



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. V. Proskurin, A theorem on distribution of quadratic residues applicable in the Linnik's ergodic method,
Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 1975, Volume 50, 169–178

<https://www.mathnet.ru/eng/zns12804>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.80

May 22, 2025, 03:59:08



ТЕОРЕМА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ КВАДРАТИЧНЫХ ВЫЧЕТОВ,
ИМЕЮЩАЯ ПРИЛОЖЕНИЯ В ЭРГОДИЧЕСКОМ МЕТОДЕ Ю. В. ЛИННИКА

В работе предлагается доказательство следующей теоремы.

Теорема. Пусть m — целое положительное число; χ — вещественное число, $0 < \chi < \frac{1}{2}$; x — вещественное число, для которого

$$x \geq m^{\frac{1}{2} + \chi}$$

Обозначим через $t(-m; x, \frac{1}{2}x)$ число целых чисел q , удовлетворяющих следующим условиям:

- 1°. $\frac{1}{2}x < q \leq x$;
- 2°. q — бесквадратно;
- 3°. если p — простой делитель числа q , то $p > \log m$;
- 4°. $(-m)$ квадратичный вычет $(\text{mod } q)$

Тогда при $m \rightarrow \infty$ и любом $\varepsilon > 0$

$$t(-m; x, \frac{1}{2}x) \gg x^{1-\varepsilon},$$

где постоянная, входящая в \gg , зависит только от χ и ε .

Эта теорема, по существу, сформулированная (без доказательства) Ю. В. Линником [2], имеет применения при построении нового варианта эргодического метода в теории чисел (см. [3]). При доказательстве теоремы мы в значительной степени следуем рассуждениям работы [1]. Доказательство разобьем на ряд лемм.

Лемма I. Пусть $\mathcal{D} > 0$ — целое число; χ — неглавный характер $(\text{mod } \mathcal{D})$. Обозначим:

$$U(y, \chi) = \sum_{k \leq y} \chi(k).$$

Тогда если

$$y \geq \mathcal{D}^{\frac{1}{2} + \theta}, \quad \theta > 0,$$

то для любого $\varepsilon > 0$

$$|U(y, \chi)| \ll y^{1 - \frac{4\theta}{3+8\theta} + \varepsilon},$$

где постоянная, входящая в \ll , зависит только от θ и ε .

Доказательство. Лемма непосредственно следует из оценки Берджесса [5]:

$$|U(y, \chi)| \ll y^{\frac{1}{2}} \mathcal{D}^{\frac{3}{16} + \epsilon} \ll y^{1 - \frac{4\theta}{3+8\theta} + \epsilon}.$$

Лемма 2. Пусть $\mathcal{D} > 0$ — целое число; χ — неглавный характер $(\text{mod } \mathcal{D})$; s — комплексное число, $\text{Res } s = \frac{1}{2}$,
 $x \geq \mathcal{D}^{\frac{3}{8} + \gamma}$, $\gamma > 0$.

Тогда

$$\sum_{k \leq x} \frac{\chi(k)}{k} = L(1, \chi) + O(x^{-\tau_1(s) + \epsilon}),$$

$$\left| \sum_{k \leq x} \frac{\chi(k)}{k^s} \right| \ll |s| \cdot x^{\frac{1}{2} - \tau_2(s) + \epsilon},$$

где $\tau_1(s) = \frac{4\gamma}{3+8\gamma} > 0$, $\tau_2(s) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3+8\gamma}} > 0$;

постоянные, входящие в символы \ll и O , зависят только от γ и произвольного $\epsilon > 0$.

Доказательство. Используя суммирование по Абелю, получаем:

$$\begin{aligned} \left| L(1, \chi) - \sum_{k \leq x} \frac{\chi(k)}{k} \right| &= \left| \sum_{k > x} \frac{\chi(k)}{k} \right| = \left| \int_{[x]}^{\infty} \frac{U(y, \chi)}{y^2} dy - \frac{U([x], \chi)}{[x]} \right| \ll \\ &\ll \int_x^{\infty} \frac{y^{1 - \frac{4\gamma}{3+8\gamma} + \epsilon}}{y^2} dy + x^{-\frac{4\gamma}{3+8\gamma} + \epsilon} \ll x^{-\tau_1(s) + \epsilon}. \end{aligned}$$

