Д. В. Прохоров, А. М. Захаров, Множество значений функции и ее производной в классе однолистных отображений полуплоскости, *Изв. вузов. Матем.*, 1993, номер 2, 33–37

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1993 МАТЕМАТИКА № 2 (369)

УДК 517.546

А.М.ЗАХАРОВ, Д.В.ПРОХОРОВ

МНОЖЕСТВО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ В КЛАССЕ ОДНОЛИСТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Пусть H – множество всех голоморфных однолистных в полуплоскости $\Pi^+_z = \{z:\mathrm{Im}z>0\}$ функций $w=f(z)$, принимающих значения в Π^+_w и нормированных "гидродинамическим" условием

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in\Pi^+_z}} (f(z)-z) = 0.$$

Обозначим через H_1 совокупность всех функций из класса H, имеющих конечный предел

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in\Pi^+_z}} z(f(z)-z) = \{f\}_1.$$

Множество значений $\{f\}_1$ на классе H_1 есть полуось $(-\infty,0]$, причем $\{f\}_1=0$ лишь для тождественного отображения $f(z)=z$ (см., напр., [1], с.243). Для фиксированного $c\leqslant0$ будем обозначать через $H(c)$ ($\hat{H}(c)$) множество функций класса H_1, для которых $\{f\}_1=c$ ($\{f\}_1\geqslant c$).

Изучение экстремальных свойств однолистных отображений полуплоскости началось в конце 60-х годов, когда П.П.Куфаревым и его учениками был разработан и применен вариационно-параметрический метод. Центральной темой исследований на классе H и его подклассах является установление оценок функционалов (в том числе и коэффициентов разложения) и более общая задача описания множеств значений систем функционалов. Так, И.А.Александровым и В.В.Соболевым [2] были получены области значений систем $\{\ln\frac{\mathrm{Im}\,f(z)}{\mathrm{Im}\,z}, \ln|f'(z)|, \arg f'(z)\}$ на классе H и $\{f(z)\}$ на классе $H(c)$. Позднее Т.Н.Селляховой и В.В.Соболеву ([3], [4]) удалось на классе H полностью описать систему функционалов $J(f)=\{f(z),f'(z)\}$, а для функций из $H(c)$ установить точные оценки модуля производной. Следует упомянуть также о работе С.Т.Александрова [5], в которой даны точные оценки аргумента производной в зависимости от величины $\{f\}_1$ на некотором более широком (вследствие замены нормирующего условия) классе функций, чем $\hat{H}(c)$.

Некоторые из перечисленных результатов были позднее установлены сведением экстремальных задач к задачам оптимального управления и применением к ним принципа максимума Понтрягина.

Одним из авторов в [6] получено описание области значений системы $J(f)$ на классе $H(c)$. Решение основывалось на методах, опубликованных в [7]. Описание сведено к построению множества достижимости некоторой управляемой системы.

В данной заметке показано, что множества значений системы ф кционалов $J(f)$ в классах $H(c)$ и $\hat{H}(c)$ совпадают. Описание граничной поверхности упрощается с помощью выделения первого интеграла гамильтоновой системы с оптимальным управлением.

Обозначим через $D^c(z)$ ($\hat{D}^c(z)$) множество значений системы функционалов $J(f)=\{J_1,J_2,J_3,J_4\}$, $J_1=\mathrm{Re}f(z)$, $J_2=\mathrm{Im}f(z)$, $J_3=\ln|f'(z)|$, $J_4=\arg f'(z)$, на классе $H(c)\cup\{f(z)=z\}$ (или на классе $\hat{H}(c)$ соответственно), z фиксировано, $z\in\Pi_z^+$. Вариационным методом установлено [6], что функции, доставляющие граничные точки множества $D^c(z)$, отображают полуплоскость Π_z^+ на области $G=f(\Pi_z^+)$, получающиеся из Π_w^+ проведением разрезов по аналитическим дугам с не более чем двумя концевыми вершинами, лежащими в Π_w^+. Часть границы области G, находящаяся в верхней полуплоскости, представляет собой либо одну аналитическую дугу, либо совокупность двух аналитических дуг с вершинами на вещественной оси $\partial\Pi_w^+$, либо совокупность трех аналитических дуг, выходящих из точки полуплоскости Π_w^+ под углом $2\pi/3$ друг к другу. В каждом из этих случаев дуга, имеющая концевую точку на $\partial\Pi_w^+$, образует с осью $\mathrm{Im}w=0$ прямой угол.

