Решения задач М2301–М2308, Ф2308–Ф2314,
Kvant, 2013, Number 5, 14–22

и обкладки конденсатора оказались подключенными к медной проволочке длиной $L = 4{,}7$ см с поперечным сечением $S = 10^{-2}\,\text{мм}^2$. Проволочка находится в воздухе при комнатной температуре $t_0 = 20\,^\circ\text{C}$. Что будет показывать идеальный вольтметр через 10 с после подключения проволочки? Необходимые для решения задачи дополнительные данные найдите самостоятельно. При реальном проведении такого эксперимента для безопасности рекомендуется проволочку поместить между листами бумаги. Считайте, что молярная теплоемкость меди (и твердой, и жидкой) не меняется с температурой и равна $3R = 25\ \text{Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})$.

А.Тарчевский

Ф2330*. Длинный ($L = 10$ м) соленоид представляет собой намотанную в один слой на цилиндрический каркас диаметром $D = 0{,}1$ м проволоку прямоугольного сечения с размером сечения $a \times a$ ($a = 0{,}1$ мм). Поверхность проволоки покрыта тонким слоем непроводящего ток лака. Выполняются такие соотношения: $L \gg D \gg a$. Витки проволоки расположены вплотную друг к другу. Концы проволоки выведены перпендикулярно оси симметрии соленоида и далеко-далеко от соленоида подключены к батарейке. По проволоке течет ток I. Вблизи центра соленоида на его внешней поверхности сидит маленький жук. У жука есть совсем маленький компас, и он ползет все время в направлении вектора индукции магнитного поля. Какова форма траектории движения жука по соленоиду? Считая, что длина пути жука от точки старта составила $s = 1$ м, найдите величину перемещения жука.

С.Жуков

Ф2331. Граница раздела областей пространства, в одной из которых есть однородное магнитное поле с индукцией $B = 10$ Тл, а в другой магнитного поля нет, представляет собой плоскость. Естественно, что вектор $\vec{B}$ параллелен этой границе раздела. Из области, где поля нет, в область с магнитным полем влетает электрон с зарядом e. Его скорость в момент пересечения границы перпендикулярна вектору $\vec{B}$, составляет угол α с плоскостью границы раздела и величина скорости много меньше скорости света. Движущийся в магнитном поле с ускорением a электрон излучает, и мощность электромагнитных волн – так называемого синхротронного излучения – пропорциональна квадрату произведения величины заряда на величину ускорения, деленного на скорость света: $W = \delta(ea/c)^2$. Коэффициент пропорциональности обозначен символом δ, он имеет размерность электрического сопротивления и равен $\delta = 20$ Ом. При каком значении угла α электрон не покинет область с магнитным полем?

Для справки: в Международной системе единиц (СИ) мощность излучения заряда q, движущегося с ускорением a, равна

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a^2q^2}{3c^3}.$$

Д.Сергеев

Ф2332. Центр квадрата со стороной 1 см находится на главной оптической оси тонкой линзы. Действительное изображение квадрата, которое создает линза, – это трапеция, параллельные стороны которой перпендикулярны главной оптической оси линзы, пересекают ее и имеют длины 2 см и 3 см. Каково расстояние между этими сторонами трапеции?

Е.Кузнецов

Решения задач М2301–М2308, Ф2308–Ф2314

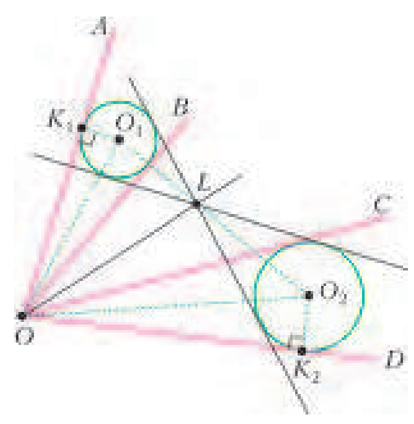
М2301. *Дана числовая последовательность 1, −2, −3, 4, 5, 6, −7, −8, −9, −10, 11, 12, 13, 14, 15, −16, … (эта последовательность получается из последовательности 1, 2, 3, 4, … расстановкой знаков: одно число со знаком «+», затем два числа со знаком «−» три числа со знаком «+», четыре числа со знаком «−», и т.д.). Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что сумма первых n членов этой последовательности равна 0.*

Разделим числа данной последовательности на группы: (1, −2, −3, 4); (5, 6, −7, −8, −9, −10, 11, 12); (13, 14, 15, −16, −17, −18, −19, −20, −21, 22, 23, 24); … Здесь k-я группа устроена так: берем $4k$ последовательных натуральных чисел и у средних $2k$ чисел меняем знак с «+» на «−». Таким образом, в одной группе среднее арифметическое средних $2k$ чисел противоположно среднему арифметическому крайних $2k$ чисел, а значит, сумма всех чисел в одной группе равна 0.
Это означает, что для любого n вида $4(1 + 2 + \ldots + k) = 2k(k+1)$ сумма первых n членов этой последовательности равна 0.
Нетрудно убедиться, что кроме найденных n других значений n, удовлетворяющих условию задачи, не существует.

В.Расторгуев

М2302. *Внутри угла AOD проведены лучи OB и OC, причем $\angle AOB = \angle COD$. В углы AOB и COD вписаны непересекающиеся окружности. Докажите, что точка пересечения общих внутренних касательных к этим окружностям лежит на биссектрисе угла AOD.*

Пусть O_1 и O_2 – центры окружностей, R_1 и R_2 – их радиусы, а L – точка пересечения касательных (см. рисунок). Заметим, что L лежит на отрезке O_1O_2. Так как $\angle AOB = \angle COD$, то достаточно показать, что OL – биссектриса угла O_1OO_2. Поскольку окружности гомотетичны с центром L, то $\frac{O_1L}{O_2L} = \frac{R_1}{R_2}$. С другой стороны, из подобия прямоугольных треугольников OO_1K_1 и OO_2K_2 (где K_1 и K_2 – точки касания окруж-



ностей с лучами OA и OD) следует $\frac{OO_1}{OO_2} = \frac{R_1}{R_2}$. Получаем $\frac{O_1L}{O_2L} = \frac{OO_1}{OO_2}$, откуда следует, что OL – биссектриса в треугольнике O_1OO_2.

Замечание. В данной конструкции можно рассматривать точку пересечения общих внешних касательных к окружностям. Она будет лежать на внешней биссектрисе угла AOD.