Пусть теперь

$$\xi = \mathcal{D}^{\frac{3}{8} + \theta}, \quad 0 < \theta < \gamma,$$

так что

$$\xi \ll x^{\frac{3+8\theta}{3+8\gamma}}.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k \leq x} \frac{\chi(k)}{k^s} \right| &\ll \sum_{k \leq \xi} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} + \left| \sum_{\xi < k \leq x} \frac{\chi(k)}{k^s} \right| \ll \\ &\ll \xi^{\frac{1}{2}} + |s| \int_{[\xi]}^{[x]} \frac{U(y, \chi)}{y^{s+1}} dy + \frac{U([x], \chi)}{[x]^s} - \frac{U([\xi], \chi)}{[\xi]^s} \ll \\ &\ll \xi^{\frac{1}{2}} + |s| \int_{\xi}^x \frac{y^{1 - \frac{4\theta}{3+8\theta} + \epsilon}}{y^{\frac{3}{2}}} dy + x^{\frac{1}{2} - \frac{4\theta}{3+8\theta} + \epsilon} + \xi^{\frac{1}{2}} \ll \\ &\ll |s| \left\{ x^{\frac{1}{2} \cdot \frac{3+8\theta}{3+8\gamma}} + x^{\frac{1}{2} \cdot \frac{4\theta}{3+8\theta} + \epsilon} + x^{\frac{1}{2} - \frac{4\theta}{3+8\theta} + \epsilon} \right\}. \end{aligned}$$

Положив

$$\theta = \frac{-3 + \sqrt{3(3+8\gamma)}}{8},$$

получим необходимую оценку.

Лемма 3. Пусть $q_1 < q_2 < \dots < q_z$ - простые числа; $z \log z < c \log x$, где постоянная $c > 0$ произвольна. Тогда ^{*)} в предположениях леммы 2:

$$\sum_{\substack{k \leq x \\ \text{Бескв.} \\ (k, q_1 \dots q_z) = 1}} \frac{\chi(k)}{k} = L(1, \chi) \cdot \prod_{i=1}^z \left(1 - \frac{\chi(q_i)}{q_i}\right) \cdot \prod_{\substack{p \\ p \neq q_1, \dots, q_z}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^2}\right) + O(x^{-\delta_1(x)+\varepsilon}),$$

$$\left| \sum_{\substack{k \leq x \\ \text{Бескв.} \\ (k, q_1 \dots q_z) = 1}} \frac{\chi(k)}{k^s} \right| \ll |s| \cdot x^{\frac{1}{2} - \delta_2(x) + \varepsilon};$$

здесь

$$\delta_i(x) = \frac{1}{3} \rho_i \quad (i = 1, 2),$$

где ρ_i - корень уравнения

$$\frac{\rho}{3} = \eta_i \left(\rho - \frac{3}{8} \rho - \rho \right),$$

удовлетворяющий условию

$$0 < \rho < \frac{8\chi}{3+8\chi}$$

постоянные, входящие в символы \ll и O , зависят только от χ , c и произвольного $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Положим

$$\omega_p = \begin{cases} 1, & \text{если } p = q_1, \dots, q_z \\ 2, & \text{если } p \neq q_1, \dots, q_z. \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{\substack{k \leq x \\ \text{Бескв.} \\ (k, q_1 \dots q_z) = 1}} \frac{\chi(k)}{k} = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \sum_{\substack{p_1 < \dots < p_t \\ p_i^{\omega_{p_i}} \dots p_t^{\omega_{p_t}}}} \frac{\chi(p_1^{\omega_{p_1}} \dots p_t^{\omega_{p_t}})}{p_1^{\omega_{p_1}} \dots p_t^{\omega_{p_t}}} \sum_{k \leq \frac{x}{p_1^{\omega_{p_1}} \dots p_t^{\omega_{p_t}}}} \frac{\chi(k)}{k}. \quad (I)$$

Сумму (I) разобьем на две: в первую отнесем слагаемые с условием: $p_1^{\omega_{p_1}} \dots p_t^{\omega_{p_t}} < x^{P_1}$; во вторую - с условием $p_1^{\omega_{p_1}} \dots p_t^{\omega_{p_t}} \geq x^{P_1}$.

