А. Б. Гулисашвили, David Ruelle. “Chaotic Evolution and Strange Attractois. The Statistical Analysis of Time. Series for Deterministic Nonlinear Systems. Notes prepared by Stefano Isola from the “Lezioni Lincee” (Rome, May 1987) // Cambridge: University Press, 1989. 96 p.,

Алгебра и анализ, 1991, том 3, выпуск 4, 227–240

https://www.mathnet.ru/aa276

Алгебра и анализ
Том 3 (1991), вып. 4

РЕЦЕНЗИИ

David Ruelle. Chaotic Evolution and Strange Attractors. The Statistical Analysis of Time Series for Deterministic Nonlinear Systems. Notes prepared by Stefano Isola from the "Lezioni Lincee" (Rome, May 1987)//Cambridge: University Press, 1989. 96 p.

> A French mathematical physicist had just made the disputatious claim that turbulence in fluids might have something to do with a bizzare, infinitely tangled abstraction that he called a strange attractor.
>
> J.Gleick. Chaos, Making a New Science

> But he's so well preserved because he's observed.
>
> T.S.Eliot. Old Possum's Book of Practical Cats

Человек, не разбирающийся в тонкостях науки, искренне удивится, прочитав о математической теории хаоса. Ведь математика, — подумает он, — это неприступная цитадель строгости и порядка, тогда как хаос — синоним путаницы и беспорядка, и поэтому не может быть и речи о сосуществовании столь несовместимых понятий.

Тем не менее область математики с таким интригующим названием существует и лавинообразно развивается. У науки о хаосе есть свои классики (А.Пуанкаре, Г.Биркгоф, Ж.Адамар, С.Смейл, Е.Лоренц и др.), свои биографы (Дж.Гляйк [23]) и даже свои суровые критики (С.Кранц [30]).

В монографии Г.Шустера „Детерминированный хаос" [14] приведена следующая этимологическая справка: „Согласно Британской энциклопедии, слово „хаос" происходит от греческого „$\chi\alpha o s$". Первоначально оно означало бесконечное пространство, существовавшее до появления всего остального. Позднее римляне интерпретировали хаос как изначальную сырую бесформенную массу, в которую Создатель привнес порядок и гармонию".

Мы поступим наперекор Создателю и начнем с порядка и гармонии. Рассмотрим систему эволюционных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \dots, x_m), \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{1}$$

определенную на m-мерном компактном ориентируемом многообразии M (или в области евклидова пространства $\mathbb{R}^m$). Закон эволюции процесса, который описывается уравнениями (1), задан при помощи гладких функций F_i в правых частях рассматриваемых уравнений.

Известно, что для подобных систем имеют место теоремы существования и единственности, и, следовательно, по любой точке $y \in M$ можно однозначно определить решение x_y уравнений (1) с начальным условием $x_y(0) = y$.

Исчерпывающая летопись жизни системы (1) записывается как однопараметрическая группа диффеоморфизмов $\{f^t\}$,[1] $t \in \mathbb{R}^1$, многообразия M, где

$$f^t(y) = x_y(t), \quad y \in M, \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

Такая жизнь полностью регламентирована и предопределена, и, казалось бы, не может быть и речи о хаотическом поведении траекторий.

Однако некоторые из систем (1) помнят о хаотических временах язычества. У них наблюдается так называемая „чувствительность к начальным условиям", что служит характерным признаком хаотичности. Точки фазового пространства, задающие близкие стартовые состояния, начинают с течением времени разлетаться с экспоненциальной скоростью, и всякая связь между ними теряется. Получается, что, несмотря на полную предопределенность будущего, невозможно дать даже краткосрочный правильный прогноз поведения решений такой системы. Траектории в фазовом пространстве выглядят беспорядочно блуждающими, и, кажется, что движение вдоль траекторий не подчиняется никаким законам.

По-видимому, самая известная хаотическая система уравнений — это система Лоренца

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz, \end{aligned} \tag{2}$$

полученная как модель конвекционных процессов, происходящих в горизонтальном слое жидкости, подогреваемом снизу.[2] Методами численного моделирования с использованием компьютеров было установлено, что при некоторых значениях параметров σ, b и r поток $\{f^t\}$ вдоль решений системы (2) хаотичен, т.е. у него наблюдается чувствительность к начальным условиям.

Уравнения Лоренца служат приближенной моделью конвекционных процессов в земной атмосфере. Хаотическое поведение траекторий системы (2) при некоторых значениях параметров часто интерпретируют как невозможность долгосрочного правильного прогноза погоды. Лоренц назвал метаморфозы, происходящие с погодой, „эффектом бабочки". Взмах крыльев бабочки может внести лишь ничтожно малое возмущение в начальные условия, однако ввиду экспоненциального разбегания траекторий малые начальные отклонения быстро растут, что приводит к значительным несовпадениям с ожидаемым прогнозом.