Ф.Нилов

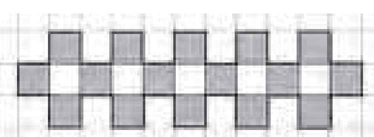
М2303. *На бесконечной клетчатой плоскости клетки раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Дан многоугольник периметра P и площади S, все стороны которого идут по линиям сетки. Докажите, что этот многоугольник содержит не более $\frac{S}{2} + \frac{P}{8}$ черных клеток.* [1]

Обозначим через B и W, соответственно, количества черных и белых клеток, принадлежащих многоугольнику. Сумма периметров всех черных клеток равна $4B$, а всех белых – $4W$. Заметим, что каждый единичный отрезок границы одной из черных клеток многоугольника либо является также отрезком границы некоторой белой клетки многоугольника, либо выходит на границу многоугольника (т.е. входит в его периметр). Отсюда

$$4B \le 4W + P \Leftrightarrow 8B \le 4B + 4W + P \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B \le \frac{B+W}{2} + \frac{P}{8},$$

что и требовалось доказать.



Отметим, что имеются многоугольники (см. рисунок), для которых оценка, указанная в задаче, точна.

А.Магазинов

М2304. *Через $s(n)$ обозначим сумму цифр в двоичной записи натурального числа n. Например, $s(2013) = 9$, поскольку 2013 имеет двоичную запись 11111011101 (т.е. $2013 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0$). Натуральное число n назовем счастливым, если $s(n) = s(3n)$.*

а) Докажите, что существует бесконечно много пар подряд идущих счастливых чисел.

б) Докажите, что не существует трех подряд идущих счастливых чисел.

Ниже используем следующие свойства суммы цифр $s(n)$:

1) $s(2n) = s(n)$ (поскольку двоичная запись числа $2n$ получается из двоичной записи числа n приписыванием 0 справа);

n	$3n$	дв. запись n	дв. запись $3n$	$s(n)$	$s(3n)$
$8m$	$8(3m)$	$\overline{m000}$	$\overline{(3m)000}$	$s(m)$	$s(3m)$
$8m+1$	$8(3m)+3$	$\overline{m001}$	$\overline{(3m)011}$	$s(m)+1$	$s(3m)+2$
$8m+2$	$8(3m)+6$	$\overline{m010}$	$\overline{(3m)110}$	$s(m)+1$	$s(3m)+2$
$8m+3$	$8(3m+1)+1$	$\overline{m011}$	$\overline{(3m+1)001}$	$s(m)+2$	$s(3m+1)+1$
$8m+4$	$8(3m+1)+4$	$\overline{m100}$	$\overline{(3m+1)100}$	$s(m)+1$	$s(3m+1)+1$
$8m+5$	$8(3m+1)+7$	$\overline{m101}$	$\overline{(3m+1)111}$	$s(m)+2$	$s(3m+1)+3$
$8m+6$	$8(3m+2)+2$	$\overline{m110}$	$\overline{(3m+2)010}$	$s(m)+2$	$s(3m+2)+1$
$8m+7$	$8(3m+2)+5$	$\overline{m111}$	$\overline{(3m+2)101}$	$s(m)+3$	$s(3m+2)+2$

2) $s(m+n) \le s(m) + s(n)$, причем неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда сложение $m + n$ «столбиком» происходит без переноса разрядов (это следует из процедуры сложения столбиком).

а) Заметим, что при любом $k \ge 2$ число $n = 2^k - 1$ (имеющее двоичную запись $\underbrace{11\ldots1}_{k}$) – счастливое. Действительно, $3n$ имеет двоичную запись $10\underbrace{11\ldots1}_{k-2}01$, таким образом, $s(n) = s(3n) = k$.

Отсюда следует, что при любом $k \ge 3$ числа $2^k - 2 = 2\left(2^{k-1} - 1\right)$ и $2^k - 1$ образуют пару подряд идущих счастливых чисел.

б) Докажем, что если числа n и $n + 1$ – счастливые, то $n \equiv 1 \pmod 8$ или $n \equiv 6 \pmod 8$.[1] Отсюда, очевидно, будет следовать утверждение пункта б) (действительно, если три числа n, $n + 1$, $n + 2$ – счастливые, то каждое из чисел n и $n + 1$ должно давать остаток 1 или 6 при делении на 8, что невозможно).

Выпишем $s(n)$ и $s(3n)$ в зависимости от остатка при делении n на 8 в таблицу. Запишем условия того, что числа n и $n + 1$ оба являются счастливыми:

$$\begin{cases} s(n) = s(3n), \\ s(n+1) = s(3(n+1)). \end{cases} \qquad (*)$$

При $n = 8m$ условия $(*)$ приводят к равенствам (см. таблицу)

$$\begin{cases} s(m) = s(3m), \\ s(m) + 1 = s(3m) + 2 \end{cases}$$

– противоречие.

При $n = 8m + 2$ имеем

$$\begin{cases} s(m) + 1 = s(3m) + 2, \\ s(m) + 2 = s(3m+1) + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s(3m) + 2 = s(3m+1) \le s(3m) + 1$$

– противоречие.

При $n = 8m + 3$:

$$\begin{cases} s(m) + 2 = s(3m+1) + 1, \\ s(m) + 1 = s(3m+1) + 1 \end{cases}$$

– противоречие.

---

[1] В условии этой задачи была допущена ошибка: вместо $\frac{P}{8}$ было напечатано $\frac{P}{2}$. Приносим свои извинения.

[1] Обе возможности реализуются: вторая – в пункте а), а первая – скажем, при $n = 89$.

При $n = 8m + 4$:

$$\begin{cases} s(m) + 1 = s(3m+1) + 1, \\ s(m) + 2 = s(3m+1) + 3 \end{cases}$$

– противоречие.

При $n = 8m + 5$:

$$\begin{cases} s(m) + 2 = s(3m+1) + 3, \\ s(m) + 2 = s(3m+2) + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s(3m+1) + 2 = s(3m+2) \le s(3m+1) + 1$$

– противоречие.

