А. А. Рыков, А. С. Рыков, Многокритериальная оценка качества информационных систем при неопределенности, *Пробл. управл.*, 2004, выпуск 2, 31–39

УДК 519.8

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ[1]

А.А. Рыков, А.С. Рыков

Московский государственный институт стали и сплавов

Рассмотрена проблема многокритериальной оценки значений характеристик качества информационных систем. Предложена модель оценки этих характеристик в виде двухуровневой статистической модели принятия решений в условиях неопределенности. Дана классификация априорной информированности лица, принимающего решения, о состояниях среды. Описаны новые критерии выбора наилучшего варианта информационной системы.

ВВЕДЕНИЕ

Задачу оценки качества и надежности вариантов системотехнических решений информационных систем (ИС) приходится решать как на предпроектных стадиях создания ИС, так и в процессе их создания и эксплуатации. На каждом этапе необходимо оценивать качество ИС, соответствие замыслу, заданным или желаемым требованиям.

Множественность вариантов реализации ИС, разнообразие условий, в которых должны функционировать системы, оценка качества систем по нескольким характеристикам — все это усложняет решение задачи оценки и выбора наиболее эффективного варианта системы [1—2].

Примерами характеристик, по которым оценивается качество ИС, могут служить такие, как коэффициент готовности и среднее время восстановления наиболее важных типовых трактов между отдельными элементами ИС, время установления соединения при передаче данных с установлением соединения, при попытке доступа к услугам передачи речевой или факсимильной информации и т. п. Значения характеристик могут зависеть как от варианта ИС, так и от режима работы системы, например ее загруженности. Режимы работы ИС могут интерпретироваться как состояния внешней среды. Эти состояния среды порождают неопределенность, так как заранее неизвестно, в каком состоянии будет находиться система.

Неопределенность, заключающаяся в наличии нескольких различных значений оценки одной и той же характеристики в зависимости от состояний среды, приводит к необходимости решения задачи оценки значений характеристик качества и выбора наилучшего варианта ИС. Методы преодоления неопределенности для однокритериальных задач рассмотрены в работе [2]. Реальная оценка качества ИС проводится по нескольким характеристикам и порождает многокритериальную задачу. Проблемы неопределенности и многокритериальности преодолеваются путем учета предпочтений лица, принимающего решения (ЛПР) и обладающего соответствующими знаниями и полномочиями в процессе оценки и выбора варианта ИС.

В статье рассмотрена проблема многокритериальной оценки значений характеристик качества ИС, предложена модель описания качества ИС в виде двухуровневой статистической модели принятия решений в условиях неопределенности. На нижнем уровне отдельные характеристики качества ИС оцениваются на основе комбинированного критерия. Объединение значений отдельных ха-

[1] Работа доложена на Международной конференции “Идентификация систем и задачи управления” SICPRO’04, Москва, 2004.

рактеристик ИС и выбор наиболее предпочтительного варианта ИС производится на основе применения ЛПР одного из принципов оптимальности.

ДВУХУРОВНЕВАЯ МОДЕЛЬ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Статистическая модель принятия решений используется во многих реальных ситуациях разового выбора вариантов, проектов, действий, связанных с неопределенным влиянием среды на ситуацию выбора, производимого ЛПР [3—4].

Рассмотрим двухуровневую модель принятия решений. В данной модели предполагается наличие:

- множества решений $X = (x_1, ..., x_n)$ (варианты проектов ИС), одно из которых необходимо принять ЛПР;
- множества состояний среды $S = \{s_1, ..., s_m\}$, ЛПР точно неизвестно в каком конкретном состоянии находится или будет находиться среда, возможны следующие три *ситуации априорной информированности ЛПР*:

1) известно априорное распределение вероятностей $p = \{p_1, ..., p_m\}$, определенное на множестве $A = \left\{p\colon 0 \le p_j \le 1, \sum_{j=1}^{m} p_j = 1\right\}$ на элементах $s_j \in S$ состояний среды;

2) известно, что среда активно противодействует его целям: среда стремится к выбору таких состояний $s_j \in S$, для которых функция полезности U (определена ниже) принимает наименьшее значение из множества своих максимально возможных (по решениям) значений;

3) имеется приблизительная априорная информация о состояниях среды, являющаяся промежуточной между первой и второй ситуациями априорной информированности;

- множества характеристик $W = \{w_1, ..., w_q\}$, описываемых функциями полезности $U_k = \|u_k(x_i, s_j)\|$, $k = 1, ..., q$, $x_i \in X$, $s_j \in S$, если ЛПР исходит из условия максимизации значений характеристики, или данная функция трактуется как функция потерь, если ЛПР исходит из условия минимизации характеристики.

Функции полезности U_k используются для оценки характеристик системы, описывающих полезность, выигрыш, эффективность, вероятность достижения целевых событий и т. д., в противоположность этому функция потерь U_k применяется для выражения потерь, проигрыша, сожалений, ущерба, риска и т. д. Вид функции определяется ЛПР.