Чувствительность к начальным условиям наблюдается и у совсем простых динамических систем с дискретным временем. Одна из таких систем в пространстве $\mathbb{R}^2$ была построена Эно (Hénon). Диффеоморфизм $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, итерации которого $\{h^n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, порождают систему Эно, задается при помощи равенства

$$h(x, y) = (y + 1 - ax^2, bx), \quad a > 0, b > 0.$$

При $0 < b < 1$ под действием отображения h происходит сокращение площадей плоских фигур, поскольку якобиан диффеоморфизма h тождественно равен числу b. Геометрически отображение Эно при малых значениях параметра b как бы растягивает множества в одном направлении, сильно сжимает в другом, складывает

[1] Группа $\{f^t\}$ иначе называется потоком

[2] О том, как получаются уравнения Лоренца, можно прочитать в [14]

и поворачивает. Совокупность подобных преобразований ограниченной области, как правило, и приводит к хаотической динамике. Более подробные сведения о системах Лоренца и Эно имеются в [14, 22] и [18].

Для того чтобы описать асимптотическое поведение динамической системы, следует найти все замкнутые инвариантные множества, к которым притягиваются массивные семейства траекторий. Такое множество носит математическое имя „аттрактор“.

Приведем определение аттрактора в случае динамической системы $\{f^n\}$ с дискретным временем (см. [18]).[3] Множество A называется аттрактором системы $\{f^n\}$, если существует открытое множество U, для которого 1) $A \subset U$; 2) $f(\mathrm{clos}(U)) \subset U$; 3) $A = \bigcap\limits_{n\geqslant 0} f^n(U)$. Из определения сразу следует f-инвариантность аттрактора, а из легко доказываемого равенства

$$A = \bigcap_{n\geqslant 0} f^n(\mathrm{clos}(U))$$

заключаем, что аттрактор всегда замкнут.

Аттракторами могут быть неподвижные точки или периодические траектории (классические аттракторы), однако эти примеры не исчерпывают всего богатства типов притягивающих множеств. Некоторые из аттракторов имеют сложную геометрическую структуру и даже дробную хаусдорфову размерность.

Часто в определение аттрактора добавляют различные дополнительные условия. Так появляются транзитивные, фрактальные, хаотические и устойчивые к малым возмущениям аттракторы.

Транзитивность аттрактора A означает, что сужение динамической системы $\{f^n\}$ на аттрактор топологически транзитивно, т.е. существует точка $x \in A$, для которой множество $\{f^n(x)\}$, $n \in \mathbb{Z}$, плотно в A. Фрактальность аттрактора A мы будем понимать как равенство его хаусдорфовой размерности нецелому числу. Хаотичность аттрактора A — это чувствительность к начальным условиям у динамической системы $\{f^n\}$, суженной на множество A. И наконец, устойчивый аттрактор A — это такой, для которого диффеоморфизм f, порождающий динамическую систему, структурно устойчив.[4] (см.[10, 18, 35]). Если аттрактор A устойчив, то при переходе к близким системам его глобальная структура не меняется.

В настоящее время все большую популярность приобретает термин „странный аттрактор“, введенный в математический жаргон Д.Рюэлем и Ф.Такенсом (см. [34]). Обычно странными называют хаотические аттракторы, хотя иногда под странностью понимают и фрактальность аттрактора.

Один из объектов, по отношению к которому Рюэль и Таненс употребили столь удачный термин, — это соленоид, представляющий собой аттрактор для некоторой динамической системы $\{f^n\}$, заданной в окрестности тора T (с внутренностью) в пространстве $\mathbb{R}^3$. Под действием диффеоморфизма f исходный тор преобразуется в новый тор, находящийся внутри T и обегающий T дважды. Известно, что соленоид транзитивен, хаотичен, фрактален и устойчив (см. [18, 22]).

Родиной термина „странный аттрактор“ можно считать такой отрывок из [34]: „Возвращаясь к случаю векторного поля X, мы наблюдаем присутствие

[3] В математической литературе имеются и другие определения аттракторов (см., например, рецензируемую книгу)

[4] По определению диффеоморфизм f структурно устойчив, если все диффеоморфизмы из некоторой C^1-окрестности отображения f топологически сопряжены с f

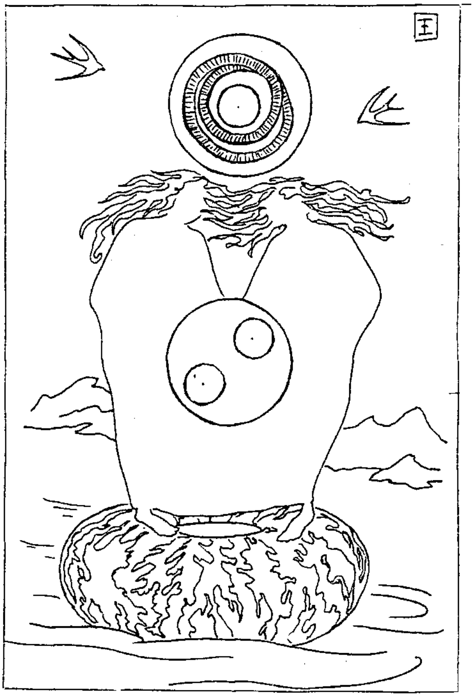

Рис. 1. Соленоид.