Остается рассмотреть случай $n = 8m + 7$. Пусть k – количество единиц в конце десятичной записи числа n $(k \ge 3)$, т.е. двоичная запись числа n имеет вид $t\underbrace{11\ldots111}_{k}$, где t оканчивается на 0 или $t = 0$. Тогда $n + 1 = (t+1)\cdot 2^k$, $3(n+1) = (3t+3)\cdot 2^k$, $3n = (3t+2)\cdot 2^k + (2^k - 3)$. Двоичная запись числа $3n$ имеет вид $(3t+2)\underbrace{11\ldots1}_{k}01$. Условия (∗) записываются так:

$$\begin{cases} s(t) + k = s(3t+2) + (k-1), \\ s(t+1) = s(3t+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s(t) + 1 = s(3t+2), \\ s(t+1) = s(3t+3). \end{cases}$$

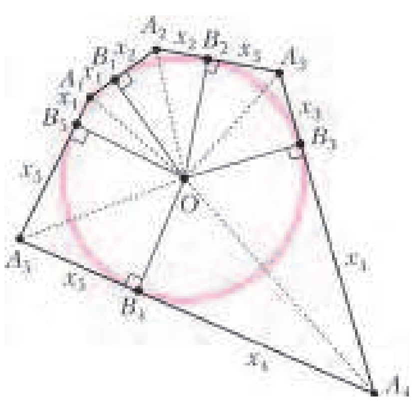
Но так как t четно, то $s(t+1) = s(t) + 1$ и $s(3t+3) = s(3t+2) + 1$. Отсюда видно, что последняя система противоречива.

А.Устинов

M2305. *По кругу расставлены 99 положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$. Известно, что если выбрать из них несколько чисел, среди которых нет двух соседних, то их сумма будет меньше, чем сумма оставшихся чисел. Докажите, что существует единственный (с точностью до движения) описанный 99-угольник, последовательные стороны которого равны $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$.*

Ниже будем вместо 99 писать $2n + 1$ (утверждение задачи верно для многоугольников с нечетным числом сторон).

Пусть $A_1A_2\ldots A_{2n+1}$ – искомый $(2n+1)$-угольник, т.е. длина стороны A_iA_{i+1} равна a_i для $i = 1, 2, \ldots, 2n+1$ (здесь и далее индексы, отличающиеся на $2n + 1$, считаем одинаковыми), пусть он описан вокруг окружности радиуса r с центром в точке O (см. рисунок).



Обозначим через B_i точку касания стороны A_iA_{i+1} с окружностью. Пусть x_i – длина отрезка касательной, проведенной из точки A_i к окружности, т.е. $x_i = A_iB_i = A_iB_{i-1}$.[1] Так как $A_iA_{i+1} = A_iB_i + B_iA_{i+1}$, то $a_i = x_i + x_{i+1}$ для $i = 1, 2, \ldots, 2n+1$. Из этих равенств получаем

$$2x_1 = (x_1 + x_2) - (x_2 + x_3) + (x_3 + x_4) - \ldots + (x_{2n+1} + x_1) =$$

$$= a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + a_{2n+1}.$$

Значит, x_1 однозначно выражается через a_1, a_2, …, a_{2n+1}, причем знакопеременная сумма $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + a_{2n+1}$ положительна, так как по условию задачи $a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n} < a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}$. Аналогично, $x_2, \ldots, x_{2n+1}$ положительны и однозначно выражаются через a_1, a_2, …, a_{2n+1}.

Теперь докажем, что и r однозначно определяется числами $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$. Положим $\alpha_i = \angle B_{i-1}OB_i$. Из пары равных прямоугольных треугольников A_iOB_{i-1} и A_iOB_i получаем $\alpha_i = 2\operatorname{arctg}\frac{x_i}{r}$. Так как $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n+1} = 2\pi$, то r удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{arctg}\frac{x_1}{r} + \operatorname{arctg}\frac{x_2}{r} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{x_{2n+1}}{r} = \pi. \qquad (*)$$

Если считать $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ фиксированными числами, то в левой части равенства (∗) стоит функция $g(r)$, которая строго убывает на промежутке $(0; \infty)$, поэтому уравнение $g(r) = 0$ имеет не более одного решения. Если искомое значение r, удовлетворяющее уравнению (∗), нашлось, то по длинам $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и r однозначно восстанавливаются прямоугольные треугольники A_iOB_{i-1} и A_iOB_i $(i = 1, 2, \ldots, 2n+1)$, а с ними – и вся конструкция: последовательно прикладываем треугольники друг к другу; в силу равенства (∗), после прохождения полного круга, процесс выкладывания замкнется. В результате восстанавливается единственный искомый многоугольник.

Чтобы установить существование решения уравнения (∗) (а с ним и существование искомого многоугольника), остается добавить соображение непрерывности. Равенству (∗) удовлетворяет единственное положительное $r = r_0$, так как функция $g(r)$ непрерывна на промежутке $(0; \infty)$ и, кроме того,

$$\lim_{r \to 0+0} g(r) = (2n+1)\frac{\pi}{2} > \pi, \quad \lim_{r \to +\infty} g(r) = 0 < \pi.$$

Л.Емельянов, П.Кожевников

M2306*. *Для натурального числа a определим последовательность целых чисел $x_1, x_2, \ldots$ следующим образом: $x_1 = a$, $x_{n+1} = 2x_n + 1$ при $n \ge 1$. Положим $y_n = 2^{x_n} - 1$. Найдите наибольшее возможное k такое, что для некоторого натурального a каждое из чисел $y_1, \ldots, y_k$ является простым.*

Ответ: 2.

[1] Используя только равенство отрезков касательных, несложно увидеть, что указанное в задаче условие является необходимым условием существования искомого $(2n + 1)$-угольника.

Если $x_i = 1$, то $y_i = 1$ – не простое. Если x_i составное, скажем $x_i = kl$, где $k > 1$ и $l > 1$ – натуральные, то $y_i = 2^{kl} - 1$ делится на $2^k - 1$ (и очевидно больше, чем $2^k - 1$). Итак, далее считаем, что $x_1, \ldots, x_k$ – простые числа.

Если $x_1 = 2$, то $y_1 = 3$, $y_2 = 31$ – простые числа, а $y_3 = 2^{11} - 1$ делится на 23; тем самым мы получили пример для $k = 2$.

Остается доказать, что $k \le 2$, если x_1 – нечетное простое число.