Абсолютная величина второй суммы

$$\ll \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\substack{p_1 < \dots < p_t \\ p_i^{\omega_{p_i}} \dots p_t^{\omega_{p_t}} \geq x^{P_1}}} \frac{1}{p_1^{\omega_{p_1}} \dots p_t^{\omega_{p_t}}} \sum_{k \leq \frac{x}{p_1^{\omega_{p_1}} \dots p_t^{\omega_{p_t}}}} \frac{1}{k} \ll \log x \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\substack{p_1 < \dots < p_t \\ p_i^{\omega_{p_i}} \dots p_t^{\omega_{p_t}} \geq x^{P_1}}} \frac{1}{p_1^{\omega_{p_1}} \dots p_t^{\omega_{p_t}}} =$$

^{*)} Здесь и далее p пробегает все простые числа, удовлетворяющие дополнительно указываемым условиям.

$$= \log x \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\substack{p_1 < \dots < p_t \\ p_1^{\omega_{p_1}} \dots p_t^{\omega_{p_t}} \geq x^{\frac{p_1}{3}} \\ \prod_{p_i=1}^{\omega_{p_i}} p_i \geq x^{\frac{p_1}{3}}} \frac{1}{p_1^{\omega_{p_1}} \dots p_t^{\omega_{p_t}}} + \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\substack{p_1 < \dots < p_t \\ p_1^{\omega_{p_1}} \dots p_t^{\omega_{p_t}} \geq x^{\frac{p_1}{3}} \\ \prod_{p_i=1}^{\omega_{p_i}} p_i < x^{\frac{p_1}{3}}} \frac{1}{p_1^{\omega_{p_1}} \dots p_t^{\omega_{p_t}}} \right\} \ll$$

$$\ll \log x \left\{ 2^z x^{-\frac{p_1}{3}} \sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{1}{\tau^2} + 2^z \sum_{\tau > x^{\frac{p_1}{3}}} \frac{1}{\tau^2} \right\} \ll x^{-\frac{p_1}{3} + \varepsilon},$$

для любого $\varepsilon > 0$; постоянная, входящая в \ll , зависит только от s и ε .

К первой сумме применим лемму 2 (заменяя x на $x/(p_1^{\omega_{p_1}} \dots p_t^{\omega_{p_t}})$).
Получаем, что она равна

$$\sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \sum_{\substack{p_1 < \dots < p_t \\ p_1^{\omega_{p_1}} \dots p_t^{\omega_{p_t}} < x^{\frac{p_1}{3}}}} \frac{\chi(p_1^{\omega_{p_1}} \dots p_t^{\omega_{p_t}})}{p_1^{\omega_{p_1}} \dots p_t^{\omega_{p_t}}} \cdot \left\{ L(1, \chi) + O\left(\frac{x^{-z(\chi - \frac{3}{8} p_1 - \chi p_1) + \varepsilon'}}{(p_1^{\omega_{p_1}} \dots p_t^{\omega_{p_t}})^{\frac{p_1}{3} + \varepsilon'}} \right) \right\} =$$

$$= L(1, \chi) \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \sum_{\substack{p_1 < \dots < p_t \\ p_1^{\omega_{p_1}} \dots p_t^{\omega_{p_t}} < x^{\frac{p_1}{3}}}} \frac{\chi(p_1^{\omega_{p_1}} \dots p_t^{\omega_{p_t}})}{p_1^{\omega_{p_1}} \dots p_t^{\omega_{p_t}}} + O\left(\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\substack{p_1 < \dots < p_t \\ p_1^{\omega_{p_1}} \dots p_t^{\omega_{p_t}} < x^{\frac{p_1}{3}}} \frac{x^{-\frac{p_1}{3} + \varepsilon'}}{(p_1^{\omega_{p_1}} \dots p_t^{\omega_{p_t}})^{\frac{p_1}{3} + \varepsilon'}} \right).$$

Остаточный член этой формулы

$$\ll x^{-\frac{p_1}{3} + \varepsilon'} \cdot 2^z \sum_{\tau < x^{\frac{p_1}{3}}} \frac{1}{\tau^{2(1 - \frac{p_1}{3} + \varepsilon')}} \ll x^{-\frac{p_1}{3} + \varepsilon} \sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{1}{\tau^{\frac{4}{3}}} \ll x^{-\frac{p_1}{3} + \varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно и постоянная, входящая в символ \ll , зависит только от χ, s, ε . Главный член отличается от

$$L(1, \chi) \cdot \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p^{\omega_p})}{p^{\omega_p}} \right)$$

на

$$L(1, \chi) \cdot \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \sum_{\substack{p_1 < \dots < p_t \\ p_1^{\omega_{p_1}} \dots p_t^{\omega_{p_t}} \geq x^{\frac{p_1}{3}}}} \frac{\chi(p_1^{\omega_{p_1}} \dots p_t^{\omega_{p_t}})}{p_1^{\omega_{p_1}} \dots p_t^{\omega_{p_t}}} \ll L(1, \chi) \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\substack{p_1 < \dots < p_t \\ p_1^{\omega_{p_1}} \dots p_t^{\omega_{p_t}} \geq x^{\frac{p_1}{3}}}} \frac{1}{p_1^{\omega_{p_1}} \dots p_t^{\omega_{p_t}}} \ll$$

$$\ll 2^z L(1, \chi) \cdot x^{-\frac{p_1}{3}} \ll x^{-\frac{p_1}{3} + \varepsilon};$$