„странного аттрактора“, который локально представляет собой произведение канторова множества и куска двумерного многообразия. Следует отметить, что та же самая картина сохраняется при замене X на векторное поле Y, достаточно близкое к X, в удобным образом подобранном банаховом пространстве. Следовательно, аттрактор только что описанного типа нельзя просто отбросить как нетипичную патологию“.

Важность работы [34] заключается в том, что в ней был предложен новый хаотический сценарий появления турбулентного течения у вязкой несжимаемой жидкости.

Поведение такой жидкости, занимающей объем $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, задается полем скоростей $\{v\}$, которое должно удовлетворять уравнениям Навье–Стокса

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_j v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \nu \Delta v_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i, 1 \leqslant i \leqslant 3,$$
$$\operatorname{div} v = 0, \tag{3}$$

и некоторым начальным и граничным условиям. В уравнениях (3) $f = (f_1, f_2, f_3)$

— это внешняя сила, ρ — постоянная плотность, p — давление, а ν — коэффициент кинематической вязкости.

Известно, что спроектировав уравнения Навье–Стокса на соответствующим образом подобранное пространство векторных полей, мы получим эволюционное уравнение

$$\frac{dv}{dt} = X_\mu(v),$$

зависящее от параметра (см., например, [32]). Таким параметром может быть, например, число Рейнольдса (за сведениями из гидродинамики мы отсылаем читателя к [5, 9] или [13]).

Турбулентное течение жидкости, появляющееся при больших значениях числа Рейнольдса, пока еще недостаточно хорошо понято и объяснено. Было предложено несколько гипотез о причинах возникновения турбулентности. Упомянем только некоторые из них.

В 1934 г. Ж.Лере [27] высказал предположение, что турбулентность возникает из-за того, что у решений уравнений Навье–Стокса, которые существуют только локально, могут иметься сингулярности в конечные моменты времени.[5] Пока неизвестно, так ли это на самом деле, однако даже если такие сингулярности и существуют, то они образуют очень тонкое множество в пространстве $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1$. В работе [17] доказано, что для широкого класса решений уравнений Навье–Стокса множество точек пространства $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1$, в окрестности которых решение неограничено, имеет размерность по Хаусдорфу, строго меньшую единицы.

Другой сценарий был разработан Л.Д.Ландау [8]. Он предположил, что решения системы (3) имеют вид

$$v(t) = \tau(\omega_1 t, \ldots, \omega_k t),$$

где $\tau - 2\pi$-периодическая функция относительно всех своих аргументов, а $\omega_1, \ldots, \omega_k$ — рационально независимые частоты. Такая функция v называется квазипериодической. При росте параметра μ согласно теории Ландау должны появляться все новые и новые частоты, пока движение не станет очень сложным и похожим на хаотичное.

Рюэль и Такенс предложили новое объяснение того, как возникает турбулентность. Они утверждали, что хаотичность — это не кажущееся, а внутренне, присущее турбулентному течению свойство. При росте параметра μ после появления нескольких независимых частот происходит полная хаотизация движения, и асимптотическое поведение решений определяется присутствием непрерывного спектра частот и странного аттрактора. Имеются некоторые экспериментальные подтверждения этой гипотезы (см. [25]). Весомый вклад в развитие теории гидродинамических аттракторов внесли работы О.А.Ладыженской (см. [6, 7]). В настоящее время ясно, что без математической теории хаоса не обойтись, если мы хотим понять, что такое турбулентность и как она возникает.

Несколько слов в терминологии. Самые популярные термины теории хаоса — это „странный аттрактор“, „хаос“ и „фрактал“. Об аттракторах уже было сказано выше. Слово „хаос“ для описания беспорядочного движения траекторий некоторых нелинейных динамических систем было использовано Ли и Иорке в [26], хотя еще Н.Винер дал название „Однородный хаос“ одной из своих работ [36], посвященных изучению броуновского движения.

[5] По определению в точке $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1$ имеется сингулярность, если решение в окрестности этой точки неограничено

Имя изобретателя термина „фрактал“ общеизвестно — это Б.Мандельброт (см. [28]). Фрактальная лихорадка приобрела за последнее время широкие масштабы, она сравнима с экспансией теории катастроф в 70-е годы (об увлечении катастрофами интересно написано в [3]). Многие математики опасаются, что попытки объявить фракталы „основой всех основ“ и чрезмерное использование компьютеров приведут к снижению математических стандартов (П.Халмош как-то заметил, что компьютеры хороши, но не для математики). Интересная дискуссия о фракталах и теории хаоса развернулась на страницах журнала "Mathematical Intelligencer"(см.[30, 31]). Тон полемике задали статьи С.Кранца и М.Хирша. Эти статьи, а также ответы их оппонентов читаются с большим интересом. Кранц и Хирш защищают содержательную математику от поверхностной, которая для прикрытия своей бедности нуждается в красивых иллюстрациях и активных популяризаторах. Конечно, теория хаоса и теория фракталов содержат глубокие результаты, но их следует четко выделять среди необозримого мелководья.