Формально в модели принятия решений в условиях неопределенности функцию полезности или потерь $U_k = \|u_k(x_i, s_j)\|$, k-й характеристики $w_k \in W$ удобно представить в виде матрицы (табл. 1):

Таблица 1

Матричный вид функции полезности

Варианты решений	Варианты состояний среды			
	s_1	s_2	...	s_m
x_1	$u_k(x_1, s_1)$	$u_k(x_1, s_2)$	...	$u_k(x_1, s_m)$
x_2	$u_k(x_2, s_1)$	$u_k(x_2, s_2)$	...	$u_k(x_2, s_m)$
...	...	...	...	...
x_n	$u_k(x_n, s_1)$	$u_k(x_n, s_2)$	...	$u_k(x_n, s_m)$

Задача принятия решений состоит в выборе ЛПР наилучшего варианта $x_i \in X$ с помощью решения двухуровневой задачи оптимизации:

- на верхнем уровне решается задача:

если U_k — функция полезности, то

$$\text{найти } F(x^*, \beta, \lambda_1, \lambda_2) = \max_{x_i \in X} F(x_i, \beta, \lambda_1, \lambda_2) =$$
$$= \max_{x_i \in X} F(y_1(x_i, \beta, \lambda_1, \lambda_2), ..., y_q(x_i, \beta, \lambda_1, \lambda_2) \quad (1)$$

или, если U_k — функция потерь, то

$$\text{найти } F(x^*, \beta, \lambda_1, \lambda_2) = \min_{x_i \in X} F(x_i, \beta, \lambda_1, \lambda_2) =$$
$$= \min_{x_i \in X} F(y_1(x_i, \beta, \lambda_1, \lambda_2), ..., y_q(x_i, \beta, \lambda_1, \lambda_2), \quad (2)$$

где функция качества $F(x_i, \beta, \lambda_1, \lambda_2) = F(y_1(x_i, \beta, \lambda_1, \lambda_2), ..., y_q(x_i, \beta, \lambda_1, \lambda_2)$ строится на основе принципа оптимальности (см. Приложение), выбираемого ЛПР;

- на нижнем уровне для $k = 1, ..., q$ для каждого $x_i \in X$ при параметрах $\beta, \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ определяются функции (критерии) $y_k(x_i)$ оценки качества характеристик $w_k \in W$ для соответствующей функции полезности или потерь U_k:

$$y_k(x_i, \beta, \lambda_1, \lambda_2) = (1 - \beta)y_{1k}(p, x_i, \lambda_1) + \beta y_{2k}(x_i, \lambda_2),$$
$$\beta, \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1], \quad (3)$$

где

$$y_{1k}(p, x_i, \lambda_1) = (1 - \lambda_1) B(p, x_i) \mp \lambda_1 \sigma(p, x_i), \quad (4)$$

$$B(p, x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_j u_k(x_i, s_j),$$

$$\sigma(p, x_i) = \left[\sum_{j=1}^{m} (u_k(x_i, s_j) - B(p, x_i))^2 p_j\right]^{1/2},$$

$$y_{2k}(x_i, \lambda_2) = \max_{x_i \in X} (\lambda_2 \min_{s_j \in S} u_k(x_i, s_j) +$$
$$+ (1 - \lambda_2) \max_{s_j \in S} u_k(x_i, s_j)). \quad (5)$$

В формуле (4) знак "минус" выбирается для функции полезности, а знак "плюс" – для функции потерь. Параметры β, λ_1, $\lambda_2 \in [0, 1]$ выбираются с учетом априорной информированности ЛПР. Построение, выбор параметров и свойства комбинированного критерия (3) рассмотрены в работе [2].

Неопределенность оценки решений на нижнем уровне связана с тем, что неизвестно точно, в каком состоянии находится среда. С помощью критерия преодолевается неопределенность состояний среды и выбирается лучшее в смысле применяемого критерия решение.

В результате решения задач (1) или (2) получаем множество решений, зависящее от параметров β, λ_1, $\lambda_2 \in [0, 1]$. Окончательно лучшее решение выбирает ЛПР. По его желанию можно выбрать значения β, λ_1, λ_2и получить одно решение задачи.

ПРИМЕР ВЫБОРА ВАРИАНТА ИС

В качестве иллюстрации, как реализуется предложенная модель, рассмотрим пример решения задачи выбора лучшего варианта ИС, оцениваемого по двум характеристикам: по среднему времени восстановления наиболее важных типовых трактов между отдельными элементами ИС — w_1 и по времени установления соединения при передаче данных с установлением соединения, при попытке доступа к услугам передачи речевой или факсимильной информации — w_2. Пусть сравниваются четыре варианта ИС $X = \{x_1, ..., x_4\}$ при пяти состояниях среды, описываемых уровнями загрузки ИС $S = \{s_1, ..., s_5\}$, где s_1 соответствует низкому уровню загрузки ИС, s_2 — уровню ниже среднего, s_3 — среднему уровню, s_4 — высокому уровню, s_5 — сверхвысокому уровню. Пусть задача решается при первой ситуации априорной информированности ЛПР: известно априорное распределение вероятностей $p = \{p_1, ..., p_5\} = \{0{,}2; 0{,}2; 0{,}4; 0{,}15; 0{,}05\}$, определенное на множестве состояний среды $S = \{s_1, ..., s_5\}$.

