F. A. Berezin, Canonical transformations in the second quantization representation, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1963, Volume 150, Number 5, 959–962

Доклады Академии наук СССР
1963. Том 150, № 5

МАТЕМАТИКА

Ф. А. БЕРЕЗИН

О КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ВТОРИЧНОГО КВАНТОВАНИЯ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 10 I 1963)

1. Рассмотрим гильбертово пространство с инволюцией L. Пусть $\hat{a}(f)$, $\hat{a}^*(f)$, $f \in L$,— линейные функционалы в L со значениями в множестве линейных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Будем предполагать, что операторы $\hat{a}^*(f)$, $\hat{a}(f)$ удовлетворяют обычным (фермиевским или бозевским) соотношениям коммутации, что они образуют неприводимое семейство, и что в пространстве $\mathcal{H}$ существует вакуумный вектор $\hat{\Phi}_0$: $\hat{a}(f)\,\hat{\Phi}_0 = 0$.

Пусть Φ, Ψ — операторы в L, имеющую общую всюду плотную область определения D, снабженную собственной топологией и инвариантную относительно инволюции. Пространство непрерывных линейных функционалов на D обозначим $\tilde{L}$.

Будем предполагать, что $\tilde{L}$ содержит L в качестве плотного множества. Значение элемента $F \in \tilde{L}$ на $\varphi \in D$ будем обозначать так же, как скалярное произведение в L: $F(\varphi) = (F, \varphi^*)$ ($*$— инволюция в L). Определим операторы $\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}$: $f\overline{\Phi} = (f^*\Phi)^*$, $f\overline{\Psi} = (f^*\Psi)^*$, $f \in L$.

Рассмотрим операторные линейные функционалы в D:

$$\hat{b}(f) = \hat{a}(f\Phi) + \hat{a}^*(f\Psi) + (F, f^*), \qquad \hat{b}^*(f) = \hat{a}(f\overline{\Psi}) + \hat{a}^*(f\overline{\Phi}) + (f, F). \tag{1}$$

Если преобразование (1) обратимо и операторы в $\hat{b}(f)$, $\hat{b}^*(f)$ удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и операторы $\hat{a}(f)$, $\hat{a}^*(f)$, то оно называется **линейным каноническим преобразованием**. В фермиевском случае $F = 0$.

Хорошо известно, что если пространство L конечномерно, то в пространстве $\mathcal{H}$ существует унитарный оператор $\hat{U}$, порождающий преобразование (1):

$$\hat{b}(f) = \hat{U}\hat{a}(f)\,\hat{U}^{-1}, \qquad \hat{b}^*(f) = \hat{U}\hat{a}^*(f)\,\hat{U}^{-1}. \tag{2}$$

В общем случае это не всегда так. Условимся называть каноническое преобразование **собственным**, если существует унитарный оператор, удовлетворяющий условию (2), и несобственным в противном случае. Известно ([1]), что для того, чтобы каноническое преобразование (1) было собственным, необходимо и достаточно, чтобы оператор Ψ был оператором Гильберта — Шмидта и чтобы функционал F принадлежал L *.

Отметим, что для того чтобы преобразование (1) было каноническим, между операторами Φ и Ψ должны быть выполнены определенные соотношения. Эти соотношения приводят к тому, что в случае, когда преобразование является собственным, оператор Φ ограничен**. Таким образом, в этом случае область D, на которой определены операторные функционалы $\hat{b}(f)$ и $\hat{b}^*(f)$, совпадает с L.

Пусть $\mathcal{A}$ — некоторое каноническое преобразование, задаваемое операторами Φ, Ψ и функционалом F, определенными на области D. Рассмотрим последовательность канонических преобразований $\mathcal{A}_n$, обладающих следующими свойствами: 1) все операторы Φ_n, Ψ_n и функционалы F_n определены на области D; 2) при $n \to \infty$ $\|\Phi_n f - \Phi f\| \to 0$, $\|\Psi_n f - \Psi f\| \to 0$, где f — произвольный элемен D; $F_n \to F$ в сильной топологии пространства $\tilde{L}$.

В этом случае преобразование $\mathcal{A}$ будем называть **пределом преобразований** $\mathcal{A}_n$.

* В ([1]) эта теорема доказана для однородных преобразований, однако тем же методом может быть получен общий результат.