С.Кранц писал: „Меня очень беспокоит $< \dots >$ то, что сегодня общественное восприятие деятельности математиков во многом основывается на чтении книг о фракталах, книги Дж.Гляйка „Хаос“ и сообщений об ошибочных решениях старых проблем. Последний источник я считаю просто ужасным, а первые два — сбивающими с правильного пути. И теория фракталов, и теория хаоса пока еще очень молоды и слишком рано предполагать, разовьются ли они в зрелые науки“.

Автору данной рецензии пришлось на собственном опыте убедиться в активности фрактальной пропаганды. Во время посещения музея Гуггенхайма в Нью-Йорке весной 1990 г. я видел объявление с анонсом о предстоящем представлении под названием „Музыка и фракталы“. Текст гласил: „Математик из IBM и университета Yale Бенуа Б.Мандельброт, „отец фракталов“, представит необычные образы, нарисованные при помощи компьютера. Показ будет сопровождаться выступлением группы современной музыки "New York Notes" под управлением Чарльза Вуоринена, которая использует двоично синтезированный звук. Автор программы музыковед Джоан Прайзер проведет дискуссию с Мандельбротом о значении фракталов для музыки“ ...

Однако вернемся к математической теории хаоса. Если мы хотим придумать хорошее общее определение хаотического непрерывного отображения $f : D \to D$, действующего на метрическом пространстве D, то нам следует уравновесить дозы „порядка и хаоса“, содержащиеся в нем.

Одно из таких определений было предложено в [18]. Согласно этому определению, отображение f называется хаотическим, если

1) для некоторой точки $x \in D$ ее орбита $\{f^n(x)\}$, $n \geqslant 0$, плотна в D (топологическая транзитивность);

2) множество периодических точек отображения f плотно в D (порядок среди хаоса);

3) существует $\delta > 0$ такое, что для любых $x \in D$ и $\varepsilon > 0$ найдется $y \in D$, удовлетворяющее неравенствам $\operatorname{dist}(x, y) \leqslant \varepsilon$, $\operatorname{dist}(f^k(x), f^k(y)) \geqslant \delta$ для некоторого $k \geqslant 0$ (чувствительность к начальным условиям).

В книге [18] разобраны различные примеры хаотических отображений. Наш старый знакомый, соленоид, относится к их группе. Некоторые более общие примеры появляются в теории гиперболических диффеоморфизмов, развитой Д.В.Аносовым (см. [1], а также лекции [2]) и С.Смейлом (см. [35]).

Приведем необходимые определения. Точка $x \in M$ называется блуждающей точкой диффеоморфизма $f : M \to M$, если существует открытое множество U, для которого $x \in U$ и $f^n(U) \cap U = \varnothing$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Все остальные точки называются неблуждающими. Они образуют замкнутое f-инвариантное множество, обозначаемое через $\Omega(f)$.

С.Смейл [35] ввел в рассмотрение важный класс отображений (диффеоморфизмы, удовлетворяющие аксиоме А). Условия, задающие этот класс, таковы: гиперболичность множества $\Omega(f)$ и плотность в $\Omega(f)$ множества периодических точек диффеоморфизма f. Гиперболичность означает, что сужение касательного расслоения TM многообразия M на множество $\Omega(f)$ представимо в виде непрерывной инвариантной прямой суммы двух подрасслоений, причем вдоль одного из них касательное отображение Tf действует как растяжение, а вдоль другого — как стажие.

Смейл получил для множества $\Omega(f)$ разложение

$$\Omega(f) = \Omega_1 \cup \cdots \cap \Omega_k$$

на попарно не пересекающиеся замкнутые инвариантные множества Ω_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, на каждом из которых отображение f топологически транзитивно (множества Ω_i называются базисными множествами для диффеоморфизма f).

Обещанными общими хаотическими отображениями будут сужения диффеоморфизма f на каждое из своих нетривиальных базисных множеств.[6] Условия 1 и 2 хаотичности отображения следуют из определений. Что касается чувствительности к начальным условиям, то она присутствует в более сильной форме: сужение диффеоморфизма f на Ω_i будет разделяющим отображением, т.е. существует $\delta > 0$ такое, что для любых x, $y \in \Omega_i$ найдется $n \geqslant 0$, для которого $\operatorname{dist}(f^n(x), f^n(y)) \geqslant \delta$ (см., например, [10]).

Среди специалистов по теории хаоса распространено мнение, что источником хаотического поведения решений системы (1) служат нелинейности, присутствующие в задаче. Однако в последнее время было установлено, что существуют хаотические линейные операторы и даже хаотические однопараметрические полугруппы линейных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве [24,29].

Ограниченный линейный оператор T на банаховом пространстве X называется гиперциклическим, если существует вектор $x \in X$, имеющий плотную в X орбиту $\{T^n(x)\}$, $n \geqslant 0$ (гиперциклический вектор). В работе [24] Годфруа и Шапиро доказали, что для гиперциклического оператора T имеет место чувствительность к начальным условиям в следующей форме: для любого $x \in X$ существует плотное G_δ-множество $S(x)$ такое, что множество $\{T^n(x) - T^n(y) : n \geqslant 0\}$ плотно в X для каждого $y \in S(x)$. Следовательно, гиперциклический оператор хаотичен, если множество периодических точек этого оператора плотно в X.