постоянная, входящая в \ll , зависит только от s и произвольного $\varepsilon > 0$. Здесь и далее мы пользуемся оценкой Зигеля (Прахар [4]):

$$\mathcal{D}^{-\varepsilon} \ll L(1, \chi) \ll \mathcal{D}^{\varepsilon},$$

где постоянные, входящие в \ll , зависят только от произвольного $\varepsilon > 0$; в оценке снизу χ предполагается вещественным.

Аналогичным образом:

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{\substack{k \leq x \\ \text{бескв.} \\ (k, q_1 \dots q_z) = 1}} \frac{\chi(k)}{k^s} \right| &\leq \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\substack{p_1 < \dots < p_t \\ \omega_{p_1} \dots \omega_{p_t} < x^{p_2}}} \frac{1}{(\rho_1^{\omega_{p_1}} \dots \rho_t^{\omega_{p_t}})^{\frac{1}{2}}} \left| \sum_{k \leq \frac{x}{\rho_1^{\omega_{p_1}} \dots \rho_t^{\omega_{p_t}}}} \frac{\chi(k)}{k^s} \right| + \\
 &+ \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\substack{p_1 < \dots < p_t \\ \rho_1^{\omega_{p_1}} \dots \rho_t^{\omega_{p_t}} \geq x^{p_2}}} \frac{1}{(\rho_1^{\omega_{p_1}} \dots \rho_t^{\omega_{p_t}})^{\frac{1}{2}}} \cdot \sum_{k \leq \frac{x}{\rho_1^{\omega_{p_1}} \dots \rho_t^{\omega_{p_t}}}} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \ll \\
 &\ll |s| \cdot x^{\frac{1}{2} - \gamma_2 (\gamma - \frac{3}{8} p_2 - \delta p_2) + \varepsilon'} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\substack{p_1 < \dots < p_t \\ \omega_{p_1} \dots \omega_{p_t} < x^{p_2}}} \frac{1}{(\rho_1^{\omega_{p_1}} \dots \rho_t^{\omega_{p_t}})^{1 - \gamma_2 (\gamma - \frac{3}{8} p_2 - \delta p_2)}} + \\
 &+ x^{\frac{1}{2}} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\substack{p_1 < \dots < p_t \\ \rho_1^{\omega_{p_1}} \dots \rho_t^{\omega_{p_t}} \geq x^{p_2}}} \frac{1}{\rho_1^{\omega_{p_1}} \dots \rho_t^{\omega_{p_t}}} \ll |s| \cdot x^{\frac{1}{2} - \frac{p_2}{3} + \varepsilon};
 \end{aligned}$$

постоянная, входящая в \ll , зависит только от γ , s и произвольного $\varepsilon > 0$.

Лемма 4. Пусть

$$a_k = \sum_{\substack{d|k \\ d \text{ бескв.}, \frac{k}{d} \text{ бескв.}}} \chi(d).$$

Тогда в предположениях леммы 3

$$\sum_{\substack{k \leq x \\ (k, q_1 \dots q_z) = 1}} a_k \left(1 - \frac{k}{x}\right) = \frac{3x}{\pi^2} \cdot L(1, \chi) \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^2}\right) \prod_{i=1}^z \left\{ \left(1 + \frac{1}{q_i}\right) \left(1 + \frac{\chi(q_i)}{q_i}\right) \right\}^{-1} + O(x^{-1-\nu(x)+\varepsilon}),$$

где

$$\nu(x) = \min \left\{ \delta_1(x), \frac{2}{3} \delta_2(x) \right\};$$

постоянная, входящая в O , зависит только от γ , s и произвольного $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Пусть $d > 1, T \geq 2$. Известно, что

$$\mathcal{J}(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{y^s}{s(s+1)} ds = \begin{cases} 1 - \frac{1}{y}, & \text{если } y \geq 1, \\ 0, & \text{если } y \leq 1. \end{cases}$$

Заметим еще, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{d-iT}^{d+iT} \frac{y^s}{s(s+1)} ds = \mathcal{J}(y) + O\left(\frac{y^d}{T}\right),$$