Необходимо выбрать лучший вариант проекта, обеспечивающий наименьшие значения времён w_1 и w_2, т. е. характеристики w_1 и w_2 можно трактовать как функции потерь.

Значения функции потерь $U_1 = \|u_1(x_i, s_j)\|$ характеристики (среднего времени восстановления в часах) для разных проектов ИС и состояний среды оценены экспертами и представлены в табл. 2.

В табл. 3 представлены, оцененные экспертами, значения функции потерь $U_2 = \|u_2(x_i, s_j)\|$ характеристики (время установления соединения при попытке доступа к услугам передачи речевой или факсимильной информации в секундах) для разных проектов ИС и состояний среды.

Значения функций потерь U_1 и U_2 характеристик w_1 и w_2 оцениваются в разных масштабах: в часах и в секундах. Для удобства дальнейшего сравнения значения функций потерь необходимо нормализовать. Лицо, принимающее решение, предложило представить значения функций потерь в шкале от 0 до 10 баллов так, чтобы лучшие значения имели меньшее число баллов, а худшие — большее.

Значения w_1 и w_2 были нормализованы по формулам:

$$\bar{u}_1(x_i, s_j) = \frac{u_1(x_i, s_j)}{\max\limits_{x_i \in X} \max\limits_{s_j \in S} u_1(x_i, s_j)} \cdot 10 = \frac{u_1(x_i, s_j)}{0{,}12},$$

$$\bar{u}_2(x_i, s_j) = \frac{u_2(x_i, s_j)}{\max\limits_{x_i \in X} \max\limits_{s_j \in S} u_2(x_i, s_j)} \cdot 10 = \frac{u_1(x_i, s_j)}{6},$$

где $\bar{u}_1(x_i, s_j)$ и $\bar{u}_2(x_i, s_j)$ — нормализованные значения характеристик.

Полученные нормализованные значения функций потерь $\bar{U}_1 = \|\bar{u}_1(x_i, s_j)\|$ и $\bar{U}_2 = \|\bar{u}_2(x_i, s_j)\|$ представлены в табл. 4 и 5.

Построим описание оценок различных вариантов ИС на нижнем уровне по формулам (3)—(5).

В рассматриваемом случае априорная информированность ЛПР соответствует ситуации 1, так как известно распределение вероятностей состояний среды. После обсуждения вида критерия (3) с ЛПР был выбран параметр $\beta = 0$, второе слагаемое

Таблица 2

Экспертная оценка значений среднего времени w_1 (в часах) восстановления для разных проектов ИС и состояний среды

Варианты проектов ИС	Варианты состояний среды				
	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
x_1	0,1	0,4	0,5	0,8	1,0
x_2	0,3	0,5	0,6	0,8	0,9
x_3	0,1	0,3	0,5	1,0	1,1
x_4	0,2	0,3	0,4	1,0	1,2

Таблица 3

Экспертная оценка значений времени w_2 (в секундах) установления соединения

Варианты проектов ИС	Варианты состояний среды				
	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
x_1	3	15	25	40	50
x_2	5	10	25	35	40
x_3	5	15	25	30	60
x_4	10	15	20	35	50

формулы (3) исчезло и критерий $y_k(x_i, \beta, \lambda_1, \lambda_2)$ оценки качества характеристик w_1 и w_2 для функций потерь $\bar{U}_1$ и $\bar{U}_2$ при $k = 1$ и $k = 2$, для каждого из решений $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, приобрел вид:

$$y_k(x_i, \lambda_1) = y_k(x_i, 0, \lambda_1, \lambda_2) = y_{1k}(p, x_i, \lambda_1), \quad (6)$$

$$y_{1k}(p, x_i, \lambda_1) = (1 - \lambda_1)B(p, x_i) + \lambda_1\sigma(p, x_i),$$

$$B(p, x_i) = \sum_{j=1}^{5} p_j\bar{u}_k(x_i, s_j),$$

$$\sigma(p, x_i) = \left[\sum_{j=1}^{m} (\bar{u}_k(x_i, s_j) - B(p, x_i))^2 p_j\right]^{1/2}.$$

Данный критерий полностью ориентирован на принятие решений для первой ситуации априорной информированности ЛПР.

Решение задачи выбора лучшего варианта системы по критерию (6) зависит от выбора параметра λ_1. Рассмотрим решение задачи при $\lambda_1 = 0,0$; 0,1; 0,2; ..., 1,0.

Далее приведены оценки вариантов проектов ИС x_i по критерию $y_1(x_i, \lambda_1)$ оценки качества характеристики w_1 (табл. 6) и по критерию $y_2(x_i, \lambda_1)$ оценки качества характеристики w_2 (табл. 7) при различных значениях параметра λ_1.

