Е. Ф. Мищенко, Л. С. Понтрягин, Доказательство некоторых асимптотических формул для решений дифференциальных уравнений с малым параметром, *Докл. АН СССР*, 1958, том 120, номер 5, 967–969

Доклады Академии наук СССР
1958. Том 120, № 5

МАТЕМАТИКА

Е. Ф. МИЩЕНКО и член-корреспондент АН СССР Л. С. ПОНТРЯГИН

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕКОТОРЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

В работе ([1]) вычислены формальные асимптотические разложения решений системы дифференциальных уравнений с малым параметром

$$\begin{aligned} &\varepsilon \dot{x}^i = f^i(x^1, \ldots, x^k, y^1, \ldots, y^l), \\ &\dot{y}^j = g^j(x^1, \ldots, x^k, y^1, \ldots, y^l), \\ &i = 1, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, l, \end{aligned} \tag{1}$$

в окрестности «точки срыва», т. е. точки, где $\det \| \partial f^i / \partial x^\alpha \| = 0$. Эти разложения (см. формулы (1.50), (2.30) и (3.5) работы ([1])) были затем существенно использованы как в самой работе ([1]), так и в работе ([2]). Однако доказательств того, что вычисленные формальные разложения действительно приближают истинные решения системы (1) с указанной точностью, в работе ([1]) не приведено. Здесь мы приводим схему этих доказательств, используя обозначения работы ([1]).

Линейным преобразованием координат система (1) в окрестности точки срыва приводится к виду (см. § 3 работы ([1]))

$$\begin{aligned} &\varepsilon \dot{\xi}^1 = (\xi^1)^2 + \eta^1 + b^1_{\beta'} \eta^{\beta'} + c^1_\beta \xi^1 \eta^\beta + d^1_1 (\xi^1)^3 + e^1_{\alpha'} \xi^1 \xi^{\alpha'} + \ldots \equiv \Phi'(\xi, \eta), \\ &\varepsilon \dot{\xi}^i = a^i_{\alpha'} \xi^{\alpha'} + b^i_\beta \eta^\beta + c^i_0 (\xi^1)^2 + d^i_1 (\xi^1)^3 + e^i_{\alpha'} \xi^1 \xi^{\alpha'} + \ldots \equiv \Phi^i(\xi, \eta), \\ &\dot{\eta}^j = \delta^j_1 + \alpha^j_1 \xi^1 + \ldots \equiv \Psi^j(\xi, \eta), \\ &i = 2, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, l, \end{aligned} \tag{2}$$

причем все собственные значения матрицы $\| a^i_{\alpha'} \|$ имеют отрицательные действительные части. При $-p \leqslant \xi^1 \leqslant p$ (p — малое, но не зависящее от ε число) величину ξ^1 можно принять за независимую переменную и вместо системы (2) рассматривать систему

$$\frac{d\xi^i}{d\xi^1} = \frac{\Phi^i(\xi, \eta)}{\Phi^1(\xi, \eta)}, \qquad \frac{d\eta^j}{d\xi^1} = \varepsilon \frac{\Psi^j(\xi, \eta)}{\Psi^1(\xi, \eta)}, \tag{3}$$

$$i = 2, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, l.$$

Доказательства того, что формальные разложения решений системы (3), найденные в работе ([1]), представляют с вполне определенной точностью истинные решения этой системы, проводятся по разному на каждом из трех участков изменения переменного ξ^1: $-p \leqslant \xi^1 \leqslant -\sigma_1$, $-\sigma_1 \leqslant \xi^1 \leqslant \sigma_2$, $\sigma_2 \leqslant \xi^1 \leqslant p$, $\sigma_1 = \varepsilon^{2/7}$, $\sigma_2 = \varepsilon^{2/9}$. Однако основная идея этих доказательств одна и та же для всех трех участков. Эта идея состоит в построении «трубы». Формальное приближение окружается узкой замкнутой окрестностью U, которую мы называем т р у б о й; диаметр трубы зависит от ε и при $\varepsilon \to 0$ стремится к нулю как некоторая положительная степень ε.

Доказывается, что если начальную точку решения системы (3) взять в трубе U, то на всем протяжении соответствующего участка это решение не выйдет из трубы. С этой целью граница трубы U конструируется так, чтобы некоторые из ее «стенок» были функциями Ляпунова для системы уравнений (2), т. е. пересекались бы траекториями системы (2) при возрастании t в определенном направлении, именно «снаружи внутрь» трубы.