Геометрическая характеристика позволяет установить ([1], с.234, [6], [8]), что для любой экстремальной относительно системы $J(f)$ функции $w=f(z)$ найдутся m ($m=1,2$) вещественных функций $u_k(t)$, непрерывных на $[0,-c]$, и m неотрицательных чисел λ_k, $\sum_{k=1}^{m}\lambda_k=1$, таких, что $f(z)=\omega(z,-c)$. Здесь под $\omega=\omega(z,t)$ понимается интеграл обобщенного уравнения Левнера

$$\frac{d\omega}{dt} = \sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k}{u_k-\omega}, \tag{1}$$

удовлетворяющий начальному условию

$$\omega(z,0) = z, \quad z\in\Pi_z^+. \tag{2}$$

Уравнение Левнера позволяет наряду с применением традиционного параметрического метода формулировать экстремальные задачи в терминах теории оптимального управления.

Пусть $m=1$ и $\omega=\omega(z,t)$ является решением задачи Коши для дифференциального уравнения Левнера (1) с начальным условием (2). Зафиксируем z, $z\in\Pi_z^+$, и введем обозначения:

$$x_1(t) = \mathrm{Re}\,\omega(z,t), \quad x_2(t) = \mathrm{Im}\,\omega(z,t),$$

$$x_3(t) = \ln\left|\frac{\partial\omega(z,t)}{\partial z}\right|, \quad x_4(t) = \arg\frac{\partial\omega(z,t)}{\partial z}.$$

Фазовые координаты вектора $X=X(t)=(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t),\ x_4(t))^T$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= g_1(X,v) = \frac{v}{v^2+x_2^2}, \quad x_1(0) = \mathrm{Re}z,\\
\frac{dx_2}{dt} &= g_2(X,v) = \frac{x_2}{v^2+x_2^2}, \quad x_2(0) = \mathrm{Im}z,\\
\frac{dx_3}{dt} &= g_3(X,v) = \frac{v^2-x_2^2}{(v^2+x_2^2)^2}, \quad x_3(0) = 0,\\
\frac{dx_4}{dt} &= g_4(X,v) = \frac{2x_2v}{(v^2+x_2^2)^2}, \quad x_4(0) = 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

полученной из (1), (2) дифференцированием по комплексной переменной и отделением вещественной и мнимой частей. Здесь в качестве управления выступает непрерывная функция $v(t)=u(t)-x_1(t)$.

Множество достижимости управляемой системы (3) в момент $t=-c>0$ есть совокупность всевозможных значений $X(-c)$ решений задачи Коши (3). Согласно теореме 3 из [1] (с.234) это множество совпадает с областью значений системы $J(f)$ на классе функций из $H(c)$, допускающих в полуокрестности $\{z:|z|>R,\ z\in\Pi_z^+\}$ бесконечно удаленной точки разложение в ряд

$$f(z) = z + \frac{c}{z} + \frac{\{f\}_2}{z^2} + \ldots + \frac{\{f\}_n}{z^n} + \ldots \tag{4}$$

с вещественными коэффициентами $\{f\}_k$. Экстремальные в задаче описания множества $D^c(z)$ функции f отображают Π_z^+ на области $G = f(\Pi_z^+)$, дополнение которых до полуплоскости Π_w^+ ограничено. Это условие является необходимым и достаточным для существования разложения (4). Таким образом, поиск множества $D^c(z)$ сводится к нахождению множества достижимости управляемой системы (3) в момент $t=-c$.