Из таблиц видно, как в зависимости от значения λ_1 меняются лучшие решения, оцениваемые по характеристикам w_1 и w_2. Приведенные оценки являются исходными для решения задачи (2) выбора лучших вариантов на верхнем уровне.

Таблица 4

Нормализованные значения функции потерь $\bar{U}_1$

Варианты проектов ИС	Варианты состояний среды				
	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
x_1	0,83	3,33	4,17	6,67	8,33
x_2	2,50	4,17	5,00	6,67	7,5
x_3	0,83	2,50	4,17	8,33	9,17
x_4	1,67	2,50	3,33	8,33	10,00

Таблица 5

Нормализованные значения функции потерь $\bar{U}_2$

Варианты проектов ИС	Варианты состояний среды				
	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
x_1	0,50	2,50	4,17	6,67	8,33
x_2	0,83	1,67	4,17	5,83	6,67
x_3	0,83	2,50	4,17	5,00	10,00
x_4	1,67	2,50	3,33	5,83	8,33

Перейдем с описания оценок вариантов ИС на нижнем уровне к общей оценке вариантов ИС на верхнем уровне. На верхнем уровне решается задача (2):

$$\text{найти } F(x^*, \lambda_1) = \min_{x_i \in \{x_1, ..., x_4\}} F(x_i, \lambda_1) =$$

$$= \min_{x_i \in \{x_1, ..., x_4\}} F(y_1(x_i, \lambda_1), y_2(x_i, \lambda_1)),$$

где функция качества $F(x_i, \lambda_1) = F(y_1(x_i, \lambda_1), y_2(x_i, \lambda_1))$ строится на основе принципа оптимальности, выбираемого ЛПР.

Для решения задачи можно применять различные принципы оптимальности, описанные в Приложении. Для иллюстрации методики применения принципов оптимальности ограничимся изложением применения принципа идеальной точки. Применение остальных принципов аналогично рассматриваемому и не должно вызывать больших затруднений.

Опишем применение принципа идеальной точки для решения задачи выбора лучшего варианта ИС по двум критериям. Напомним, что для данного принципа лучшими являются решения, которые ближе всего расположены к идеальной точке (решению), т. е. минимальные значения. Выберем в качестве координат идеальной точки наилучший результат, получаемый по каждому критерию. Расстояние до идеальной точки будем оценивать с помощью евклидовой нормы. Запишем принцип идеальной точки для рассматриваемой двухкритериальной задачи:

$$F(x^*, \lambda_1) = \min_{x_i \in \{x_1, ..., x_4\}} F(x_i, \lambda_1) =$$

$$= \min_{x_i \in \{x_1, ..., x_4\}} (\gamma_1^2(y_1^I - y_1(x_i, \lambda_1))^2 +$$

$$+ \gamma_2^2(y_2^I - y_2(x_i, \lambda_1))^2),$$

где идеальная точка $y^I = (y_1^I(\lambda_1), y_2^I(\lambda_2))$ выбрана ЛПР как вектор минимальных значений каждого из критериев в отдельности:

$$y^I = (y_1^I(\lambda_1), y_2^I(\lambda_2)) =$$

$$= (\min_{x_i \in \{x_1, ..., x_4\}} y_1(x_i, \lambda_1), \min_{x_i \in \{x_1, ..., x_4\}} y_2(x_i, \lambda_1)).$$

Значения координат идеальной точки $y^I = (y_1^I(\lambda_1), y_2^I(\lambda_2))$ при различных λ_1 приведены в последних строках табл. 6 и 7.

Пусть оценки по первой и второй характеристике одинаково важны для ЛПР при общей оценке качества ИС, т. е. весовые коэффициенты γ_1 и

γ_2 равны. Тогда выбор лучшего варианта ИС определяется решением задачи

$$F(x^*(\lambda)) = \min_{x_i \in X} F(x_i(\lambda)) =$$
$$= \min_{x_i \in X} (\gamma_1^I (y_1^I (x_i(\lambda)))^2 + (y_2^I - y_2(x_i(\lambda)))^2).$$

Решение задачи выбора лучших вариантов ИС на основе принципа идеальной точки при различных λ представлено в табл. 8.

Полученные результаты наглядно демонстрируют для ЛПР последствия выбора значения параметра λ и принципа оптимальности в форме идеальной точки. Проводя сравнительный анализ, ЛПР может, оценивая, какие из значений, входящих в комбинированный критерий, важнее, принять решение о выборе значения λ и получить окончательное решение.

Отметим, что в распоряжении ЛПР также находятся значения весового вектора $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)^T$, изменяя который можно придавать различную важность значениям характеристик w_1 и w_2 и выбирать наиболее рациональное с точки зрения ЛПР решение.