Предположим противное, тогда все числа $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ – нечетные простые. Так как x_1 нечетно, имеем $x_2 = 2x_1 + 1 \equiv 3 \pmod 4$, и $x_3 = 2x_2 + 1 \equiv 7 \pmod 8$. Воспользуемся известным результатом о том, что для простого числа p вида $8k + 7$ остаток 2 является квадратичным вычетом [1], т.е. найдется такое целое s, что $s^2 \equiv 2 \pmod p$. В нашем случае (для $p = x_3$) имеем

$$2^{x_2} \equiv 2^{(p-1)/2} \equiv \left(s^2\right)^{(p-1)/2} \equiv s^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

(очевидно, s не делится на p, поэтому последний переход вытекает из малой теоремы Ферма). Таким образом, $y_2 = 2^{x_2} - 1$ делится на $p = x_3 = 2x_2 + 1$. Но $x_2 = 2x_1 + 1 > 3$, поэтому $2^{x_2} - 1 > 2x_2 + 1$ (это легко показать, например, индукцией по x_2). Получаем, что y_2 – составное число. Противоречие.

В.Сендеров

M2307*. *В вершинах правильного 2n-угольника расставлены 2n различных фишек так, что в каждой вершине стоит ровно одна фишка. Ход состоит в следующем: выбирается одна из сторон 2n-угольника и две фишки, находящиеся в концах этой стороны, меняются местами друг с другом. После конечного числа ходов оказалось, что каждая пара фишек менялась местами ровно один раз. Докажите, что некоторая сторона 2n-угольника не выбиралась ни разу.*

Занумеруем все фишки в начальной расстановке по порядку по часовой стрелке; соответственно обозначим вершины $2n$-угольника $A_1, \ldots, A_{2n}$, так что вначале фишка i стояла в вершине A_i.

Будем говорить, что во время хода фишка *прошла по стороне e*, если до хода она стояла в одном конце отрезка e, а после хода оказалась в другом конце.

Шаг 1. Рассмотрим любые три фишки i, j, k. В каждый момент их циклический порядок может быть либо i, j, k, либо i, k, j (считая от i по часовой стрелке). Этот порядок изменяется в точности тогда, когда две из этих трех фишек меняются местами. Значит, этот циклический порядок был изменен трижды, поэтому конечный циклический порядок отличен от начального. Применив это наблюдение для $i \in \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$, $j = i + 1$ и всех $k \ne i, i+1$, получаем, что в конечной расстановке все фишки (кроме i и $i + 1$) лежат на дуге описанной окружности, проходимой от i к $i + 1$ по часовой стрелке, т.е. $i + 1$ – соседняя фишка для i против часовой стрелки. Тем самым, в конечной расстановке фишки занумерованы последовательно, но против часовой стрелки.

Это означает, что конечная расстановка фишек получается из начальной путем отражения относительно какой-то оси симметрии l.

Шаг 2. Заметим, что каждая фишка участвует в $2n - 1$ обменах, поэтому ее начальная и конечная вершины имеют номера разной четности. Следовательно, l проходит через середины двух противоположных сторон $2n$-угольника (а не через две противоположные вершины); не умаляя общности будем считать, что это стороны $a = A_{2n}A_1$ и $b = A_nA_{n+1}$ (рис. 1).

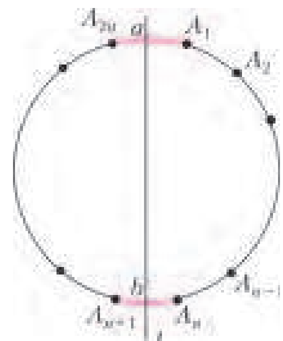


Рис. 1

За время всего процесса каждая фишка проходит хотя бы по одной из сторон a, b (так как в начальной и конечной расстановках фишка находится по разные стороны от l). Предположим, что некоторая фишка x (без ограничения общности считаем, что $x \le n$) прошла как по стороне a, так и по стороне b и что по стороне a она прошла раньше. Тогда общее перемещение фишки x состоит по меньшей мере из: (i) движения из вершины A_x в A_1 и перехода в A_{2n} по стороне a; (ii) движения от A_{2n} до A_n или A_{n+1} и перехода через l по стороне b; (iii) оставшегося пути до вершины A_{2n+1-x}. На это потребуется по крайней мере $x + n + (n - x) = 2n$ ходов, что невозможно.

Итак, каждая фишка проходила ровно по одной из сторон a и b.

Шаг 3. Наконец, покажем, что либо все фишки проходили по стороне a, либо все фишки проходили по стороне b, это и будет означать, что одна из сторон a, b не выбиралась ни разу.

Предположим противное. Рассмотрим первые за время всего процесса ходы по ребрам a и b, и пусть соответственно x и y – фишки, которые двигались по часовой стрелке во время этих ходов (т.е. фишка x прошла по ребру a из вершины A_{2n} в A_1, а фишка y – по ребру b из A_n в A_{n+1}). Согласно шагу 2, в начальной расстановке фишки x и y были в разных полуплоскостях относительно l (в частности, $x \ne y$). Рассмотрим (единственный) обмен фишек x и y; без ограничения общности считаем, что он сделан в правой полуплоскости относительно l. С момента этого обмена фишки x и y все время находятся в правой полуплоскости относительно l (рис. 2), так как x никогда не проходит через

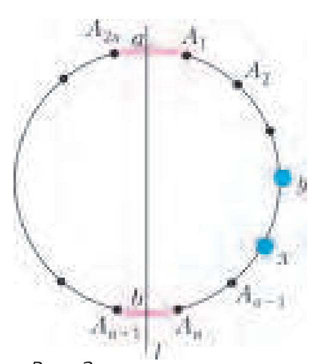


Рис. 2

[1] О квадратичных вычетах (помимо стандартных курсов теории чисел) можно прочитать в статье С.Гиндикина «Золотая теорема» («Квант» № 1 за 1973 г.) или в статье А.Спивака «Квадратичный закон взаимности» (Библиотечка «Квант», вып. 102). Совсем недавно, в прошлом номере «Кванта», мы использовали квадратичные вычеты в решении другой трудной задачи – М2300.

ребро b, y никогда не проходит через ребро a и x и y не могут обменяться друг с другом вторично. Но это невозможно, поскольку фишка y должна в конечной расстановке оказаться в левой полуплоскости относительно l. Противоречие.

Замечание. Утверждение задачи для $(2n-1)$-угольника также верно, и доказать его проще (так как некоторые шаги становятся лишними). Наметим соответствующий путь решения для случая $(2n-1)$-угольника. Доказываем существование прямой l из шага 1. Эта прямая проходит через некоторую вершину A и через середину противоположной стороны a. Тогда каждая фишка либо посетит вершину A, либо пройдет по стороне a (но не одновременно – это показывается так же, как в шаге 2). Наконец, так как каждая фишка участвует в четном числе ходов, она на самом деле именно посетит вершину A, но никогда не пройдет через сторону a. Тем самым, сторона a ни разу не выбиралась.