В работе [24] приведены различные примеры хаотических гиперциклических операторов. В частности, доказано, что хаотическим будет оператор λB, где λ — комплексное число, $|\lambda| > 1$, а B — оператор обратного сдвига на сепарабельном гильбертовом пространстве H, определяемый на базисных векторах $\{e_i\}$, $i \geqslant 1$, по правилу

$$B(e_1) = 0; \quad B(e_i) = e_{i-1}, i \geqslant 2.$$

Еще один пример хаотического отображения — это линейный оператор M_φ^*, сопряженный к оператору умножения $M_\varphi(f) = \varphi \cdot f$, $f \in A^2(\Omega)$, где $A^2(\Omega)$[7] —

[6] Нетривиальность означает, что базисное множество не является неподвижной точкой или периодической траекторией

[7] $A^2(\Omega)$ — это гильбертово пространство аналитических в Ω функций со скалярным произ-

пространство Бергмана в области Ω комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а φ — ограниченная непостоянная аналитическая в Ω функция такая, что $\varphi(\partial\Omega)$ пересекается с единичной окружностью (см. [24]).

Основываясь на результатах работы [24], Мак-Клюэр [29] доказал, что однопараметрическая линейная полугруппа $T(t) = e^{tB}$, $t > 0$, где B — оператор обратного сдвига, хаотична. Отсюда следует, что решения линейного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = B(x)$$

в пространстве H характеризуются хаотическим поведением. Интересно было бы понять физический смысл этого утверждения.

В математической теории хаоса важное место занимает изучение метрических свойств аттракторов. Тут нам на помощь приходит эргодическая теория. В эргодическом мире аттрактор A динамической системы $\{f^n\}$ рассматривается в компании с f-инвариантной эргодической нормированной борелевской мерой μ, сосредоточенной на множестве A. Такие меры всегда существуют (см., например, [19]), однако их чаще всего бывает много, и речь идет о том, как выбрать среди них в каком-то смысле естественную меру.

Согласно эргодической теореме Биркгофа, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h(f^k(x)) = \int\limits_M h\,d\mu, \qquad h \in C(M),$$

μ-почти всюду на M. Отсюда вытекает, что для μ-почти всех точек $x \in M$ последовательность усреднений δ-мер вдоль траекторий рассматриваемой динамической системы

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{f^k(x)}, \qquad n \geqslant 1, \tag{1}$$

слабо* сходится к мере μ.

В случае аттрактора A нулевой лебеговой меры набор подобных начальных точек x слишком беден, поэтому естественно потребовать, чтобы слабая* сходимость последовательности (4) имела место почти всюду по мере Лебега в некотором открытом множестве, содержащем аттрактор. Если такая мера μ существует, то она единственна, и мы будем обозначать ее через μ_A.

Существование меры μ_A известно для аттракторов C^2-динамических систем, удовлетворяющих аксиоме A Смейла (см. [16, 33]). Для этих аттракторов мера μ_A совпадает с так называемой мерой Синая–Рюэля–Боуэна или, иначе говоря, с мерой, у которой условные меры на неустойчивых многообразиях абсолютно непрерывны относительно мер, индуцированных римановым объемам (см. обзор [19], где можно найти точное определение). Впервые подобные меры рассматривал Я.Г.Синай [11, 12] в случае систем Аносова. Мера Синая–Рюэля–Боуэна и выигрывает соревнование за право называться естественной эргодической мерой на аттракторе.

В рецензии [4] имеется список различных фрактальных объектов, названный „зоопарком фрактальных множеств“. Я хотел бы пополнить его новыми поступлениями и пристроить к зоопарку еще один корпус с табличкой „хаотические множества“ над входом.

ведением

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_\Omega f(x+iy)\cdot\overline{g(x+iy)}\,dx dy, \qquad f, g \in A^2(\Omega).$$

Прежде всего я хочу исправить одну неточность в рецензии [4], где „подкова“ Смейла (см. [10, 18, 35]) была помещена в клетку „странные аттракторы“. Дело в том, что в книге [21] под „подковой“ Смейла понимался аттрактор A некоторой динамической системы $\{f^n\}$, заданной в прямоугольнике $P \subset \mathbb{R}^2$. Образ множества P под действием диффеоморфизма f лежит внутри P и имеет вид подковы (в книге [18] область определения диффеоморфизма f выглядит как стадион, наблюдаемый сверху, и далее под P подразумевается именно такое множество). Аттрактор A не транзитивен и не хаотичен, поскольку внутри множества A существует притягивающая неподвижная точка x отображения f (она лежит в левом полукруглом крыле „стадиона“ P (см. [18]).

Рис. 2. Подкова Смейла.