** В фермиевском случае операторы Φ и Ψ ограничены для любого канонического преобразования.

Теорема 1. *Каждое линейное каноническое преобразование есть предел собственных линейных канонических преобразований.*

2. Пусть $\mathcal{A}_n$ — последовательность собственных канонических преобразований, сходящаяся к несобственному преобразованию $\mathcal{A}$; $\hat{U}_n$ — унитарные операторы в $\mathcal{H}$, осуществляющие преобразования $\mathcal{A}_n$.

Определение. Оператор $\hat{A}$ в $\mathcal{H}$, определенный на области $D_{\hat{A}}$, выдерживает несобственное каноническое преобразование $\mathcal{A}$, если при любом n операторы $\hat{U}_n\hat{A}\hat{U}_n^{-1}$ определены на $D_{\hat{A}}$, при любом $f \in D_{\hat{A}}$ существует в сильном смысле предел $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{U}_n\hat{A}\hat{U}_n^{-1}f$, и этот предел не зависит от выбора последовательности канонических преобразований $\mathcal{A}_n$, сходящейся к $\mathcal{A}$. В этом пункте мы опишем множество ограниченных операторов, выдерживающих все (линейные) канонические преобразования в фермиевском случае.

Рассмотрим операторы

$$\hat{p}(f) = \hat{a}(f) + \hat{a}^*(f), \qquad \hat{q}(f) = \frac{1}{i}(\hat{a}(f) - \hat{a}^*(f)). \tag{3}$$

Для дальнейшего удобно вместо операторных функционалов рассматривать операторные обобщенные функции. Рассмотрим в связи с этим реализацию пространства L с помощью функций с суммируемым квадратом на некотором множестве M, снабженном мерой; предположим, что при этой реализации инволюция в L переходит в комплексное сопряжение.

Определим операторную обобщенную функцию $\hat{p}(x)$ с помощью равенства $\hat{p}(f) = \int \hat{p}(x) f(x)\,dx$. Аналогично определяются операторные обобщенные функции $\hat{q}(x)$, $\hat{a}(x)$, $\hat{a}^*(x)$.

Теорема 2. *Для того чтобы ограниченный оператор $\hat{A}$ выдерживал все канонические преобразования, необходимо и достаточно, чтобы он был представим в виде сильно сходящегося ряда*

$$\hat{A} = \sum \frac{1}{\sqrt{m!n!}} \int K_{mn}(x_1 \ldots x_m \mid y_1 \ldots y_n) \times$$
$$\times \hat{p}(x_1) \ldots \hat{p}(x_m)\, \hat{q}(y_1) \ldots \hat{q}(y_n)\, d^m x\, d^n y, \tag{4}$$

где $K_{mn}(x_1 \ldots x_m \mid y_1 \ldots y_n)$ — суммируемые с квадратом функции, антисимметричные отдельно по $x_1 \ldots x_m$ и по $y_1 \ldots y_n$ и удовлетворяющие условию $\sum \int |K_{mn}(x_1 \ldots x_m \mid y_1 \ldots y_n)|^2 d^m x\, d^n y < \infty$.

Множество операторов вида (4) образует кольцо, которое мы обозначим через $\mathfrak{B}$. В $\mathfrak{B}$ можно ввести след согласно формуле $\mathrm{sp}_1 \hat{A} = K_{00}$.

Нетрудно проверить, что при этом выполняется обычное требование: при любых $\hat{A}_1, \hat{A}_2 \in \mathfrak{B}$

$$\mathrm{sp}_1 \hat{A}_1\hat{A}_2 = \mathrm{sp}_1 \hat{A}_2\hat{A}_1.$$

Отметим, что если пространство L имеет размерность $N < \infty$, то $\mathfrak{B}$ есть кольцо всех матриц порядка 2^N и введенный след отличается от обычного множителем: $\mathrm{sp}_1 \hat{A} = \frac{1}{2^N}\mathrm{sp}\,\hat{A}$.

Приведем идею доказательства достаточности. Введем в $\mathfrak{B}$ скалярное произведение $(A_1, A_2) = \mathrm{sp}_1(A_1A_2^*)$. Пополнение $\mathfrak{B}$ по этому скалярному произведению обозначим $\overline{\mathfrak{B}}$.

Нетрудно проверить, что каждое каноническое преобразование $\mathcal{A}$ порождает в гильбертовом пространстве $\overline{\mathfrak{B}}$ унитарный оператор. Этот оператор обозначим $U_{\mathcal{A}}$. Нетрудно проверить, далее, что если $\mathcal{A}_n \to \mathcal{A}$ в смысле определения, данного в п. 1, то $U_{\mathcal{A}_n} \to U_{\mathcal{A}}$ в сильном смысле.