И.Богданов, А.Грибалко

М2308*. *Дан описанный четырехугольник $ABCD$. Окружности ω_1 и ω_2 вписаны в треугольники ABC и ADC соответственно.*

а) Диагональ BD пересекает окружность ω_1 в точках E и P, а окружность ω_2 – в точках F и Q так, что точки P и Q лежат на отрезке EF. Докажите, что касательная к ω_1, проведенная в точке E, и касательная к ω_2, проведенная в F, пересекаются на прямой AC или параллельны.

б) Окружность Ω касается окружностей ω_1 и ω_2 внутренним образом в точках K и L соответственно. Докажите, что прямые BK и DL пересекаются на прямой AC.

Ниже будем пользоваться следующими известными фактами.

1) Выпуклый четырехугольник $ABCD$ является описанным тогда и только тогда, когда вписанные окружности треугольников ABC и ADC касаются.

2) Если три окружности попарно касаются друг друга в трех различных точках, то их попарные общие касательные пересекаются в одной точке или параллельны (это частный случай более общего факта о том, что попарные *радикальные оси* трех окружностей пересекаются в одной точке или параллельны).

3) Теорема *о трех гомотетиях*: композиция гомотетий с центрами O_1 и O_2 ($O_1 \neq O_2$) и коэффициентами k_1 и k_2 такими, что $k_1k_2 \neq 1$, является гомотетией с центром в точке на прямой O_1O_2 и коэффициентом k_1k_2.

Приступим к доказательству утверждений задач. Пусть ω – вписанная окружность четырехугольника $ABCD$, а окружности ω_1 и ω_2 касаются диагонали AC в точке X.

а) Достаточно доказать, что существует окружность Ω, которая касается окружностей ω_1 и ω_2 внутренним образом в точках E и F соответственно (рис. 1).[1]

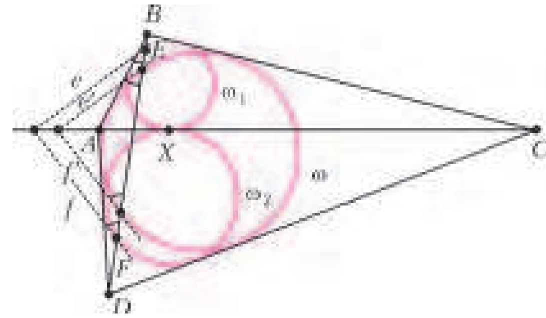


Рис. 1

Действительно, тогда касательная e к ω_1 в точке E, касательная f к ω_2 в точке F и прямая AC являются попарными общими касательными к окружностям ω_1, ω_2 и Ω, и, значит, они пересекаются в одной точке либо параллельны.

При гомотетии, переводящей ω_1 в ω, касательная e переходит в касательную e'. Аналогично, при гомотетии, переводящей ω_2 в ω, касательная f переходит в касательную f'. Касательные e' и f' составляют равные углы с прямой BD, следовательно, прямые e и f обладают тем же свойством. Значит, в угол между прямыми e и f можно вписать окружность Ω, касающуюся этих прямых в точках E и F.[2]

б) Пусть H – центр гомотетии h с положительным коэффициентом, переводящей ω в Ω (рис. 2). Гомотетия h является композицией гомотетии с центром B,

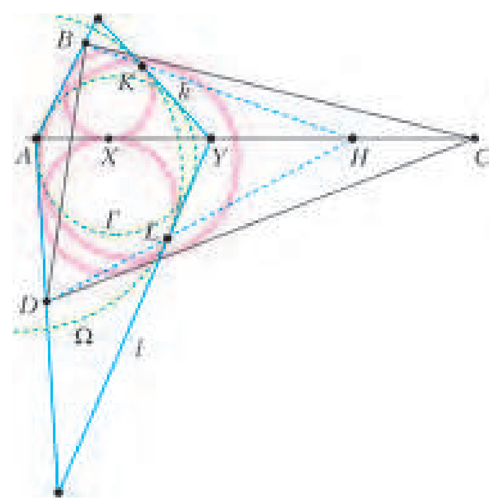


Рис. 2

переводящей ω в ω_1, и гомотетии с центром K, переводящей ω_1 в Ω, значит, H лежит на прямой BK. Аналогично, H лежит и на прямой DL. Таким образом, в задаче нам нужно доказать, что H лежит на прямой AC.

Пусть k – касательная к ω_1, проведенная в точке K, а l – касательная к ω_2, проведенная в точке L. Тогда k, l и AC – попарные общие касательные к окружностям ω_1, ω_2 и Ω, значит, k и l пересекаются в некоторой

[1] Здесь мы видим, что эта конструкция является частным случаем конструкции, которая рассматривается в пункте б).

[2] Отметим, что e' и f' тоже пересекаются на прямой AC или параллельны, хотя в решении это не использовалось.

точке Y прямой AC (пусть, для определенности, Y лежит на луче XC) либо $k \| l \| AC$.

Рассмотрим первый случай. Согласно факту 1), в выпуклый четырехугольник, образованный прямыми AB, AD, k, l, можно вписать окружность Γ. Получаем, что h является композицией гомотетии с центром A, переводящей ω в Γ, и гомотетии с центром Y, переводящей Γ в Ω, значит, H лежит на прямой AY (которая совпадает с AC).

Остается разобрать частный случай $k \| l \| AC$. В этом случае гомотетия с центром B, переводящая ω_1 во вневписанную окружность γ_1 треугольника ABC, переводит K в точку касания Z окружности γ_1 и AC. Получаем, что прямая BK проходит через точку Z, симметричную точке X относительно середины AC. Аналогично показываем, что прямая DL проходит через ту же точку Z.