Следуя оптимизационному формализму, введем множители Лагранжа $\Psi=\Psi(t)=(\psi_1(t),\psi_2(t),\psi_3(t),\psi_4(t))^T$ и составим функцию Гамильтона

$$H(X,\Psi,v) = \sum_{j=1}^{4} g_j(X,v)\psi_j(t). \tag{5}$$

Координаты вектора $\Psi=\Psi(t)$ удовлетворяют сопряженной гамильтоновой системе. Функция $H(X,\Psi,v)$ не зависит от x_1, x_3 и x_4. Поэтому ψ_1, ψ_3, ψ_4 суть постоянные $\psi_1=\xi_1$, $\psi_3=\xi_3$, $\psi_4=\xi_4$, а $\psi_2=\psi_2(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial H(X,\Psi,v)}{\partial x_2}, \quad \psi_2(0) = \xi_2. \tag{6}$$

Найдем управление, максимизирующее функцию Гамильтона $H(X,\Psi,v)$, которая аналитически зависит от переменной v. Каждая точка из множества $U(X,\Psi)$ точек максимума этой функции удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial H(X,\Psi,v)}{\partial v} = 0, \tag{7}$$

которое эквивалентно алгебраическому уравнению четвертой степени относительно управления $v=v(t)$. Следовательно, при $\Psi\neq 0$ множество $U(X,\Psi)$ содержит не более двух элементов.

Обозначим через $\mathfrak{M}_m$, $m=1,2$, множество всех допустимых значений (X,Ψ), для которых множество $U(X,\Psi)$ состоит из m точек, и соответственно положим $\mathfrak{M}_m(X)=\{\Psi:(X,\Psi)\in\mathfrak{M}_m\}$. Замыкание конуса $\mathfrak{M}_1(X)$ совпадает с множеством всех допустимых векторов $\Psi=\Psi(t)$.

В случае $m=2$, соответствующем скользящему оптимальному режиму, система (3),(6) заменяется на "овыпукленную" систему:

$$\begin{gathered} \frac{dX}{dt} = \lambda G(X,v_1)+(1-\lambda)G(X,v_2), \quad X(0) = X^0, \\ \frac{d\Psi}{dt} = -\lambda\left(\frac{\partial G(X,v_1)}{\partial X}\right)^T\Psi-(1-\lambda)\left(\frac{\partial G(X,v_2)}{\partial X}\right)^T\Psi, \quad \Psi(0) = \xi, \end{gathered} \tag{8}$$

где $G=(g_1,g_2,g_3,g_4)^T$, $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)^T$, $0<\lambda<1$.

Пусть $\xi\in\mathfrak{M}_m(X^0)$. Выделим m непрерывных ветвей v_j, $j=\overline{1,m}$, алгебраической функции $v=v(X,\Psi)$, определяемой уравнением (7) и начальными условиями $v_j(X^0,\xi)\in U(X^0,\xi)$, $v_1(X^0,\xi)\neq v_2(X^0,\xi)$. В [6] доказана следующая

ТЕОРЕМА А. *Граница $\partial D^c(z)$, $z\in\Pi_z^+$, множества значений $J(f)$ на классе $H(c)\cup\{f(z)=z\}$ является объединением множеств Ω_1, Ω_2, не имеющих общих внутренних точек. Каждому из множеств Ω_m, $m=1,2$, взаимно однозначно соответствует множество $\mathfrak{M}_m(X^0)$, и справедливо параметрическое представление $\Omega_m=\{X(-c,\xi,\lambda):\xi\in\mathfrak{M}_m(X^0),\ \|\xi\|=1,\ 0<\lambda<1\}$, где $X(t,\xi,\lambda)$ есть проекция на фазовое пространство решения $(X(t,\xi,\lambda),\ \Psi(t,\xi,\lambda))$ задачи Коши для гамильтоновых систем (8) с непрерывными ветвями $v_j=v_j(X,\Psi)$, $j=\overline{1,m}$.*

Исследование скользящего режима, когда максимум функции Гамильтона доставляют две ветви v_1 и v_2, приводит к явному описанию части граничной поверхности $\partial D^c(z)$ [6]. Поиск другой части границы требует решения задачи Коши для гамильтоновой системы (3),(6) с оптимальным управлением. Это система пяти обыкновенных дифференциальных уравнений.

Покажем, что в описании граничной гиперповерхности Ω_1 можно ограничиться фазовыми дифференциальными уравнениями.