Таблица 6

Оценки вариантов проектов ИС x_i по критерию $y_1(x_i, \lambda_1)$, оценивающему качество характеристики w_1

Варианты проектов ИС	Значения параметра λ_1										
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
x_1	3,917	3,73	3,54	3,35	3,16	2,97	2,78	2,60	2,41	2,22	2,03
x_2	4,71	4,38	4,05	3,73	3,40	3,07	2,74	2,41	2,09	1,76	1,43
x_3	4,04	3,89	3,75	3,60	3,45	3,31	3,16	3,01	2,86	2,72	2,57
x_4	3,916	3,78	3,63	3,49	3,35	3,21	3,07	2,93	2,79	2,65	2,51
$\min_{x_i \in X} y_1(x_i, \lambda_1)$	3,916	3,73	3,54	3,35	3,16	2,97	2,74	2,41	2,09	1,76	1,43

Таблица 7

Оценки вариантов проектов ИС x_i по критерию $y_2(x_i, \lambda_1)$, оценивающему качество характеристики w_2

Варианты проектов ИС	Значения параметра λ_1										
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
x_1	3,69	3,53	3,38	3,23	3,08	2,93	2,78	2,63	2,48	2,33	2,18
x_2	3,38	3,23	3,08	2,93	2,78	2,63	2,49	2,34	2,19	2,04	1,89
x_3	3,58	3,43	3,28	3,13	2,97	2,82	2,67	2,52	2,37	2,21	2,06
x_4	3,46	3,28	3,10	2,93	2,75	2,57	2,40	2,22	2,04	1,87	1,69
$\min_{x_i \in X} y_2(x_i, \lambda_1)$	3,38	3,23	3,08	2,93	2,75	2,57	2,40	2,22	2,04	1,87	1,69

Таблица 8

Решения задачи выбора на основе принципа идеальной точки

Варианты проектов ИС	Значения параметра λ										
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
x_1	0,096	0,090	0,090	0,090	0,109	0,130	0,146	0,204	0,296	0,423	0,850
x_2	0,630	0,423	0,260	0,144	0,059	0,014	0,008	0,014	0,023	0,029	0,040
x_3	0,055	0,066	0,084	0,103	0,133	0,178	0,249	0,450	0,702	1,037	1,437
x_4	0,006	0,005	0,009	0,020	0,036	0,058	0,109	0,270	0,490	0,729	1,166
$F(x^*(\lambda))$	0,006	0,005	0,009	0,020	0,036	0,014	0,008	0,014	0,023	0,029	0,040
$x^*(\lambda)$	x_4	x_4	x_4	x_4	x_4	x_2	x_2	x_2	x_2	x_2	x_2

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный подход к многокритериальной оценке характеристик ИС в условиях неопределенности может иметь дальнейшее развитие за счет применения более сложных методов построения комбинированных критериев оценки на нижнем уровне решения задачи оптимизации и более гибких принципов оптимальности на верхнем уровне. Основная особенность дальнейшего совершенствования подхода и соответствующих методов состоит в стремлении предложить ЛПР инструментарий, позволяющий наиболее точно отразить его предпочтения при сравнении вариантов. Эффективная реализация подхода возможна только с помощью построения диалоговой компьютерной системы, располагающей всеми необходимыми методами и позволяющей в диалоге получать необходимые решения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Принципы оптимальности в задачах многокритериальной оптимизации

Рассмотрим подход к проблеме многокритериальности, основанный на введении понятия "лучших" решений и опирающийся на постулируемые принципы оптимальности [1].

Рассматривается решение задачи многокритериальной оптимизации в условиях определенности, характеризующейся однозначной детерминированной связью между решениями $x_i \in X$ и критериями (характеристиками), описывающими свойства решений $y_k(x_i)$, $k = 1, ..., q$, которые надо максимизировать, где q — число критериев (т. е. свойств (характеристик) ИС).

Образ допустимого множества решений X в пространстве критериев R^q после его отображения составляет множество векторных оценок Y: $(y_1(x_i), ..., y_q(x_i))^T \in Y \subset R^q$.

Различные критерии могут иметь различную важность с точки зрения ЛПР. Приведем применяемые далее способы описания относительной важности критериев.

Ряд приоритета. Данный ряд $I = \{1, ..., q\}$ отражает упорядочение критериев по важности (ранжировку): $y_1 > y_2 > ... > y_q$ и выражает существование более важных, менее важных и равноважных (эквивалентных по важности) критериев. В данной записи критерии пронумерованы в порядке уменьшения важности.

Вектор приоритета. В данном векторе $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_q)^T$ компонента α_k показывает для упорядоченных по важности критериев, во сколько раз критерий y_k более важен, чем критерий y_{k+1}. Для получения α_k обычно рассматриваются приращения критериев: берут единичное приращение критерия y_k и находят такое приращение критерия y_{k+1}, которое равно единичному изменению качества по критерию y_k. Полученная величина обозначается α_k.