И.Богданов, С.Ильясов, П.Кожевников

Ф2308. *На поиски упавшего самолета за месяц поисков было израсходовано 30 миллионов рублей, в поисках участвовали сотни людей, а упавший самолет так и не нашли. Через год он был обнаружен случайно на расстоянии L = 10 км от аэродрома, с которого взлетел и на который намеревался вернуться. Один час полета беспилотного летательного аппарата – БПЛА – стоит 1 тысячу рублей. За светлое время суток такой самолет может отработать до 8 часов. Самолет летит со скоростью v = 100 км/ч на высоте H = 1 км и производит съемку местности видеокамерой с углом обзора $\alpha = 60°$ (по $30°$ вправо и влево). Как скоро можно было бы обнаружить пропавший самолет с помощью БПЛА и в какую сумму обошлись бы поиски?*

Ширина полосы, которую сканирует при полете БПЛА, составляет

$$2H \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \approx 1{,}15 \text{ км}.$$

Полосы должны частично перекрываться, поэтому будем считать ширину обзора равной 1 км, т.е. равной высоте полета H. Пренебрежем размерами территории, которую занимает сам аэродром. Если самолет летит по спирали, осматривая территорию под собой, то за $t = 8$ ч полета в сутки он за k суток сможет осмотреть площадь

$$S = ktHv.$$

При этом осмотренная территория имеет примерно форму круга, радиус которого с центром на аэродроме находится так:

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{\frac{ktHv}{\pi}}.$$

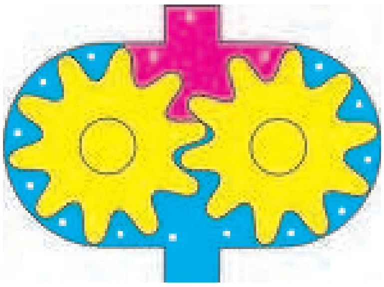
Подставим в эту формулу $R = L$ и получим

$$k = \frac{\pi L^2}{tHv} = \frac{\pi}{8} \text{ суток}.$$

Следовательно, пропавший самолет был бы найден уже через девять с небольшим часов полета БПЛА. Потраченная сумма на полет составила бы 9 тысяч рублей, т.е. 0,03% от 30 миллионов. Даже если бы пропавший самолет находился на расстоянии 50 км от аэродрома и времени на поиски потребовалось бы в 25 раз больше, то он был бы найден к концу десятых суток поисков. При этом была бы израсходована сумма около 250 тысяч рублей, составляющая меньше 0,83% от 30 миллионов.

С.Беспилотник

Ф2309. *Шестеренчатый насос (см. рисунок) предназначен для перекачки масла под давлением и передачи мощности к гидравлическим механизмам. Число зубьев каждой шестерни N = 10, высота зубьев h = 1 см. Каждый зуб имеет форму, близкую к правильному (равностороннему) треугольнику. Ширина шестерен L = 3 см, расстояние d от вершин зубьев до стенок корпуса весьма мало: $d = 10^{-4}$ м. Шестерни вращаются с частотой f = 25 Гц. Считая масло несжимаемым, маловязким и имеющим плотность $\rho = 10^3$ кг/м^3, найдите теоретическую максимальную мощность, которую может передать этот насос к потребителям (гидравлическим механизмам), а также теоретическую максимальную разницу давлений на выходе и на входе насоса.*



Если, например, левая шестерня вращается по часовой стрелке, то правая вращается против часовой стрелки, и масло из нижнего резервуара перекачивается в верхний порциями, которые находятся между зубьями шестерен и корпусом насоса в полостях – «карманах», объем каждого из которых равен примерно $Lh^2/\sqrt{3}$. Радиус R шестерен, т.е. расстояние от оси шестерни до вершин зубьев, равен примерно $R = hN/(\pi\sqrt{3})$. Скорость движения вершин зубьев равна

$$v = 2\pi fR = \frac{2fhN}{\sqrt{3}}.$$

В режиме «холостого хода», когда масло перекачивается без повышения давления, объем перекачиваемого масла в секунду (расход масла) равен

$$G = \frac{2NfLh^2}{\sqrt{3}}.$$

Если насос работает с нагрузкой, то давление в верхнем резервуаре больше давления в нижнем резервуаре. Пусть эта разница давлений равна p. Предположим, что в месте сцепления зубьев шестерен никакого зазора нет. Тогда поток масла навстречу движению зубьев возникает только через узкие щели между корпусом и вершинами зубьев. В соответствии с данным рисунком насоса примерно половина вершин зубьев каждой из шестерен располагается на расстоянии d от корпуса. Скорость движения масла в каждом из зазоров по отношению к соседним зубьям, т.е. $u_{\text{отн}}$, находится из условия

$$\frac{(u_{\text{отн}})^2\rho}{2} = \frac{p}{(N/2)}.$$

Когда обратный поток масла сравняется с потоком масла в прямом направлении, будет достигнута максимальная величина разницы давлений $p_{\max}$, которую может создавать шестеренчатый насос. Иными словами,

$$2(u_{\text{отн}} - v)dL = G,$$

или

$$2\left(\sqrt{\frac{4p_{\max}}{\rho N}} - \frac{2fhN}{\sqrt{3}}\right)dL = \frac{2NfLh^2}{\sqrt{3}}.$$

Поскольку $h/d \gg 2$, отсюда следует

$$p_{\max} \approx \frac{\rho N^3 f^2 h^4}{12d^2} \approx 5\cdot 10^7 \text{ Па} = 500 \text{ атм}.$$

Для нахождения максимальной мощности, которую может передавать такой насос потребителям, нужно найти экстремум функции давления

$$W(p) = p\cdot 2L\left(\frac{Nfh^2}{\sqrt{3}} + \frac{2fhNd}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{4p}{\rho N}}d\right) \approx$$

$$\approx p\cdot 2L\left(\frac{Nfh^2}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{4p}{\rho N}}d\right).$$

Экстремум достигается при давлении

$$p \approx \left(\frac{2}{3}\right)^2 p_{\max} \approx 220 \text{ атм}.$$

Этому соответствует теоретическая максимальная мощность

$$W_{\max}(p) \approx 11 \text{ кВт}.$$

При такой максимальной мощности, достающейся потребителям, и при таком давлении примерно такая же мощность теряется на нагрев масла и насоса, т.е. механический КПД насоса в этом режиме близок к 50%. Поэтому реальные насосы работают на меньшем давлении – порядка 100 атм. В этом случае мощность немного меньше, а КПД насоса значительно выше.