При построении трубы мы используем на всех участках положительно-определенную квадратичную форму $W(z^2, \ldots, z^k)$ — функцию Ляпунова для линейной системы

$$\dot{z}^i = a^i_{\alpha'} z^{\alpha'}, \quad i = 2, \ldots, k, \tag{4}$$

удовлетворяющую неравенству

$$W'_{(4)}(z^2, \ldots, z^k) < -\rho W(z^2, \ldots, z^k), \tag{5}$$

$\rho > 0$ (см. ([3])).

1. Участок $-p \leqslant \xi^1 \leqslant -\sigma_1$. Здесь вводятся новые координаты по формулам: $\xi^1 = \xi^1$; $\varphi^i = \Phi^i(\xi, \eta)$, $i = 1, \ldots, k$; $\eta^j = \eta^j$, $j = 2, \ldots, l$. В этих координатах система (2) записывается так:

$$\varepsilon\dot{\xi}^1 = \varphi^1, \quad \dot{\eta}^j = G^j(\xi^1, \varphi, \eta, \varepsilon),$$
$$\varepsilon\dot{\varphi}^1 = 2\xi^1\varphi^1 + K^1(\xi^1, \varphi, \eta, \varepsilon), \quad \varepsilon\dot{\varphi}^i = a^i_{\alpha'}\varphi^{\alpha'} + K^i(\xi^1, \varphi, \eta, \varepsilon). \tag{6}$$

Неавтономную систему, получающуюся из системы (6), если в последней принять за независимую переменную величину ξ^1, обозначим (6′). Построим формально суммы: а) $\varphi^{i,2} = \varepsilon\varphi^i_1(\xi^1) + \varepsilon^2\varphi^i_2(\xi^1)$; б) $\eta^j = \eta^j_0(\xi^1) + \varepsilon\eta^j_1(\xi^1)$, $i = 1, \ldots, k$; $j = 2, \ldots, l$, где функции $\varphi^i_1, \varphi^i_2, \eta^j_0, \eta^j_1$ определяются из соотношений, получающихся в результате подстановки сумм а) и б) в систему (6′) и последующего приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε.

Назовем трубой U_1 совокупность всех точек пространства $(\xi^1, \varphi^1, \ldots, \varphi^k, \eta^2, \ldots, \eta^l)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам: $|\varphi^1 - \varphi^{1,2}(\xi^1)| \leqslant \varepsilon M_1$; $W(\varphi^2 - \varphi^{2,2}(\varepsilon^1) \ldots \varphi^k - \varphi^{k,2}(\xi^1) \leqslant \varepsilon^2 N_1^2, |\eta^j - \eta^{j,1}(\xi^1)| \leqslant \varepsilon P_1, j = 2, \ldots, l$, где M_1, N_1, P_1 — положительные константы, не зависящие от ε. Совокупность точек трубы U_1, выделяемых уравнением $|\varphi^1 - \varphi^{1,2}(\xi^1)| = \varepsilon M_1$, назовем φ^1-стенкой и обозначим через $U_1^{\varphi_1}$; совокупность точек трубы U_1, выделяемых уравнением $W(\varphi^2 - \varphi^{2,2}(\xi^1), \ldots, \varphi^k - \varphi^{k,2}(\xi^1)) = \varepsilon^2 N_1^2$, назовем W-стенкой и обозначим через U_1^W.

Лемма 1. *На участке* $-p \leqslant \xi^1 \leqslant -\sigma_1$ *стенки* $U_1^{\varphi_1}$ *и* U_1^W *трубы* U_1 *при достаточно больших* M_1 *и* N_1 *являются поверхностями без контакта для системы уравнений* (6), *и все траектории системы* (6), *начинающиеся на стенках* $U_1^{\varphi_1}$ *и* U_1^W, *при возрастании* t *входят в трубу* U_1.

Для доказательства леммы 1 вычисляется производная в силу системы (6) на стенках $U_1^{\varphi_1}$ и U_1^W; она оказывается отрицательной.

С помощью леммы 1 методом последовательных приближений доказывается, что, если начальная точка некоторого решения системы (6′) при $\xi^1 = -p$ взята в трубе U_1, то на всем протяжении участка $-p \leqslant \xi^1 \leqslant -\sigma_1$ это решение не выходит из трубы U_1.