с абсолютной постоянной в O . Поэтому:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k \leq x \\ (k, q_1 \dots q_z)=1}} a_k \left(1 - \frac{k}{x}\right) &= \sum_{\substack{d \leq x \\ \text{дискв.} \\ (d, q_1 \dots q_z)=1}} \chi(d) \sum_{\substack{n \leq \frac{x}{d} \\ \text{дискв.} \\ (n, q_1 \dots q_z)=1}} \left(1 - \frac{nd}{x}\right) = \sum_{\substack{d \leq x \\ \text{дискв.} \\ (d, q_1 \dots q_z)=1}} \chi(d) \sum_{\substack{n=1 \\ (n, q_1 \dots q_z)=1 \\ n \text{ дискв., если } p|n \Rightarrow p \leq x}}^{\infty} \gamma\left(\frac{x}{dn}\right) = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} \sum_{\substack{d \leq x \\ \text{дискв.} \\ (d, q_1 \dots q_z)=1}} \chi(d) \sum_{\substack{n=1 \\ (n, q_1 \dots q_z)=1 \\ n \text{ дискв., если } p|n \Rightarrow p \leq x}}^{\infty} \frac{1}{s(s+1)} \cdot \frac{x^s}{d^s n^s} ds + O\left(\sum_{d=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^d}{T d^d n^d}\right) = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} \frac{x^s}{s(s+1)} \left(\sum_{\substack{d \leq x \\ \text{дискв.} \\ (d, q_1 \dots q_z)=1}} \frac{\chi(d)}{d^s}\right) \left(\sum_{\substack{n=1 \\ (n, q_1 \dots q_z)=1 \\ n \text{ дискв., если } p|n \Rightarrow p \leq x}}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) ds + O\left(\frac{x^\alpha}{T} (\zeta(\alpha))^2\right) = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} \frac{x^s}{s(s+1)} \left(\sum_{\substack{d \leq x \\ \text{дискв.} \\ (d, q_1 \dots q_z)=1}} \frac{\chi(d)}{d^s}\right) \cdot \zeta(s) \prod_{i=1}^z \left(1 - \frac{1}{q_i^s}\right) \prod_{\substack{p \leq x \\ p \neq q_1, \dots, q_z}} \left(1 - \frac{1}{p^{s+1}}\right) ds + O\left(\frac{x^\alpha}{T}\right),
\end{aligned}$$

с постоянной в 0, зависящей только от α .

Функция

$$F(s) = \frac{x^s}{s(s+1)} \cdot \left(\sum_{\substack{d \leq x \\ \text{дискв.} \\ (d, q_1 \dots q_z)=1}} \frac{\chi(d)}{d^s}\right) \cdot \zeta(s) \cdot \prod_{i=1}^z \left(1 - \frac{1}{q_i^s}\right) \prod_{\substack{p \leq x \\ p \neq q_1, \dots, q_z}} \left(1 - \frac{1}{p^{s+1}}\right)$$

имеет в прямоугольнике с вершинами $\frac{1}{2} - iT$, $\alpha - iT$, $\alpha + iT$, $\frac{1}{2} + iT$ единственный полюс в точке 1. Поэтому наш интеграл равен

$$\text{Res}_{s=1} F(s) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} F(s) ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}+iT}^{\alpha+iT} F(s) ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\alpha-iT} F(s) ds.$$

Оценим последние три интеграла. Имеем при $\text{Re } s \geq \frac{1}{2}$

$$\left| \prod_{\substack{p \leq x \\ p \neq q_1, \dots, q_z}} \left(1 - \frac{1}{p^{s+1}}\right) \right| \ll \prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \ll \log x,$$

$$\left| \prod_{i=1}^z \left(1 - \frac{1}{q_i^s}\right) \right| \ll \prod_{i=1}^z \left(1 + \frac{1}{q_i^{\frac{1}{2}}}\right) \ll 2^z.$$

Известно (Прахар [4])

$$|\zeta(\sigma + it)| \ll |t|^{\frac{1}{2}}, \text{ если } \sigma \geq \frac{1}{2}, |t| \geq 2;$$

постоянная \ll - абсолютная. Поэтому

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} F(s) ds \right| \ll 2^{\frac{\alpha}{2}} \log x \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \left| \frac{\zeta(\sigma+iT)}{(\sigma+iT)(\sigma+1+iT)} \right| \left(\sum_{k \leq x} \frac{1}{k} \right) d\sigma \ll$$

$$\ll \frac{2^{\frac{\alpha}{2}} \log x}{T^{\frac{3}{2}}} \sum_{k \leq x} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{k} \right)^{\sigma} d\sigma \ll \frac{x^{\alpha+\frac{\epsilon}{2}}}{T},$$