Топология гильбертова пространства $\overline{\mathfrak{B}}$ не совпадает ни с какой естественной топологией в пространстве операторов. Следовательно, в $\overline{\mathfrak{B}}$ могут существовать элементы, не отвечающие операторам в $\mathcal{H}$.

Сформулируем в связи с этим общую лемму, которая служит завершением доказательства достаточности и представляет кроме того самостоятельный интерес.

Лемма. *Пусть $\hat{A}_n \in \mathfrak{B}$ — последовательность операторов, нормы которых ограничены общей константой c. Тогда, если $\hat{A}_n \to \hat{A} \in \overline{\mathfrak{B}}$ в том смысле, что $(\hat{A} - \hat{A}_n, \hat{A} - \hat{A}_n) \to 0$, то $\hat{A} \in \mathfrak{B}, \hat{A}_n \to \hat{A}$ в сильном смысле и $\hat{A} \| \leqslant c$.*

3. Остановимся на связи между нормальной формой оператора и записью его в виде (4). Рассмотрим внешние алгебры $\mathfrak{G}_a$ и $\mathfrak{G}_p$ с образующими (функциями с антикоммутирующими значениями) $a(x)$, $a^*(x)$ и $p(x)$, $q(x)$ соответственно: $\{a(x), \ a^*(x')\} = \{a(x), \ a(x')\} = \{a^*(x), \ a^*(x')\} = \{p(x), p(x')\} = \{p(x), q(x')\} = \{q(x), q(x')\} = 0$. Записи каждого оператора в нормальной форме и в виде (4) поставим в соответствие элементы алгебр $\mathfrak{G}_a$ и $\mathfrak{G}_p$ (функционалы):

$$A(a^*, a) = \\ = \sum \int L_{mn}(x_1 \ldots x_m \mid y_1 \ldots y_n) \, a^*(x_1) \ldots a^*(x_m) \, a(y_1) \ldots a(y_n) \, d^m x | d^n y; \quad (5)$$

$$\mathfrak{A}(p, q) = \sum \frac{1}{\sqrt{m!n!}} \int K_{mn}(x_1 \ldots x_m \mid y_1 \ldots y_n) \times \\ \times p(x_1) \ldots p(x_m) \, q(y_1) \ldots q(y_n) \, d^m x d^n y \quad (6)$$

(функции K_{mn} в (6) те же, что в (4). Относительно функционалов $A(a^*, a)$ см. ([2])).

Используя континуальный интеграл по антикоммутирующим переменным ([2]), связь между $A(a^*,a)$ и $\mathfrak{A}(p, q)$ можно записать в виде *:

$$\mathfrak{A}(p, q) = \int \exp \left[- i \int \left(q(x) + \frac{a^*(x) - a(x)}{i\sqrt{2}} \right) \left(p(x) - \frac{a(x) + a^*(x)}{\sqrt{2}} \right) dx \right] \times \\ \times A\left(\frac{a^*}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}} \right) \Pi \, da^* \, da. \quad (7)$$

Обращение этой формулы опускаем.

Каноническое преобразование (1) порождает соотношение между операторами $\hat{p} = \hat{a} + \hat{a}^*$, $\hat{q} = \frac{1}{i}(\hat{a} - \hat{a}^*)$ и $\hat{p}' = \hat{b} + \hat{b}^*$, $\hat{q}' = \frac{1}{i}(\hat{b} - \hat{b}^*)$. Заменяя в этом отношении $\hat{p}$, $\hat{q}$, $\hat{p}'$, $\hat{q}'$ на p, q, p', q', мы получим линейное преобразование в алгебре $\mathfrak{G}_p$:

$$p' = Ap + Bq, \qquad q' = Cp + Dq,$$

где A, B, C, D — операторы, выражающиеся определенным образом, через Φ, Ψ.

Оказывается, что функционал $'\mathfrak{A}(p, q)$, соответствующий преобразованному оператору $'\hat{A}$, выражается через функционал $\mathfrak{A}(p, q)$, соответствующий оператору $\hat{A}$, по формуле

$$'\mathfrak{A}(p, q) = \mathfrak{A}(p', q'),$$

т. е. преобразование функционалов $\mathfrak{A}(p, q)$ сводится к замене переменных **.

Отметим, что в виде (4) может быть записан не всякий оператор. Напри-

---

* Напомним определение интеграла. В случае, если грассманова алгебра $\mathfrak{G}$ имеет конечное число образующих $x_1, \ldots, x_N$, интеграл определяется следующим образом: $\int dx_i = 0$, $\int x_i dx_i = 1$, символы dx_i антикоммутируют между собой и с x_k, кратный интеграл понимается как повторный. Континуальный интеграл есть предел n-кратных интегралов при $n \to \infty$.