Управляемая система (3) автономна, и функция Гамильтона (5) не зависит от времени t. Поэтому если v – оптимальное управление, то $H(X,\Psi,v)\equiv\mathrm{const}$. Это равенство выражает первый интеграл гамильтоновой системы. Исключим из (3) функцию ψ_2, появляющуюся при подстановке оптимального управления v. Алгебраическая функция $v=v(X,\Psi)$, определяемая уравнением (7), аналитична по своим переменным. Рассмотрим равенство

$$F(X,\Psi,\xi) = H(X,\Psi,v(X,\Psi))-H(X^0,\xi,v(X^0,\xi)) = 0. \tag{9}$$

Как следует из (3), производная

$$\frac{\partial F(X,\Psi,\xi)}{\partial\psi_2} = g_2(X,v(X,\Psi))$$

строго положительна. Следовательно, (9) определяет дифференцируемую неявную функцию $\psi_2=\psi_2(X,\xi)$, и управление $v_0(X,\xi)=v(X,\Psi(X,\xi))$ зависит только от X и от начального условия ξ.

Сформулируем доказанный результат.

ТЕОРЕМА 1. *Гиперповерхность Ω_1 имеет параметрическое представление $\Omega_1=\{X(-c,\xi):\ \xi\in\mathfrak{M}_1(X^0),\ \|\xi\|=1\}$, где $X(t,\xi)$ – решение задачи Коши для управляемой системы* (3) *с непрерывным оптимальным управлением $v=v_0(X,\xi)$.*

Исследуем множество значений системы функционалов $J(f)$ на классе $\hat{H}(c)$.

ТЕОРЕМА 2. *Множества $D^c(z)$ и $\hat{D}^c(z)$ совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно показать, что экстремальными в задаче описания множества значений системы $J(f)$ на классе $\hat{H}(c)$ являются функции класса $H(c)$ либо тождественное отображение.

Множество $D^c(z)$ есть множество достижимости управляемой системы (3) в момент $t=-c$. Будем доказывать, что при $s>c$ справедливо включение $D^s(z)\subset D^c(z)$.

Пусть $\xi\in\mathfrak{M}_m(X^0)$ и λ, $0<\lambda<1$, фиксированы. Вектор $\Psi=\Psi(t,\xi,\lambda)$ коллинеарен внешней нормали к поверхности $\partial D^c(z)$ при $t=-c$ (см. [6], [7]). Траектория $X(t,\xi,\lambda)$ в фазовом пространстве в момент времени $t=-c$ имеет касательный вектор $\left.\frac{\partial X(t,\xi,\lambda)}{\partial t}\right|_{t=-c}$. Скалярное произведение $\frac{\partial X(t,\xi,\lambda)}{\partial t}\cdot\Psi(t,\xi,\lambda)$ есть функция Гамильтона $H(X,\Psi,v)$, где в качестве v взято оптимальное, т.е. доставляющее максимум H, управление. Как показано в [6], выбор непрерывной ветви алгебраической функции $v=v(X,\psi)$, порожденной уравнением (7), можно произвести в начальный момент $t=0$. Благодаря этому свойству оптимизационной задачи, достаточно исследовать знак максимального значения функции Гамильтона при $t=0$.

Уравнение (5) определяет $H(X,\Psi,v)=Q(X,\Psi,v)/P(X,\Psi,v)$ как рациональную функцию относительно управления v. Степень полинома Q на единицу меньше, чем степень полинома P. Если $\xi_1>0$, то $H(X,\Psi,v)\longrightarrow+0$ при $v\longrightarrow+\infty$ и $H(X,\Psi,v)\longrightarrow-0$ при $v\longrightarrow-\infty$. Если $\xi_1<0$, то соответственно $H(X,\Psi,v)\longrightarrow-0$ при $v\longrightarrow+\infty$ и $H(X,\Psi,v)\longrightarrow+0$ при $v\longrightarrow-\infty$. В любом случае максимум функции Гамильтона положителен.