Весовой вектор. В данном векторе $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_q)^T$ компонента γ_k представляет относительную важность k-го критерия y_k по отношению ко всем остальным критериям. Из данного определения следует связь между элементами весового вектора γ и вектора приоритета α:

$$\gamma_k = \alpha_k \cdot \gamma_{k+1}, \quad k = 1, ..., q - 1.$$

Обычно рассматривается нормализованный весовой вектор: для γ_k, $k = 1,..., q$, выполняются условия нормализации:

$$\gamma_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{q} \gamma_\mathrm{k} = 1.$$

Принцип оптимальности по Парето. Данным принципом можно воспользоваться на начальной стадии решения задачи с целью уменьшения исходного множества векторных оценок Y.

Решение называют оптимальным по Парето (парето-оптимальным, паретовским, эффективным), если невозможно улучшить (увеличить) решение ни по одному из критериев без ухудшения (уменьшения) решения хотя бы по одному из критериев. Парето-оптимальные решения составляют множество Парето.

Пусть X_P — множество Парето в пространстве решений и Y_P — множество Парето в пространстве критериев Y, тогда эти множества могут быть описаны следующими моделями:

для выпуклого множества Y

$$X_P = \left\{ x_i\text{: } \arg\max_{x_i \in X} \sum_{k=1}^{q} \gamma_k\, y_k(x_i),\ \gamma_k \geq 0,\ \sum_{k=1}^{q} \gamma_k = 1 \right\},$$

$$Y_P = \left\{ y = (y_1, ..., y_q)\text{: } \max_{x_i \in X} \sum_{k=1}^{q} \gamma_k\, y_k(x_i), \right.$$

$$\left. \gamma_k \geq 0,\ \sum_{k=1}^{q} \gamma_k = 1 \right\};$$

для невыпуклого множества Y

$$X_P = \left\{x_i\text{: } \arg\max_{x_i \in X} \min_{k \in \{1, \ldots, q\}} \gamma_k y_k(x_i),\right.$$
$$\left.\gamma_k \ge 0,\ \sum_{k=1}^{q} \gamma_k = 1\right\},$$

$$Y_P = \left\{y = (y_1, \ldots, y_q)\text{: } \max_{x_i \in X} \min_{k \in \{1, \ldots, q\}} \gamma_k y_k(x_i),\right.$$
$$\left.\gamma_k \ge 0,\ \sum_{k=1}^{q} \gamma_k = 1\right\}.$$

Одно из достоинств паретовского принципа оптимальности заключается в его инвариантности к масштабу, единицам измерения критериев и взаимной важности критериев. Недостаток принципа состоит в отсутствии ответа на вопрос: какое из решений лучшее?

Следующие принципы дают ответ на этот вопрос.

Далее будем предполагать выполнение предположения о том, что множество векторных оценок Y ограничено, замкнуто и целиком лежит во внутренности неотрицательного ортанта пространства критериев R^q.

Принцип идеальной точки. Согласно этому принципу лучшим считается решение, расположенное в пространстве критериев ближе всего (в смысле некоторой нормы) к "идеальной точке" y^I:

$$x^* = \arg\min_{x_i \in X} F(x_i) = \min_{x_i \in X} D(y^I - y(x_i), \gamma),$$

где $y^I = (y_1^I, \ldots, y_q^I)^T$ — идеальная точка, $D(\cdot,\cdot)$ — норма, γ — весовой вектор.

Например, для евклидовой нормы получим:

$$x^* = \arg\min_{x_i \in X} F(x_i) = \arg\min_{x_i \in X} \sum_{k=1}^{q} \gamma_k^2 (y_k^I - y_k(x_i))^2.$$

Для удобства можно использовать относительные величины:

$$x^* = \arg\min_{x_i \in X} \sum_{k=1}^{q} \gamma_k^2 \left(1 - \frac{y_k(x_i)}{y_k^I}\right)^2.$$

Идеальная точка может быть выбрана ЛПР интуитивно или взята формально как вектор максимальных значений каждого из критериев в отдельности:

$$y^I = (y_1^I, \ldots, y_q^I) = \max_{x_i \in X} y_1(x_i), \ldots, \max_{x_i \in X} y_q(x_i)).$$

Этот принцип выражает желание найти решение, ближайшее к идеальной точке. Изменяя норму $D(\cdot,\cdot)$ и весовой вектор γ, можно по-разному описывать понятие "близости" к идеальной точке.

Принцип антиидеальной точки. В соответствии с этим принципом лучшим считается наиболее удаленное решение от антиидеальной точки y^{AI}:

$$x^* = \arg\max_{x_i \in X} F(x_i) = \max_{x_i \in X} F(y^{AI} - y(x_i), \gamma),$$

где $y^{AI} = (y_1^{AI}, \ldots, y_q^{AI})^T$ — антиидеальная точка.

Антиидеальная точка, например, может быть выбрана следующим образом:

$$y^{AI} = (y_1^{AI}, \ldots, y_q^{AI}) = (\min_{x_i \in X} y_I(x_i), \ldots, \min_{x_i \in X} y_q(x_i)).$$

Данный принцип выражает желание найти решение, наиболее удаленное от антиидеальной точки.

Следующие четыре принципа выражают желание равномерно увеличивать значения всех локальных критериев при определении наилучшего решения.

