ПР}_{\text{мин}},$$

$$n_{3,3}^{н,н}/N \geq \frac{1}{6} \text{ПР}_{\text{мин}}, \quad n_{3,3}^{н,в}/N \geq \frac{1}{6} \text{ПР}_{\text{мин}}, \quad n_{3,3}^{в,н}/N \geq \frac{1}{6} \text{ПР}_{\text{мин}}, \quad n_{3,3}^{в,в}/N \geq \frac{1}{6} \text{ПР}_{\text{мин}},$$

где $\text{ПР}_{\text{мин}}$ — значение минимальной представительности области «а» при расчете границ для двух классов качества.

То есть на области «а» и «d» наложено два вида требований:

$$n_{1,1}^{*,*}/N \geq \frac{2}{3} \text{ПР}_{\text{мин}} \quad \text{и} \quad n_{p,p}^{k,l}/N \geq \frac{1}{6} \text{ПР}_{\text{мин}},$$

при каждом $p \in [(m+1), 3]$, каждом $k \in \{н, в\}$ и каждом $l \in \{н, в\}$.

Преобразование обусловлено тем, что при выделении трех классов качества образуются три равноправных по представительности типа областей (« $a_{1,1}^{*,*}$ », « $d_{2,2}^{*,*} = \sum_{k \in \{н, в\}} \sum_{l \in \{н, в\}} d_{2,2}^{k,l}$ »

и « $d_{3,3}^{*,*} = \sum_{k \in \{н, в\}} \sum_{l \in \{н, в\}} d_{3,3}^{k,l}$ »). Причем, поскольку области в составе области « $a_{1,1}^{*,*}$ » неразделимы, тре-

бование представительности вынужденно наложено на область в целом, в то время как требование на наполненность областей «d» должно быть наложено на каждую из областей. И, поскольку таких областей четыре для каждого типа области «d», требование к каждой области в четыре раза слабее, чем требование к области « $a_{1,1}^{*,*}$ ».

Для произвольного числа классов требования имеют следующий вид:

$$n_{1,1}^{*,*}/N \geq \frac{2}{w} \text{ПР}_{\text{мин}} \quad \text{и} \quad n_{m,m}^{k,l}/N \geq \frac{1}{2w} \text{ПР}_{\text{мин}},$$

при каждом $m \in [2; w]$, каждом $k \in \{н, в\}$ и каждом $l \in \{н, в\}$.

3. *Критерий проверки количества совместных наблюдений* индикатора и фактора при поиске трех классов качества должен быть преобразован ввиду изменения требований, обусловленного как увеличением числа классов качества, так и одновременным расчетом верхних и нижних границ норм. То есть, исходя из требования к минимальному количеству совместных наблюдений для двух классов качества и требований к минимальной представительности областей «d» при одновременном расчете верхних и нижних границ норм для трех классов качества, можно составить пропорцию

$$N_{\text{мин}}(2 \text{ кл., } 1 \text{ гр.}) \cdot \text{ПР}_{\text{мин}} = N_{\text{мин}}(3 \text{ кл., } 2 \text{ гр.}) \cdot \frac{1}{6} \text{ПР}_{\text{мин}},$$

где $N_{\text{мин}}(2 \text{ кл., } 1 \text{ гр.})$ — минимальное количество совместных наблюдений индикатора и фактора при расчете односторонних границ норм по двум классам качества и $\text{ПР}_{\text{мин}}$ — минимальная представительность области «d» при этом расчете; $N_{\text{мин}}(3 \text{ кл., } 1 \text{ гр.})$ — минимальное количество совместных наблюдений индикатора и фактора при расчете верхних и нижних границ норм по двум классам качества и $\frac{1}{6} \text{ПР}_{\text{мин}}$ — минимальная представительность области «d» при этом расчете.

Для произвольного числа классов критерий принимает вид:

$$N_{\text{мин}}(2 \text{ кл., } 1 \text{ гр.}) \cdot \text{ПР}_{\text{мин}} = N_{\text{мин}}(w \text{ кл., } 2 \text{ гр.}) \cdot \frac{1}{2w} \text{ПР}_{\text{мин}},$$

где $N_{\text{мин}}(w \text{ кл., } 1 \text{ гр.})$ — минимальное количество совместных наблюдений индикатора и фактора при расчете верхних и нижних границ норм по двум классам качества и $\frac{1}{2w} \text{ПР}_{\text{мин}}$ — ми-

нимальная представительность области « d » при этом расчете. Количество совместных наблюдений должно быть выше соответствующего параметра минимального количества совместных наблюдений:

$$N > N_{\min} (w \text{ кл., } 2 \text{ гр.}).$$

4. *Доверительную вероятность результатов* определяют аналогично случаю расчета односторонних границ.

3.4. Полноты факторов для найденных границ

Полноты факторов для найденных границ претерпевают незначительные изменения по сравнению с аналогичными полнотами при расчете односторонних границ для трех классов качества. Суть изменений сводится к тому, что количества наблюдений в областях заменены на количества наблюдений в типах областей.

Заключение

Разработанные алгоритмы реализованы в программном продукте «Программа по установлению границ качественных классов для количественных характеристик систем и установлению взаимосвязи между характеристиками» [Программа по установлению..., 2012].

Описанный в данной работе метод ГКК позволяет решить проблему поиска связи между индикаторными характеристиками и влияющими на них факторами при одновременном действии на индикаторную характеристику множества факторов с преодолением многих возникающих при таком анализе трудностей [Рисник и др., 2015]. Метод ГКК позволяет одновременно и взаимосогласованно рассчитывать границы для произвольного числа классов качества по индикаторной характеристике и факторам среды.

Кроме выявления существенных для неблагоприятия состояния систем факторов и расчета непосредственных значений границ классов качества для индикаторной характеристики и фактора, алгоритм позволяет:

- упорядочить все исследуемые факторы по величине их вклада в «неприемлемость» значений индикаторной характеристики;
- оценить достаточность программы наблюдения за исследуемым объектом и дать необходимые рекомендации по ее сокращению или расширению;
- указать предпочтения в выборе индикаторной характеристики состояния исследуемого объекта.

Поиск связи предложенным методом осуществляют формально, метод отвечает на вопрос, какие связи существуют между исследуемым объектом и воздействующими на него факторами, но не дает ответа на вопрос, почему существуют эти связи. Результаты расчета служат основанием для дальнейшего анализа и интерпретации причин отсутствия или наличия связи.

Список литературы

- Миркин Б. Г. Анализ качественных признаков и структур. — М.: Статистика, 1980. — 319 с.
- Программа по установлению границ качественных классов для количественных характеристик систем и установлению взаимосвязи между характеристиками / И. А. Гончаров, А. П. Левич, Д. В. Рисник. Регистрационный номер в Роспатенте 2012616523 РФ (Программа для ЭВМ). — Зарегистрирована 19.07.2012.
- Рисник Д. В., Левич А. П., Фурсова П. В., Гончаров И. А. Алгоритм метода по расчету границ качественных классов для количественных характеристик систем и по установлению взаимосвязей между характеристиками. Ч. 1. Расчет для двух качественных классов // Компьютерные исследования и моделирование. — 2016. — Т. 8, № 1. — С. 19–36.