где постоянная, входящая в \ll , зависит только от α , ϵ и произвольного $\epsilon > 0$. Аналогично:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} F(s) ds \right| \ll \frac{x^{\alpha+\frac{\epsilon}{2}}}{T}.$$

Оценим оставшийся интеграл:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} F(s) ds \right| \ll 2^{\frac{\alpha}{2}} \log x \int_{-T}^T \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\left| \frac{1}{2}+it \right| \left| \frac{3}{2}+it \right|} |t|^{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2}+it \right|^{-\frac{1}{2}-\delta_2(\delta)+\epsilon} dt \ll x^{1-\delta_2(\delta)+\frac{\epsilon}{2}} T^{\frac{1}{2}}$$

с постоянной в \ll , зависящей только от δ , ϵ и произвольного $\epsilon > 0$.

По лемме 3

$$\operatorname{Res}_{s=1} F(s) = \frac{x}{2} \left\{ L(1, \chi) \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\chi(q_i)}{q_i} \right) \prod_{\substack{p \\ \neq q_1, \dots, q_z}} \left(1 - \frac{\chi(p^2)}{p^2} \right) + O(x^{-\delta_1(\delta)+\epsilon}) \right\} \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{q_i} \right) \cdot \prod_{\substack{p \leq x \\ \neq q_1, \dots, q_z}} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right).$$

Так как

$$\left| \frac{6}{\pi^2} - \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) \right| = \left| \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) - \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) \right| \ll \sum_{p > x} \frac{1}{p^2} \ll x^{-1},$$

то учитывая, что

$$L(1, \chi) \ll x^{\frac{2}{3}} \ll x^{1-\delta_1(\delta)},$$

получим:

$$\operatorname{Res}_{s=1} F(s) = \frac{3x}{\pi^2} L(1, \chi) \prod_{i=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{q_i} \right) \chi \left(\frac{\chi(q_i)}{q_i} \right) \right\}^{-1} \cdot \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p^2)}{p^2} \right) + O(x^{1-\delta_1(\delta)+\epsilon});$$

постоянная в символе O зависит только от δ , ϵ и произвольного $\epsilon > 0$. Сбрав все оценки и положив

$$T = x^{\lambda}, \quad \lambda = \frac{2}{3}(\alpha - 1 + \delta_2(\delta)), \quad \alpha = 1 + \frac{3\epsilon}{2},$$

получим утверждение леммы.

Лемма 5. Пусть $P = \prod_{p \leq \log D} p$. Тогда в предположениях леммы 4:

$$\sum_{\substack{k \leq x \\ \text{бескв.} \\ (k, P)=1}} a_k \left(1 - \frac{k}{x}\right) = \frac{3x}{\pi^2} \cdot L(1, \chi) \cdot \prod_{p \leq \log D} \left\{ \left(1 + \frac{1}{p}\right) \chi\left(\frac{p}{p}\right) \right\}^{-1} \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p^2)}{p^2}\right) \prod_{p > \log D} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^2 \left(1 + \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{\chi(p)}{p}\right)}\right) + O\left(x^{1-\mu(\delta)+\varepsilon}\right).$$

Здесь $\mu(\delta) = \frac{1}{2} \rho$, где ρ корень уравнения

$$\frac{\rho}{2} = \nu\left(\delta - \frac{3}{8}\rho - \delta\rho\right)$$

удовлетворяющий условию

$$0 < \rho < \frac{8\delta}{3+8\delta};$$

постоянная, входящая в O , зависит только от δ и произвольного $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 3:

$$\sum_{\substack{k \leq x \\ \text{бескв.} \\ (k, P)=1}} a_k \left(1 - \frac{k}{x}\right) = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \sum_{\log D < p_1 < \dots < p_t} \sum_{\substack{k \leq x \\ (k, P)=1 \\ p_1^2 \dots p_t^2 | k}} a_k \left(1 - \frac{k}{x}\right). \quad (2)$$

Сумму (2) разобьем на две: в первую отнесем слагаемые с условием: $p_1^2 \dots p_t^2 < x^p$; во вторую — с условием $p_1^2 \dots p_t^2 \geq x^p$.