Принцип равенства. Согласно этому принципу наилучшим будет следующее решение:

$$x^* = \arg\max_{x_i \in X} F(x_i) = \max_{x_i \in X} y_1(x_i),$$

где $X_I = \{x_i\text{: } \arg(\gamma_1 y_1(x_i) = \ldots = \gamma_q y_q(x_i))\}$.

Здесь решение ищется на прямой в пространстве критериев. Возможны случаи, когда найденное решение не будет паретовским.

Принцип квазиравенства. Это "смягченная" версия слишком "жесткого" принципа равенства. По данному принципу наилучшее решение ищется как точка:

$$x^* = \arg\max_{x_i \in X} F(x_i) = \arg\max_{x_i \in X} y_1(x_i),$$

где $X_2 = \{x_i\text{: } \arg(|\gamma_1 y_1(x_i) - \gamma_j y_j(x_i)| \le \delta_{kj}),\ \delta_{kj} = \text{const},\ k, j = 1, \ldots, q\}$, δ_{kj} — заранее выбранные константы или величины, изменяемые ЛПР, которые позволяют значениям критериев отклоняться друг от друга.

Принцип максимина. По данному принципу каждое решение описывается наименьшей взвешенной величиной из q критериев. Затем выбирается наибольшая среди этих наименьших величин, и соответствующее ему решение принимается как наилучшее:

$$x^* = \arg\max_{x_i \in X} F(x_i) = \arg\max_{x_i \in X} \min_{k \in I} (\gamma_k y_k(x_i)),$$

где $I = \{1, \ldots, q)$ — множество номеров критериев. Иногда данный принцип называют принципом гарантированного результата или принципом наибольшей осторожности.

Принцип последовательного максимина. Если принцип максимина не приводит к единственному решению, то он может быть последовательно применен до q раз:

$$x^* = \arg\max_{x_i \in X} F(x) = \arg\max_{x_i \in X} \min_{k \in I_{q-1}} (\ldots$$
$$\ldots (\max_{x_i \in X} \min_{k \in I_1} (\max_{x_i \in X} \min_{k \in I} (\gamma_k y_k(x_i))))\ldots),$$

где I_1 — множество номеров критериев, полученное из множества I, из которого исключен номер критерия с минимальным значением, I_2 — множество номеров критериев, полученное из множества I_1, из которого исключен номер критерия с минимальным значением, ... множество I_{q-1} состоит только из номера одного критерия.

Стремление увеличивать значения всех критериев одновременно привлекательно. Однако отклонение от приведенных принципов иногда может дать значительный выигрыш, например, если позволить ухудшать значения части критериев для достижения улучшения значений по другим критериям.

Следующие два принципа носят название принципов справедливой уступки. Понятие "справедливости" может быть описано разными способами. До сих пор не установлено простого и очевидного "справедливого" принципа. Да он и не может существовать, поскольку разные ситуации требуют разной "справедливости". Компромисс и справедливость всегда привязаны к конкретной ситуации или к классу ситуаций. Рассмотрим подход к "справедливости", основанный на сравнении оценок увеличения и уменьшения значений локальных критериев при сравнении различных решений. Данный подход приводит к двум принципам: принципу абсолютной и относительной уступки.

Принцип абсолютной уступки. Пусть сравниваются два решения, и пусть мы переходим от первого ко второму решению. Пусть при этом переходе значения одной части критериев уменьшаются, а значения второй части критериев увеличиваются. Согласно рассматриваемому принципу второе решение лучше первого, если сумма взвешенных значений увеличившихся критериев больше суммы взвешенных значений уменьшившихся критериев. Данное длинное определение и сам принцип абсолютной уступки могут быть выражены в простой математической форме:

$$x^* = \arg\max_{x_i \in X} F(x) = \arg\max_{x_i \in X} \sum_{k=1}^{q} \gamma_k y_k(x_i).$$

Описанный принцип позволяет улучшать качество решения за счет компенсации (уступки) уменьшения значений по одним критериям большим увеличением значений по другим критериям.

Принцип относительной уступки. Пусть, как и ранее, сравниваются два любых решения, и пусть мы переходим от первого ко второму решению. Пусть относительные значения одной части критериев уменьшаются, а относительные значения второй части критериев увеличиваются при этом переходе. Согласно принципу относительной уступки второе решение лучше первого, если суммарное относительное увеличение взвешенных значений увеличившихся критериев больше суммарного относительного уменьшения взвешенных значений уменьшившихся критериев. Принцип относительной уступки (и данное длинное определение) может быть выражен в простой математической форме:

$$x^* = \arg\max_{x_i \in X} F(x_i) = \arg\max_{x_i \in X} \prod_{k=1}^{q} [y_k(x_i)]^{\gamma_k}$$

или

$$x^* = \arg\max_{x_i \in X} F(x_i) = \arg\max_{x_i \in X} \sum_{k=1}^{q} \gamma_k \log y_k(x_i).$$

Этот принцип учитывает значения критериев, и самый простой путь улучшения решения заключается в уменьшении значений критериев с большими значениями.