Собственно „подкова“ Смейла Q, как она понимается в литературе по динамическим системам, — это замкнутое инвариантное подмножество аттрактора A, лежащее в центральной квадратной части „стадиона“ P. Подкова Q представляет собой базисное множество диффеоморфизма f и выглядит как декартово произведение двух канторовых множеств. Она не является аттрактором, поскольку в любой окрестности множества Q имеются точки, которые под действием итераций отображения f „улетают" в окрестность неподвижной точки x и начинают к ней притягиваться (см., например, [18]). Сужение динамической системы $\{f^n\}$ на подкову Q хаотично согласно сформулированной выше теореме о базисных множествах.

Как и было обещано, в новой пристройке к зоопарку фрактальных множеств будут такие клетки:

1) Подковообразные объекты. В эту клетку я помещаю подкову Смейла и аттрактор Эно (см. [10,14,22,35]).

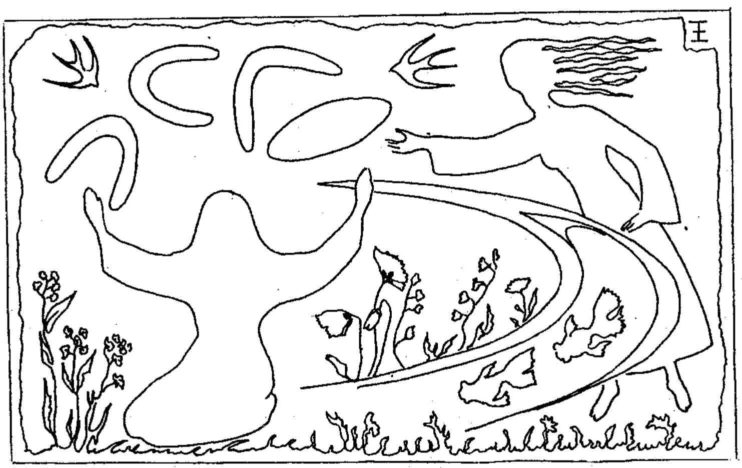

Рис. 3. Аттрактор Эно.

2) Соленоид. Это оригинальное существо я хочу поселить отдельно. О соленоиде можно прочитать в [18] и [22].

3) Аттракторы Лоренца и Рёсслера (см. [14] и [22]). Они представляют собой притягивающие множества для систем эволюционных уравнений. Компьютерные изображения этих аттракторов весьма популярны, их можно увидеть на обложках книг и на майках.[8] Вместе с ними в клетку № 3 можно поместить и „бабочку" Лоренца.

Основное здание зоопарка приобретает новую клетку с фракталом Кизветтера, который представляет собой инвариантное множество для некоторой системы из четырех аффинных преобразований плоскости. Это множество принадлежит к семейству самоаффинных множеств (self-affine sets).[9] Размерность по Хаусдорфу фрактала Кизветтера равна $\frac{3}{2}$ (см. [20]).

Завершая вводную часть рецензии, я хочу привести одну цитату из [19]: „Наши примеры ясно показывают, что понятия фрактального аттрактора, с одной стороны, и хаотического (т.е. странного) аттрактора — с другой, являются независимыми. Периодическая орбита не будет ни фрактальной, ни хаотической.

[8] Имеются в виду американские T-shirts

[9] О таких множествах можно прочитать в [22].

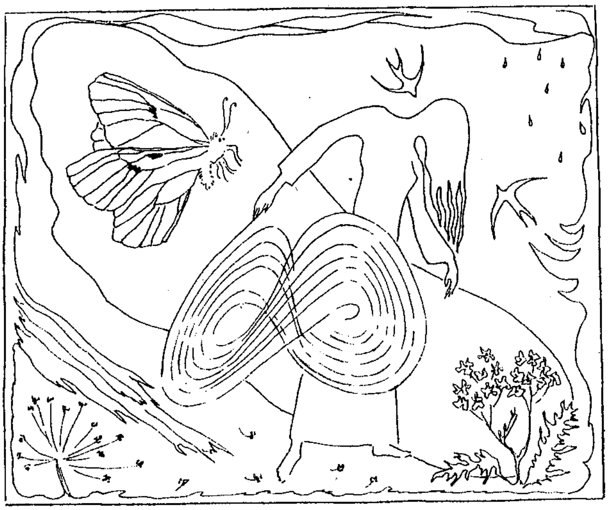

Рис. 4. Аттрактор Лоренца.

Отображение Арнольда[10] странно, но не фрактально. Аттрактор Фейгенбаума[11] фрактален, но не странен, а аттракторы Лоренца и Эно странны и фрактальны".

Рецензируемая книга принадлежит перу известного специалиста по математической физике Давида Рюэля, вернее, двум перьям. Дело в том, что книга была составлена итальянским математиком Стефано Изола на основе цикла лекций, прочитанных Д.Рюэлем в Accademia Nazionale dei Lincei в мае 1987 г. Книга вышла в серии Lezioni Lincee.

В названии итальянской академии упоминается рысь (lynx), известная своей зоркостью. Давид Рюэль, несомненно, обладает этим качеством, необходимым для того, чтобы быть включенным в список авторов Lezioni Lincee. Он разглядел в завихрениях турбулентной жидкости фантастический объект — странный аттрактор.