Пусть $\xi_1 = 0$. Из условия $\xi_2 \mathrm{Im} z + \xi_3 > 0$ подобно предыдущему вытекает неравенство $\max\limits_{v} H(X,\Psi,v)>0$. При выполнении обратного неравенства $\xi_2 \mathrm{Im} z+\xi_3<0$ следует учитывать знак дискриминанта $\mathscr{D}=4\mathrm{Im}^2 z(\xi_3^2+\xi_4^2-\xi_2^2\mathrm{Im}^2 z)$ квадратного трехчлена в числителе уравнения (5). Если $\mathscr{D}>0$, то максимум функции Гамильтона снова положителен. При $\mathscr{D}<0$ существует оптимизирующая последовательность, но нет оптимального управления. Этот случай возникает как проявление некомпактности класса $H(c)$. Пополнение его функцией $f(z)=z$ делает множество $D^c(z)$ замкнутым, причем последовательность точек из $D^c(z)$, индуцированных оптимизирующей последовательностью управлений, сходится к точке $\{\mathrm{Re} z,\mathrm{Im} z,0,0\}$, вносимой тождественным отображением.

Выполнение равенства $\mathscr{D}=0$ обеспечивает существование оптимального управления, но $\max\limits_{v} H(X,\Psi,v)=0$. В силу постоянства функции Гамильтона вектора $\frac{\partial X(t,\xi,\lambda)}{\partial t}$ и $\Psi(t,\xi,\lambda)$ остаются ортогональными при любом $t>0$. На участке граничной гиперповерхности, определяемом такими начальными данными, с изменением времени t не происходит ни расширения, ни сужения множества значений системы $J(f)$, и точки границы, вносимые функциями класса $H(s)$, доставляются также функциями любого из классов $H(c)$, $c<s$.

Остановимся на возможностях, возникающих при $\xi_2\mathrm{Im} z+\xi_3=0$. Если $\xi_4\neq0$, то $\max\limits_{v} H(X,\Psi,v)>$ >0. При $\xi_4=0$ выполнение неравенства $\xi_3<0$ приводит к такому же результату, а $\xi_3>0$ – к описанному ранее случаю отсутствия оптимального управления.

Наконец, равенство нулю всех начальных данных ξ_j, $j=\overline{1,4}$, невозможно, т.к. приводит к вырождению задачи оптимального управления.

Итак, за исключением оговоренных ситуаций, максимум функции Гамильтона положителен, и касательная к траектории $X(t,\xi,\lambda)$ в фазовом пространстве образует с вектором нормали к граничной поверхности острый угол. Отсюда непосредственно вытекает свойство областей $D^c(z)$ расширяться с ростом времени. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров И.А. *Параметрические продолжения в теории однолистных функций.* – М.: Наука, 1976. – 344 с.

2. Александров И.А., Соболев В.В. *Экстремальные задачи для некоторых классов функций, однолистных в полуплоскости* // Укр. матем. журн. – 1970. – Т.22. – №3. – С.291–307.

3. Селляхова Т.Н., Соболев В.В. *О взаимном изменении величин* $\log f'$ *и* $f(z)$ *для одного класса функций, однолистных в полуплоскости* // Тр. зональн. объедин. матем. кафедр пед. ин-тов Сибири. – Красноярск, 1972. – Вып.1. – С.176–192.

4. Селляхова Т.Н., Соболев В.В. *Исследование экстремальных свойств одного класса однолистных конформных отображений полуплоскости в себя* // Некотор. вопр. соврем. теории функций. – Новосибирск, 1976. – С.142–145.

5. Александров С.Т. *Теорема вращения для класса однолистных в полуплоскости функций, полуконформных в бесконечности.* – М., 1986. – 20 с. Деп. в ВИНИТИ АН СССР 18.04.86, № 2858–В86.

6. Захаров А.М. *Множество значений системы функционалов* $\{f(z),f'(z)\}$ *для однолистных в полуплоскости функций.* – М., 1992. – 38 с. Деп. в ВИНИТИ АН СССР 26.05.92, №1745–В92.

7. Прохоров Д.В. *Множества значений систем функционалов в классах однолистных функций* // Матем.сб. – 1990. – Т.181. – № 12. – С.1659–1677.

8. Соболев В.В. *Параметрические представления для некоторых классов функций, однолистных в полуплоскости* // Уч. зап. Кемеров. гос. пед. ин-та. – Кемерово, 1970. – Вып. 23. – С.30–41.

г.Саратов

Поступила
25.01.1993