Принцип абсолютной уступки не учитывает значений локальных критериев. Его лучше применять в комбинации с другими принципами. Принцип относительной уступки довольно чувствителен к значениям критериев, и относительная уступка ведет к учету интересов, прежде всего, критериев с наибольшими значениями за счет критериев с меньшими значениями. Важное достоинство принципа относительной уступки состоит в его инвариантности к единицам, в которых измеряются значения критериев.

Во всех описанных принципах оптимальности используется весовой вектор. Приводимые далее принцип главного критерия и лексикографический принцип используют меньше информации о взаимной важности критериев.

Принцип главного критерия. Это наиболее широко применяемый принцип при постановке задач оптимизации. Один из критериев (обычно самый важный) принимается за главный, для остальных критериев назначают пороговые значения. Эти критерии должны превышать пороговые значения. Наилучшим решением является точка

$$x^* = \arg\max_{x_i \in X} F(x_i) = \arg\max_{x_i \in X_0} y_1(x_i),$$

$$X_0 = \{x_i\colon x_i \in X, \arg(y_k(x_i) \geq \bar{y}_k),$$
$$\bar{y}_k = \text{const}, \quad k = 2, ..., q\}.$$

Выбор пороговых значений $\bar{y}_i$ очень важен. Изменяя их, можно получать различные решения. Кроме того, можно порекомендовать при применении данного принципа исследовать влияние выбора главного критерия на результирующее оптимальное решение.

Лексикографический принцип. В этом случае используется ряд приоритета и решается последовательность задач. Сначала максимизируется самый важный критерий. Полученное в результате множество решений является допустимым множеством для максимизации следующего по важности критерия и т. д.:

$$X_1 = \{x_i\colon \arg\max_{x_i \in X} y_1(x_i)\},$$

$$X_2 = \{x_i\colon \arg\max_{x_i \in X} y_2(x_i)\},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$X_q = \{x_i\colon \arg\max_{x_i \in X} y_q(x_i)\}.$$

Данный принцип довольно жесткий. Часто после решения первой задачи максимизации получают единственное решение, а остальные критерии не участвуют в решении, и тем самым их "интересы" не учитываются. Следующий принцип более гибкий.

Лексикографический принцип квазиоптимальности. Решается последовательность задач максимизации с введенными отклонениями от оптимума (уступками). Данные отклонения увеличивают допустимое множество, на котором решаются последующие задачи минимизации:

$$X_1 = \{x_i\colon \arg(\max_{x_i \in X} y_1(x_i) - \Delta_1)\},$$

$$X_2 = \{x_i\colon \arg(\max_{x_i \in X} y_2(x_i) - \Delta_2)\},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$X_{q-1} = \{x_i\colon \arg(\max_{x_i \in X} y_{q-1}(x_i) - \Delta_{q-1})\},$$

$$X_q = \{x_i\colon \arg(\max_{x_i \in X} y_q(x_i)\ \}.$$

Принцип позволяет ЛПР выбирать значения Δ_k, $k = 1, ..., q - 1$, и влиять на решение и "интересы" последующих критериев.

Нами были описаны главные принципы оптимальности, которые могут быть полезны при постановке задач оптимизации для перехода от множества критериев к единому критерию и получения в результате такого перехода традиционной однокритериальной задачи для оптимизации. Правильное и гибкое применение данных принципов не означает их обязательного прямого использования на стадии постановки задачи оптимизации. Предполагается их последовательное или комбинированное применение, исследование того, как изменяется при этом решение, и как они согласуются с целями ЛПР.

Отметим, что многие из принципов требуют от ЛПР дополнительной информации, которую ему обычно трудно предоставить априори. Зачастую ЛПР понимает то, чего можно достигнуть, только в процессе решения задачи. Фактически выбор того или другого принципа оптимальности не составляет математической проблемы, а выбор или построение принципа оптимальности должен вести к решению, удовлетворяющему требованиям ЛПР, и отражать представление ЛПР о качестве решения. Чем больше вариантов постановок задач оптимизации и их решений рассматривается ЛПР, тем больше шансов найти решение, полностью его удовлетворяющее.

Таким образом, важной рекомендацией по применению принципов оптимальности может быть их комбинирование и разумное сочетание в процессе диалога с ЛПР.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыков А. С.* Методы системного анализа: Многокритериальная и нечеткая оптимизация, моделирование и экспертные оценки. — М.: Экономика, 1999. — 192 с.
2. *Рыков А. А.* Модель оценки отдельных характеристик качества информационных систем в условиях неопределенности // Тр. междунар. конф. "Идентификация систем и задачи управления" SICPRO'04, Москва, Ин-т проблем управления. — М., 2004.
3. *Мушик Э., Мюллер П.* Методы принятия технических решений. — М.: Мир, 1990. — 208 с.
4. *Трухаев Р. И.* Модели принятия решений в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1981. — 258 с.

☎ *(095) 338-58-97*

E-mail: alex@webgrad.ru

E-mail: alexrykov@mail333.com ❑