[10] Отображение „кот" Арнольда задается на торе T^2 при помощи формул

$$\begin{aligned} x' &= (x+y)\,\mathrm{mod}\,1, \\ y' &= (x+2y)\,\mathrm{mod}\,1. \end{aligned} \tag{5}$$

Фигура „кот", нарисованная на торе, под действием итераций преобразования Арнольда быстро размазывается по тору и оказывается намотанной на нем сложным образом (отображение (5) является перемешивающим преобразованием тора). Динамическую систему, порожденную отображением (5), можно продолжить в некоторую окрестность тора так, что тор будет хаотическим, но не фрактальным аттрактором (см., например, [14, 19])

[11] См., например, [21]

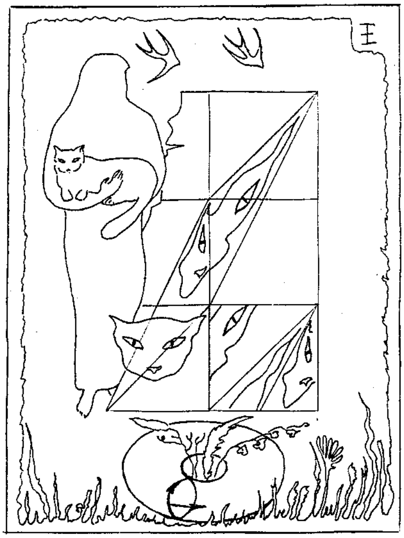

Рис.5. Отображение „кот“ Арнольда.

Книга Д.Рюэля состоит из двух глав: „Шаги к детерминистской интерпретации хаотических сигналов“ и „Эргодическая теория хаоса“. В первых двух параграфах гл. I обсуждаются различные сценарии хаотизации динамических систем, зависящих от параметров, в частности, переход к хаотичности от квазипериодического движения к странному аттрактору (Рюэль-Такенс), через бифуркации удвоения периода (Фейгенбаум) и через перемежаемость (Манвиль-Помо). Кроме того, рассматриваются хаотические режимы у систем дифференциальных уравнений вида (1) и у уравнений Навье-Стокса.

Отметим две неточности, содержащиеся в § 1, 2. На с.9 имеется опечатка, в уравнениях Лоренца вместо xz в правой части второго уравнения напечатано xy. На с.12–13 в формулировке упоминавшегося выше результата из [17] о размерности сингулярного множества сказано, что оно менее чем одномерно, в случае любого слабого решения уравнений Навье-Стокса, в том время как в [17] речь идет о некоторых решениях (авторы [17] называют их подходящими слабыми решениями).

§ 3 книги посвящен разбору свойств отображения Эно, а в § 4 вводятся известные характеристики подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ — размерность по Хаусдорфу и емкость по Колмогорову. В § 5 определяются странные аттракторы и обсуждаются их свойства. § 6 посвящен вопросам реконструкции динамических систем по их конечномерным проекциям.

Глава II начинается с § 7, где приводятся общие определения и факты из эргодической теории. В небольшом § 8 рассматривается вопрос, как выбрать естественную эргодическую меру на аттракторе, а в § 9 определяются и изучаются характеристические показатели Ляпунова, которые представляют собой важные динамические характеристики систем, измеряющие величину экспоненциальной скорости разлета или сближения траекторий по различным направлениям.

В § 10 рассматриваются инвариантные многообразия для отображения Эно (частный случай устойчивых и неустойчивых многообразий для гиперболических диффеоморфизмов). Разбираемые в этом параграфе вопросы я хочу дополнить одним замечанием.

В препринте [15] Бенедикса и Карлесона изучается аттрактор Эно, представляющий собой замыкание неустойчивого многообразия в неподвижной точке отображения Эно, лежащей в первом квадранте (определение аттрактора, используемое в [15], несколько отличается от приведенного в данной рецензии). Компьютерные изображения этого аттрактора указывали на его сложную фрактальную структуру, однако оставалось неясным, не содержит ли аттрактор Эно периодическую притягивающую траекторию высокого порядка и не рисуется ли на дисплее компьютера именно она. Бенедикс и Карлесон установили в [15], что это не так. Они доказали, что аттрактор Эно транзитивен, и, следовательно, он не содержит притягивающих циклов.

Параграф 11 посвящен диффеоморфизмам, удовлетворяющим аксиоме A, и вопросам структурной устойчивости диффеоморфизмов. В § 12 рассматриваются метрическая энтропия сохраняющих меру преобразований и ее связь с характеристическими показателями Ляпунова, а в § 13 изучаются неоднорядности странных аттракторов, а также информационная и ляпуновская размерности.

Наконец, в § 14 излагаются вопросы, касающиеся мероморфных продолжений преобразований Фурье корреляционных функций. Полюса таких продолжений, называемые резонансами, играют важную роль при изучении перемешивающих свойств динамических систем. Отметим одну неточность в списке цитированной литературы, имеющую отношение к содержанию § 14. Статья P.Pollicott "On the rate of mixing of Axiom A flows" опубликована в т.81 журнала "Inventiones Mathematicae" за 1985 г., а не в т.34 за 1976 г., как напечатано в книге.