Так как $|a_k|$ не превосходит числа делителей k , то для любого $\varepsilon > 0$

$$\max_{k \leq x} |a_k| \ll x^\varepsilon$$

с постоянной в \ll , зависящей только от ε . Поэтому абсолютная величина второй суммы

$$\ll x^\varepsilon \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\substack{\log D < p_1 < \dots < p_t \\ p_1^2 \dots p_t^2 \geq x^p}} \frac{x}{p_1^2 \dots p_t^2} \ll x^{1+\varepsilon} \sum_{t \geq x^{\frac{p}{2}}} \frac{1}{t^2} \ll x^{1-\frac{p}{2}+\varepsilon}$$

для любого $\varepsilon > 0$; постоянная, входящая в \ll , зависит только от ε .

Прежде чем рассматривать первую сумму, заметим, что

$$\sum_{\substack{k \leq x \\ (k, P)=1 \\ p_1^2 \dots p_t^2 | k}} a_k \left(1 - \frac{k}{x}\right) = \chi(p_1 \dots p_t) \sum_{\substack{k \leq \frac{x}{p_1^2 \dots p_t^2} \\ (k, P)=1 \\ (k, p_1 \dots p_t)=1}} a_k \left(1 - \frac{k}{\frac{x}{p_1^2 \dots p_t^2}}\right),$$

при условии $\log D < p_1 < \dots < p_t$. Это равенство легко установить, если учесть, что: 1) $a_k = 0$ для k не свободного от кубов;

2) $a_{n_0 n_1^2} = \chi(n_1) a_{n_0}$, если $(n_0, n_1) = 1$ и n_1 бесквадратно. Заметим еще, что при $p_1^2 \dots p_t^2 < x^p$, $p_1 < \dots < p_t$ выполняется нера-

венство:

$$(\pi(\log \mathcal{D}) + t) \log(\pi(\log \mathcal{D}) + t) \leq c \log x, \quad (3)$$

где c зависит только от δ . Действительно:

$$\pi(\log \mathcal{D}) \leq c_1 \frac{\log \mathcal{D}}{\log \log \mathcal{D}} \leq c_2 \frac{\log x}{\log \log x}; \quad (4)$$

так как $\rho_1 \dots \rho_t < x^{\frac{\rho}{2}}$, то $\rho'_1 \dots \rho'_t < x^{\frac{\rho}{2}}$, где ρ'_1, \dots, ρ'_t суть первые t простых чисел; поэтому

$$\frac{\rho}{2} \log x \geq \sum_{\rho \leq \rho'_t} \log \rho > c_3 \rho'_t > c_4 t \log t. \quad (5)$$

Неравенство (3) непосредственно выводится из (4) и (5).

Поэтому, вычисляя первую сумму, мы можем воспользоваться леммой 4, беря в качестве q_1, \dots, q_z все простые числа $\leq \log \mathcal{D}$ и числа ρ_1, \dots, ρ_t . Согласно (3)

$$z \log z < c \log x.$$

Получаем, что первая сумма равна

$$\begin{aligned} & \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \sum_{\substack{\log \mathcal{D} < \rho_1 < \dots < \rho_t \\ \rho_1^2 \dots \rho_t^2 < x^\rho}} \chi(\rho_1 \dots \rho_t) \left\{ \frac{3x}{\pi^2 \rho_1^2 \dots \rho_t^2} L(1, \chi) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{\chi(\rho)}{\rho^2}\right) \cdot \prod_{\rho \leq \log \mathcal{D}} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \chi \left(1 + \frac{\chi(\rho)}{\rho}\right) \right\}^{-1} \right. \\ & \times \left. \prod_{i=1}^t \left\{ \left(1 + \frac{1}{\rho_i}\right) \left(1 + \frac{\chi(\rho_i)}{\rho_i}\right) \right\}^{-1} + O\left(\left(\frac{x}{\rho_1^2 \dots \rho_t^2}\right)^{1 - \nu(\delta - \frac{3}{2}\rho - \delta\rho) + \varepsilon}\right) \right\} = \\ & = \frac{3x}{\pi^2} L(1, \chi) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{\chi(\rho)}{\rho^2}\right) \cdot \prod_{\rho \leq \log \mathcal{D}} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \chi \left(1 + \frac{\chi(\rho)}{\rho}\right) \right\}^{-1} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \sum_{\substack{\log \mathcal{D} < \rho_1 < \dots < \rho_t \\ \rho_1^2 \dots \rho_t^2 < x^\rho}} \prod_{i=1}^t \frac{\chi(\rho_i)}{\rho_i^2 \left(1 + \frac{1}{\rho_i}\right) \left(1 + \frac{\chi(\rho_i)}{\rho_i}\right)} + \\ & + O\left(x^{1 - \frac{\rho}{2} + \varepsilon} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\substack{\log \mathcal{D} < \rho_1 < \dots < \rho_t \\ \rho_1^2 \dots \rho_t^2 < x^\rho}} \frac{1}{(\rho_1 \dots \rho_t)^{2 + \frac{\rho}{2} + \varepsilon}}\right). \end{aligned}$$