** В отличие от функционалов $\mathfrak{A}(p, q)$ функционалы $A(a^*,a)$ преобразуются по довольно сложным формулам, содержащим континуальное интегрирование (см. ([2])).

мер, оператор $\hat{A} = \int K(x, y)\, \hat{a}^*(x)\hat{a}(y)\, dx\, dy$ представим в виде (4) тогда и только тогда, когда $K(x, y)$ — ядро оператора с абсолютно сходящимся следом. То же самое относится к оператору $\hat{A} = \exp\left\{i \int K(x, y)\, a^*(x)\, a(y)\, dx\, dy\right\}$. Таким образом, если $K(x, y)$ есть ядро самосопряженного, но не ядерного оператора, то $\hat{A}$ представляет собой пример ограниченного оператора, не выдерживающего всех канонических преобразований.

4. Перейдем к бозевскому случаю. Рассмотрим линейное пространство $\tilde{L}$, состоящее из пар вещественных функций $(p(x), q(x))$. Предположим, что в пространстве $\tilde{L}$ сосредоточена вероятностная мера μ *. Поставим в соответствие каждому оператору $\hat{A}$, записываемому в нормальной форме, функционал на $\tilde{L}$:

$$\mathfrak{A}(p, q) = \int \exp\left\{\frac{1}{2}\int\left[\left(p - i\frac{b + b^*}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(q + \frac{b^* - b}{\sqrt{2}}\right)^2 dx\right\} \times \times A\left(\frac{ib^*}{\sqrt{2}}, \frac{ib}{\sqrt{2}}\right) \Pi\, db^* db, \tag{8}$$

где $A(a^*, a)$ — функционал, отвечающий нормальной форме $\hat{A}$ **.

Обращение формулы (8) опускаем.

Континуальный интеграл в этой формуле понимается как предел конечнократных, причем в конечномерной аппроксимации

$b = \xi + i\eta$, $b^* = \xi - i\eta$, $\Pi\, db^* db = \pi^{-n} d^n\xi\, d^n\eta$, $\Pi\, dp\, dq = (2\pi)^{-n} d^n p\, d^n q$.

Так же как и в фермиевском случае, каноническое преобразование (1) порождает соотношение между операторами $\hat{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^*)$, $\hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} - \hat{a}^*)$ и $\hat{p}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{b} + \hat{b}^*)$, $\hat{q}' = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\hat{b} - \hat{b}^*)$. Заменяя в этом соотношения $\hat{p}$, $\hat{q}$, $\hat{p}'$, $\hat{q}'$ на p, q, p', q', мы получим линейное преобразование в $\tilde{L}$:

$$\begin{aligned} p'(x) &= \int (A(x, y)\, p(y) + B(x, y)\, q(y))\, dy + f_1(x); \\ q'(x) &= \int (C(x, y)\, p(y) + D(x, y)\, q(y))\, dy + f_2(x). \end{aligned} \tag{9}$$

Теорема 3. *Пусть оператору $\hat{A}$ отвечает функционал $\mathfrak{A}(p, q)$, суммируемый с квадратом по мере $\mu(p, q)$, квазиинвариантной относительно преобразования* (9). *Тогда оператор $\hat{A}$ выдерживает каноническое преобразование* (1) *и преобразованному оператору отвечает функционал* $'\mathfrak{A}(p, q) = \mathfrak{A}(p', q')$.

Таким образом, преобразование функционала $\mathfrak{A}(p, q)$ сводится к замене переменных.

Поступило
10 I 1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] K. O. Friedrichs, Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields, N. Y., 1953. [2] Ф. А. Березин, ДАН, 137, № 2 (1961). [3] Р. А. Минлос, Тр. Моск. матем. общ., 8, 497 (1959). [4] E. Wigner, Phys. Rev., 40, 749 (1932).

* Такая ситуация возможна, если, например, $\tilde{L}$ есть пространство, сопряженное к ядерному ([3]).

** Функционал $A(a^*, a)$ определяется так же, как аналогичный функционал в фермиевском случае, с той лишь разницей, что $a(x)$, $a^*(x)$ — обычные комплекснозначные функции ([2]). В случае конечного числа степеней свободы запись операторов с помощью функций $\mathfrak{A}(p, q)$ впервые рассматривались Вигнером ([4]).