Последний параграф (§ 15) содержит небольшое заключение.

Книга Д. Рюэля, вне всякого сомнения, будет с интересом прочитана всеми. кто интересуется различными аспектами теории хаоса. Она не является ни монографией, ни учебником, ни даже обзором в полном смысле этого слова. Ей можно дать подзаголовок „Краткий путеводитель по безбрежному хаотическому морю с описанием достопримечательностей теории хаоса и направлений ее развития". Вместе с обзором [19], который близок к ней по содержанию, книга Д. Рюэля позволяет расширить горизонты наших знаний о таком красивом и сложном феномене, как хаос в детерминированных системах.

Вариации на странные аттракторные темы нарисовала Е. В. Емелина. Автор глубоко признателен ей за художественное оформление рецензии.

Список литературы

[1] Аносов Д. В., *Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны*, Тр. МИАН им. В. А. Стеклова, т. XC, 1967, с. 1–209.

[2] Аносов Д. В., Синай Я. Г., *Некоторые гладкие эргодические системы*, Успехи мат. наук **22**, вып. 5 (1967), 107–172.

[3] Арнольд В. И., *Теория катастроф*, Наука, М., 1990.

[4] Гулисашвили А. В., *Реценя на книгу K.J.Falconer, The Geometry of Fractal Sets*, Алгебра и анализ **2**, вып. 2 (1990), 249–259.

[5] Ладыженская О. А., *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, М., 1961.

[6] Ладыженская О. А., *О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье-Стокса и других уравнений с частными производными*, Успехи мат. наук **42**, вып. 6 (1987), 25–60.

[7] Ладыженская О. А., *Об оценках фрактальной размерности и числа определяющих мод для инвариантных множеств динамических систем,Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций, 19*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ, т. 163, 1987, с. 105–129.
[8] Ландау Л. Д., *К проблеме турбулентности*, ДАН ССР **44**, вып. 8 (1944), 339–342.
[9] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Гидродинамика*, Наука, М., 1986.
[10] Нитецки З., *Введение в дифференциальную динамику*, Мир, М., 1975.
[11] Синай Я. Г., *Марковские разбиения и Y-диффеоморфизмы*, Функцион. анализ и его прил. **2**, вып. 1 (1968), 64–89.
[12] Синай Я. Г., *Гиббсовские меры в эргодической теории*, Успехи мат. наук **27**, вып. 4 (1972), 21–64.
[13] Темам Р., *Уравнения Навье-Стокса*, Мир, М., 1981.
[14] Шустер Г., *Детерминированный хаос*, Мир, М., 1988.
[15] Benedicks M., Carleson L., *The dynamics of the Henon map*, Preprint (1985).
[16] Bowen R., Ruelle D., *The ergodic theory of Axiom A flows*, Invent. Math. **29** (1975), 181–202.
[17] Caffarelli L., Kohn R., Nirenberg L., *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math. **35** no. 6 (1982), 771–832.
[18] Devaney R. L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley Publ. Comp., Inc., Redwood City etc. (1989).
[19] Eckmann J.-P., Ruelle D., *Ergodic theory of chaos and strange attractors*, Review of Mod. Phys. **57** (1985), 617–687.
[20] Edgar G., *Kiesswetter's fractal has Hausdorff dimension* 3/2, Real Anal. Exchange **14** no. 1 (1988–1989), 215–223.
[21] Falconer K. J., *The Geometry of Fractal Sets, Cambridge tracts in mathematics*, Univ. Press, Cambridge **85** (1985).
[22] Falconer K. J., *Fractal Geometry*, John Wiley and Sons, Chichester etc. (1990).
[23] Cleick J., *Chaos: Making a New Schience*, Penguin Books, New York, 1987.
[24] Godefroy G., Shapiro J. H., *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*, To appear in J. Func. Anal.
[25] Gollub J. P., Swinney H. L., *The transition to turbulence*, Physics Today **31** (August, 1978), 41–49.
[26] Li T., Yorke J. A., *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly **82** (1975), 985–992.
[27] Leray J., *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math. **63** (1934), 193–248.
[28] Mandelbrot B. B., *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Fremlin and Co., New York, 1983.
[29] Mac Cluer C. R., *Chaos in linear distributed systems*, Preprint 2-6-90, Michigan State University.
[30] Mathematical Intelligencer **11** no. 3 (1989).
[31] Mathematical Intelligencer **11** no. 4 (1989).
[32] Ruelle D., *Differentiable dynamical systems and the problem of turbulence*, Proc. Symp. Pure Math. **39** no. 2 (1983), 141–154.
[33] Ruelle D., *A measure assotiated with axiom A attractors*, Amer. J. Math. **98** no. 3 (1976), 619–654.
[34] Ruelle D., Takens F., *On the nature of turbulence*, Comm. Math. Phys. **20** (1971), 167–192.
[35] Smale S., *Differentiarle dynamical systems*, Bull. AMS **73** (1967), 747–817.
[36] Wiener N., *The homogeneous chaos*, Amer. J. Math. **60** (1938), 897–936.

А. Б. Гулисашвили