2. Участок $-\sigma_1 \leqslant \xi^1 \leqslant \sigma_2$. Здесь систему (2) запишем в новых переменных $\xi^1 = \mu u^1$; $\xi^i = \mu^2 u^i$, $i = 2, \ldots, k$; $\eta^1 = \mu^2 v^1$; $\eta^j = \mu^3 v^j$, $j = 2, \ldots, l$; $t = \mu^2\tau$; $\varepsilon = \mu^3$:

$$\dot{u}^1 = (u^1)^2 + v^1 + \mu F^1, \quad \mu\dot{u}^i = a^i_{\alpha'}u^{\alpha'} + b^i_1 v^1 + c^i_0(u^1)^2 + \mu F^i,$$
$$\dot{v}^1 = 1 + \mu\alpha^1_1 u^1 + \mu^2\Gamma^1, \quad \dot{v}^j = \alpha^j_1 u^1 + \mu\Gamma^j, \tag{7}$$
$$i = 2, \ldots, k, \quad j = 2, \ldots, {}'$$

(точкой обозначено дифференцирование по τ). Неавтономную систему, получающуюся из системы (7), если в последней принять за независимую переменную величину u^1, обозначим (7'). Как и в работе (1), выписываем формальные приближения:

$$u^{i,1} = u_0^i(u^1) + \mu u_1^i(u^1), \quad v^{1,1} = v_0^1(u^1) + \mu v_1^1(u^1), \quad v^{j,0} = v_0^j(u^1),$$
$$i = 2, \ldots, k, \quad j = 2, \ldots, l.$$

Назовем трубой U_2 совокупность всех точек пространства $(u^1, u^2, \ldots \ldots, u^k, v^1, \ldots, v^l)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам $W(u^2 - u^{2,1}(u^1), \ldots, u^k - u^{k,1}(u^1)) \leqslant \mu M_2^2$, $|v^1 - v^{1,1}(u^1)| \leqslant \mu N_2$, $|v^j - v^{j,0}| \leqslant \leqslant P_2$, $j = 2, \ldots, l$, где M_2, N_2, P_2 — положительные константы, не зависящие от ε. Совокупность точек трубы U_2, выделяемых уравнением $W(u^2 - - u^{2,1}(u^1) \ldots u^k - u^{k,2}(u^1)) = \mu M_2^2$, назовем W-стенкой и обозначим через U_2^W.

Лемма 2. *На участке* $-\sigma_1/\mu \leqslant u^1 \leqslant \sigma_2/\mu$ *стенка* U_2^W *трубы* U_2 *при достаточно большом* M_2 *является поверхностью без контакта для системы уравнений* (7), *и все траектории системы* (7), *начинающиеся на стенке* U_2^W, *при возрастании* τ *входят в трубу* U_2.

С помощью леммы 2 методом последовательных приближений доказывается, что, если начальная точка некоторого решения системы (7') при $u^1 = -\sigma_1/\mu$ взята в трубе U_2, то на всем протяжении участка $-\sigma_1/\mu \leqslant \leqslant u^1 \leqslant \sigma_2/\mu$ это решение не выходит из трубы U_2.

3. Участок $\sigma_2 \leqslant \xi^1 \leqslant p$. Пусть $\xi^i = \xi_0^i(\xi^1)$ — решение системы уравнений

$$\frac{d\xi^i}{d\xi^1} = \frac{\Phi^i(\xi, 0)}{\Phi^1(\xi, 0)}, \quad i = 2, \ldots, k, \tag{8}$$

определенное при $\xi^1 > 0$ и стремящееся к нулю при $\xi^1 \to 0$.

Назовем трубой U_3 совокупность всех точек пространства $(\xi^1, \ldots, \xi^k, \eta^1, \ldots, \eta^l)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам $W(\xi^2 - - \xi_0^2(\xi^1), \ldots, \xi^k - \xi_0^k(\xi^1)) = [R\varepsilon^{4/9}]^2$, $|\eta^j| \leqslant L\varepsilon^{2/3}$, где R и L — положительные константы. Множество точек трубы U_3, выделяемых уравнением $W(\xi^2 - - \xi_0^2(\xi^1), \ldots, \xi^k - \xi_0^k(\xi^1)) = [R\varepsilon^{4/9}]^2$, назовем W-стенкой и обозначим через U_3^W.

Лемма 3. *На участке* $\sigma_2 \leqslant \xi^1 \leqslant p$ *стенка* U_3^W *трубы* U_3 *при достаточно большом* R *является поверхностью без контакта для системы уравнений* (2), *и все траектории системы* (2), *начинающиеся на стенке* U_3^W, *при возрастании* t *входят в трубу* U_3.

С помощью леммы 3 методом последовательных приближений доказывается, что, если начальная точка некоторого решения системы (3) при $\xi^1 = \sigma_2$ взята в трубе U_3, то на всем протяжении участка $\sigma_2 \leqslant \xi^1 \leqslant p$ это решение не выходит из трубы U_3.

Поступило
6 III 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Понтрягин, Изв. АН СССР, сер. матем., 21, 605 (1957). [2] Е. Ф. Мищенко, Изв. АН СССР, сер. матем., 21, 627 (1957). [3] Л. С. Понтрягин, Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., 1955.