С.Дмитриев

Ф2310. *На горизонтальной поверхности стола разлито масло, которое образует тонкий слой толщиной $d = 1$ мм. Поверх масла лежит тонкий лист бумаги размером $a\times a = 1\times 1$ м. Одна из сторон квадратного листа бумаги немного выступает за край стола и параллельна ему. Бумага сначала неподвижна. Выступающую часть бумаги потянули с силой $F = 1$ Н, направленной горизонтально и перпендикулярно этому краю стола. Через какое время за край стола будет выступать половина листа бумаги? Вязкость масла $\eta = 1$ Па·с.*

Предположим, что при движении листа бумаги масло между бумагой и столом движется ламинарно. Сила f, действующая со стороны масла на бумагу, определяется вязкостью масла, толщиной слоя масла, площадью контакта масла и бумаги, а также скоростью движения бумаги относительно стола:

$$f = -\frac{vS\eta}{d}.$$

Если бумага сместилась от своего начального положения на расстояние x, то

$$S = a(a-x).$$

Скорость перемещения бумаги вдоль стола будет определяться балансом сил, которые на нее действуют. Поскольку в условии сказано, что бумага легкая и толщина слоя масла небольшая, то можно применить второй закон Ньютона в виде

$$F + f = 0.$$

Отсюда находим

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{Fd}{\eta a(a-x)}.$$

Введем новую переменную $y = x - a$. Тогда уравнение для скорости примет вид

$$y\frac{dy}{dt} = \frac{d\left(y^2/2\right)}{dt} = -\frac{Fd}{\eta a}.$$

Решение этого уравнения соответствует соотношению

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{tFd}{\eta a} + \text{const}.$$

Значение константы находится из начального условия: при $t = 0$ $x = 0$ и $y = -a$, откуда $\text{const} = \frac{a^2}{2}$. Подставив в полученное соотношение конечное значение $y = a/2 - a = -a/2$, найдем

$$t = \frac{3a^3\eta}{8Fd} = 375 \text{ с} = 6{,}25 \text{ мин}.$$

В.Сергеев

Ф2311. *Воздушный шарик с тонкой резиновой оболочкой имеет в воздухе при температуре 0 °C объем $V = 1$ л. Этот шарик опускают в глубокий сосуд с горячей водой при температуре 90 °C на глубину $H = 2$ м. Какую максимальную и какую минимальную работу при таком перемещении может совершить при нагревании воздух, содержащийся в шарике? Температура газа не убывает, а глубина погружения шарика в воду не уменьшается. Давлением, создаваемым резиновыми стенками шарика, можно пренебречь, атмосферное давление нормальное: $p = 10^5$ Па.*

Сначала переведем шкалу температур в шкалу Кельвина: $T_{\text{н}} = 0\ ^\circ\text{C} = 273$ К, $T_{\text{к}} = 90\ ^\circ\text{C} = 363$ К. В координатах p, V начальное и конечное состояния шарика изображаются точками $p_{\text{н}}, V_{\text{н}}$ и $p_{\text{к}}, V_{\text{к}}$, где

$$p_{\text{к}} = p_{\text{н}} + \rho gH = 1{,}2p_{\text{н}}, \quad V_{\text{к}} = \frac{V_{\text{н}}T_{\text{к}}p_{\text{н}}}{T_{\text{н}}p_{\text{к}}} = 1{,}11V_{\text{н}}.$$

Здесь $\rho = 965{,}3$ кг/м^3 – плотность воды при $90\ °C$. При условии, что воздух в шарике не может охлаждаться, т.е. его температура не может уменьшаться, нужно выбрать такие «траектории» на плоскости pV, «пройдя» по которым газ совершит: а) самую большую работу; б) самую маленькую работу. Поскольку ничего, кроме шарика и сосуда с горячей водой, нет, то существуют только два возможных процесса: опускание шара на глубину (увеличение давления) и нагрев газа через стенки шарика от горячей воды. Эти два процесса могут проводиться в различной последовательности и за разные промежутки времени.

Случай а) получается, если шарик с воздухом при температуре $0\ °C$ сначала *быстро* опустили на глубину 2 м под воду и воздух в нем нагрелся за счет адиабатического сжатия до конечного давления и занял объем $0{,}71V_н = V_н \cdot (p_н/p_к)^{1/\gamma}$. Поскольку воздух двухатомный газ, $\gamma = C_p/C_V = 7/5$. А затем воздух *медленно* нагрелся изобарически до конечного значения объема. Красными линиями со стрелками на рисунке 1

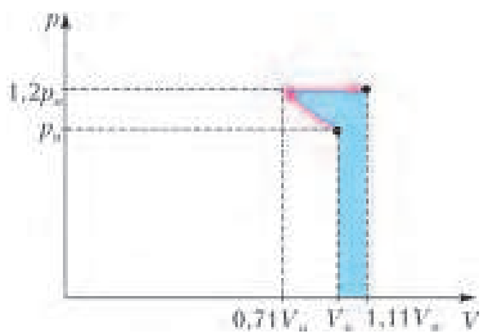


Рис. 1

показаны соответствующие участки процесса. Площадь фигуры, закрашенной на рисунке синим цветом, пропорциональна максимальной работе газа.

Случай б) реализуется, если шарик сначала приведен в соприкосновение с горячей водой и *медленно* нагревается до конечной температуры изобарически при атмосферном давлении, при этом максимальный объем шарика равен $V_н T_к/T_н = 1{,}33V_н$. А затем *медленно* погружается в воду, при этом температура газа остается неизменной. Красными линиями со стрелками на рисунке 2 показаны соответствующие участки процесса. Минимальная работа газа пропорциональна разнице площадей фигур зеленого и розового цветов.

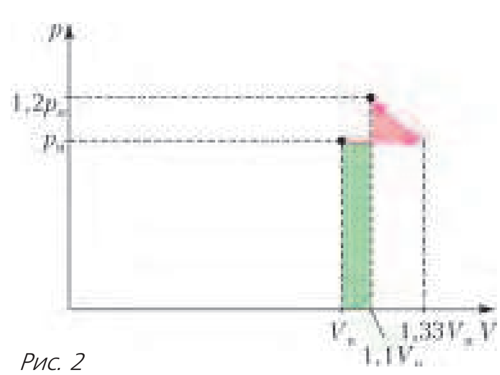


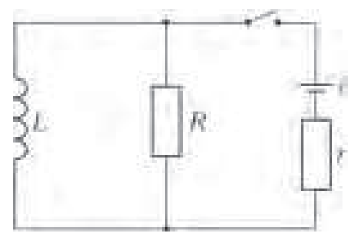
Рис. 2

Поскольку все точки полученных двух процессов на pV-диаграмме находятся достаточно близко друг к другу, можно участки адиабатического и изотермического процессов считать почти прямыми линиями. Работы газа будут при этом такими:

$$A_{мин} \approx 8{,}8\ Дж,\quad A_{макс} \approx 16{,}2\ Дж.$$

С.Крюков

Ф2312. *В электрической схеме (см. рисунок) все элементы идеальные, ток равен нулю. Ключ сначала*



замыкают, а затем размыкают в момент, когда скорость изменения энергии, запасаемой в катушке индуктивности, достигает максимума. Найдите: а) количество теплоты, которое выделится в схеме после размыкания ключа; б) отношение токов в резисторах за мгновение до размыкания ключа.