Так как $\rho < 1$, то остаточный член

$$\ll x^{1 - \frac{\rho}{2} + \varepsilon} \sum_{\tau < x^{\frac{\rho}{2}}} \frac{1}{\tau^{2(1 - \frac{\rho}{2} + \varepsilon)}} \ll x^{1 - \frac{\rho}{2} + \varepsilon}.$$

Постоянная, входящая в \ll , зависит только от δ и произвольного $\varepsilon > 0$. Главный член отличается от приведенного в формулировке леммы наличием условия $\rho_1^2 \dots \rho_t^2 < x^\rho$. Их разность

$$\ll x L(1, \chi) \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\substack{\log \mathcal{D} < \rho_1 < \dots < \rho_t \\ \rho_1^2 \dots \rho_t^2 \geq x^\rho}} \frac{1}{\rho_1^2 \dots \rho_t^2} \ll x L(1, \chi) \sum_{\tau \geq x^{\frac{\rho}{2}}} \frac{1}{\tau^2} \ll x^{1 - \frac{\rho}{2} + \varepsilon},$$

где постоянная в \ll зависит только от произвольного $\varepsilon > 0$. Собрав все оценки, получим утверждение леммы.

Доказательство теоремы. Пусть $\mathcal{D} = 4m$, χ - характер

(mod \mathcal{D}) для которого:

$$\chi(k) = \begin{cases} \left(\frac{-\mathcal{D}}{k}\right), & \text{если } (k, \mathcal{D}) = 1 \\ 0, & \text{если } (k, \mathcal{D}) > 1. \end{cases}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно, $\log m \geq 2$. Заметим, что число решений сравнения $b^2 \equiv -m \pmod{k}$ для бесквадратного нечетного k есть

$$\prod_{p|k} \left(1 + \left(\frac{-m}{p}\right)\right) = a_k.$$

Получаем:

$$t(-m; x, \frac{1}{2}x) = \sum_{\substack{\frac{1}{2}x < k \leq x \\ k \text{ бескв.}}} \begin{cases} 1 & \text{если сравнение } b^2 \equiv -m \pmod{k} \text{ разрешимо} \\ 0 & \text{если сравнение } b^2 \equiv -m \pmod{k} \text{ не разрешимо} \end{cases} \gg (\max_{k \leq x} |a_k|)^{-1} \cdot \sum_{\substack{\frac{1}{2}x < k \leq x \\ k \text{ бескв., } p|k \text{ если } p \leq \log m}} a_k \gg x^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{\frac{1}{2}x < k \leq x \\ k \text{ бескв., } p|k \text{ если } p \leq \log \mathcal{D}}} a_k \left(1 - \frac{k}{x}\right). \quad (6)$$

Для последней суммы нам известна асимптотика (см. лемму 5), из которой выводим, учитывая оценку Зигеля,

$$\sum_{\substack{\frac{1}{2}x < k \leq x \\ k \text{ бескв.}}} a_k \left(1 - \frac{k}{x}\right) \gg x L(1, \chi) \prod_{p \leq \log \mathcal{D}} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-2} + x^{1-\mu(\chi)+\varepsilon} \gg x^{1-\frac{\varepsilon}{2}}. \quad (7)$$

$p|k \text{ если } p \leq \log \mathcal{D}$

Теперь теорема непосредственно следует из оценок (6) и (7).

Приношу благодарность А.В.Мальшеву за постановку задачи и внимание к работе и Д.Н.Андрееву за помощь в разборе статьи А.И.Виноградова и Ю.В.Линника.

Цитированная литература

- [1] Виноградов А.И., Линник Ю.В. Гиперэллиптические кривые и наименьший простой квадратичный вычет. Докл.АН СССР, 1966, 168, 259-261.
- [2] Линник Ю.В. (Yu.V.Linnik) Application of the method of D.Burgess to the investigation of integer points on large spheres. Symposia math., 1970, 4, 99-112.
- [3] Мальшев А.В. Новый вариант эргодического метода Ю.В.Линника в теории чисел. Этот Сборник, стр. 179-186.
- [4] Прахар К. Распределение простых чисел, М., 1967.
- [5] Burgess D.A. On character sums and L-series, II. Proc.London Math.Soc.(3), 1963, 13, 524-536.