Пусть i_L и i_R – мгновенные значения токов в катушке индуктивности и в резисторе сопротивлением R, когда ключ замкнут. По условию задачи и в соответствии с законом Кирхгофа можно записать следующие соотношения:

$$\mathscr{E} - (i_L + i_R)r = i_R R,$$

$$i_R R = L\frac{di_L}{dt},$$

$$P = \frac{d\left(\frac{Li_L^2}{2}\right)}{dt} = Li_L\frac{di_L}{dt}.$$

После преобразований получим такое выражение для мощности:

$$P = \frac{i_L R(\mathscr{E} - i_L r)}{R + r}.$$

Отсюда видно, что максимум мощности, т.е. максимум скорости изменения энергии, запасаемой в катушке индуктивности, достигается при токе

$$i_{Lm} = \frac{\mathscr{E}}{2r}.$$

Количество теплоты, которое нужно найти, равно

$$Q = \frac{Li_{Lm}^2}{2} = \frac{L\mathscr{E}^2}{8r^2}.$$

Отношение токов в резисторах за мгновение до размыкания ключа равно

$$\frac{i_r}{i_R} = \frac{i_R + i_L}{i_R} = 2 + \frac{R}{r}.$$

А.Шеронов

Ф2313. *Над стоящим на горизонтальном столе тонкостенным стаканом цилиндрической формы, заполненным до половины молоком, поместили собирающую линзу. Ось симметрии стакана совпадает с главной оптической осью линзы. Диаметр изображения дна стакана совпадает с диаметром дна самого стакана, а высота изображения больше высоты самого стакана в два раза. Какую часть объема занимает изображение молока в изображении стакана?*

Изображение стакана – это усеченный конус. Дно стакана находится на расстоянии $2F$ от линзы, где F – фокусное расстояние линзы. На таком же расстоянии от линзы находится и дно изображения. Верх стакана отстоит на расстоянии $1{,}5F$ от линзы, а верх изображения стакана – на расстояние $3F$ от линзы. Высота изображения стакана равна фокусному расстоянию линзы, а высота самого стакана равна половине фокусного расстояния линзы. Объем изображения стакана равен

$$V_1 = 2F\pi D^2 \frac{1-1/8}{3} = \frac{7F\pi D^2}{12}.$$

Объем самого стакана составляет

$$V_0 = \frac{F\pi D^2}{8}.$$

Уровень молока в стакане находится на расстоянии $7F/4$ от линзы, а уровень изображения молока – на расстоянии $7F/3$ от линзы. Иными словами, толщина слоя молока в стакане равна $F/4$, а в изображении она составляет $F/3$. Объем изображения молока равен

$$V_{\text{мол}} = \frac{\left((4/3)^3 - 1\right)F\pi D^2}{12}.$$

Ответ на вопрос задачи таков:

$$\frac{V_{\text{мол}}}{V_1} = \frac{37}{27 \cdot 7} \approx 0{,}2.$$

С.Варламов

Ф2314. *Монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм падает перпендикулярно на непрозрачную пластину, в которой прорезана длинная щель постоянной ширины $D = 0{,}1$ мм $\gg \lambda$. На экране, расположенном на расстоянии $L = 10$ м $\gg D^2/\lambda$ параллельно пластине, видны дифракционные полосы разных порядков. Каково отношение интенсивностей/яркостей света в центрах полос для разных порядков n и m? Считайте, что $1 \ll n < m \ll D/\lambda$.*

Отношение интенсивностей/яркостей света равно квадрату отношения амплитуд напряженностей E электрических полей в соответствующих местах поверхности экрана. Для оценки этого отношения воспользуемся принципом Гюйгенса–Френеля. Для этого мысленно разделим щель на множество полосок, расположенных вдоль всей щели и имеющих одинаковую и очень маленькую ширину, и будем суммировать вклады каждой полоски в общий вектор электрического поля в центре соответствующей дифракционной полосы. Поскольку в условии задачи дано ограничение $n < m \ll D/\lambda$, то это означает, что дифракционные углы для этих полос малы, и тогда можно считать, что вклады каждой полоски в вектор $\vec{E}$ имеют одинаковую амплитуду, но разные фазы. Для дифракционной полосы нулевого порядка все фазы одинаковы, поэтому общая амплитуда электрического поля равна сумме всех амплитуд отдельных полосок (рис.1). Обозначим ее через E_0.

Рис. 1

Для первого минимума дифракционной картины вклады от каждой полоски с отличающимися фазами дают в сумме ноль. Это на рисунке 2 выглядит как замкнутое кольцо, составленное из стрелочек, изображенных на рисунке 1, каждая из которых по отношению к предыдущей стрелочке поворачивается на малый угол. Суммарная длина всех стрелочек остается неизменной и равной E_0.

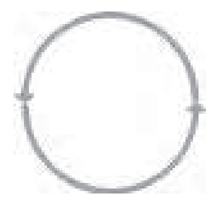


Рис. 2

Максимум первого порядка получается в ситуации, когда все стрелочки, сложившись, дают картинку, на которой последняя стрелка повернулась по отношению к первой примерно на 1,5 оборота (на самом деле немного меньше: $\varphi_1 \approx 8{,}55$ рад). Максимум второго порядка соответствует картинке, на которой последняя стрелочка совершила примерно 2,5 оборота. Чем больше номер порядка дифракции, тем точнее выполняется условие $\varphi_n = 2\pi n + 1$. Формула для амплитуды вектора E в максимуме n-го порядка будет такой:

$$E_n \approx \frac{E_0}{(2n+1)\pi},$$

при этом чем больше n, тем точнее выполняется эта формула. Отношение интенсивностей/яркостей света в центрах полос для разных порядков $n \gg 1$ и $m \gg 1$ будет равно

$$\frac{W_n}{W_m} = \left(\frac{E_n}{E_m}\right)^2 = \left(\frac{2m+1}{2n+1}\right)^2.$$

Ф.Ренель